La loi de réciprocité quadratique

Soit p un nombre premier impair. Un entier $n \in \mathbb{Z}$ est un carré modulo p s'il existe des entiers $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $n = r^2 + ps$, autrement dit, si la classe de n dans le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré. Tout multiple de p étant clairement un carré modulo p, on s'intéresse aux entiers n premiers à p, et l'on introduit pour ceux-ci le symbole de Legendre

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré modulo } p \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est aisé de voir que le symbole de Legendre est multiplicatif, c'est-à-dire $\left(\frac{nm}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{m}{p}\right)$. Par la décomposition des entiers en facteurs premiers, il suffit donc de savoir calculer le symbole de Legendre $\left(\frac{\ell}{p}\right)$ en tout nombre premier $\ell \neq p$. La loi de réciprocité quadratique met en lumière une relation tout-à-fait remarquable entre $\left(\frac{\ell}{p}\right)$ et $\left(\frac{p}{\ell}\right)$.

Théorème (Gauss, 1801)**.** Soient $\ell \neq p$ des nombres premiers impairs. On a

$$\left(\frac{\ell}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{\ell-1}{2}} \left(\frac{p}{\ell}\right).$$

Noter que cette loi établit une réciprocité entre la quadraticité de ℓ modulo p et celle de p modulo ℓ. Ce type de résultat représente un défi majeur en théorie des nombres : il est en général très difficile de lier un comportement local en p à celui en ℓ. La loi de réciprocité quadratique est la première d'une longue liste de lois de réciprocité de plus en plus générales dont les ramifications s'étendent jusqu'à nos jours. Citons la loi de réciprocité d'Eisenstein (puissances n-ièmes), la loi de réciprocité d'Artin (théorie du corps de classe), et le programme de Langlands (travaux en cours). La théorie de Galois y joue un rôle fondamental ; elle est nécessaire dans la formulation même des énoncés modernes.

Il existe de nombreuses démonstrations de la loi de réciprocité quadratique (à ce jour 246 sont officiellement recensées). Dans ce cours on proposera une preuve basée sur la théorie des corps finis. Cette approche permet de donner un avant-goût des méthodes utilisées pour les généralisations actuelles, tout en esquivant la théorie de Galois.