

A propos des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point

Céline ESSER
Celine.Esser@ulg.ac.be

Université de Liège – Département de Mathématique

Brussels Summer School of Mathematics

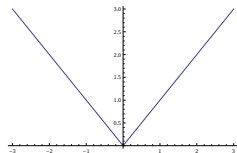
3 août 2015

Introduction

Des fonctions non-dérivables?

Introduction

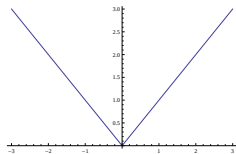
Des fonctions non-dérivables?



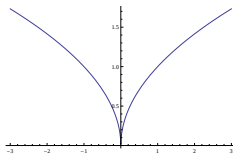
$$x \mapsto |x|$$

Introduction

Des fonctions non-dérivables?



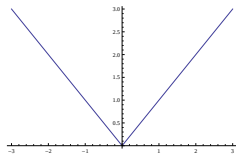
$$x \mapsto |x|$$



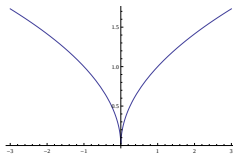
$$x \mapsto \sqrt{|x|}$$

Introduction

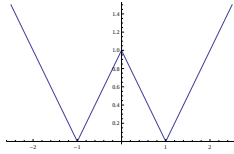
Des fonctions non-dérivables?



$$x \mapsto |x|$$



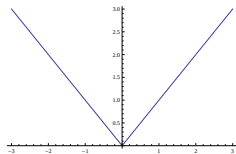
$$x \mapsto \sqrt{|x|}$$



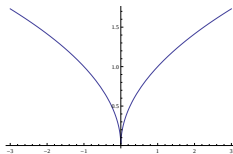
$$x \mapsto ||x| - 1|$$

Introduction

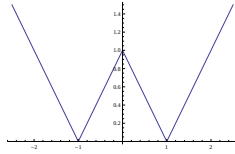
Des fonctions non-dérivables?



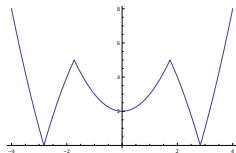
$$x \mapsto |x|$$



$$x \mapsto \sqrt{|x|}$$



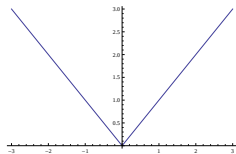
$$x \mapsto ||x| - 1|$$



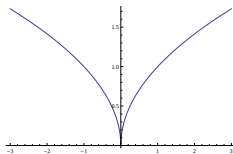
$$x \mapsto ||x^2 - 3| - 5|$$

Introduction

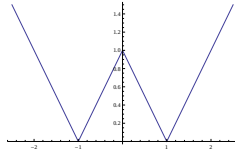
Des fonctions non-dérivables?



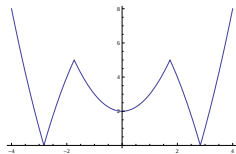
$$x \mapsto |x|$$



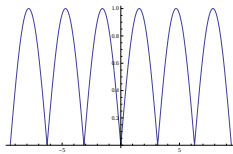
$$x \mapsto \sqrt{|x|}$$



$$x \mapsto ||x| - 1|$$



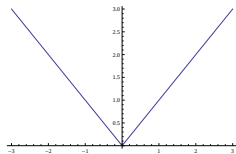
$$x \mapsto ||x^2 - 3| - 5|$$



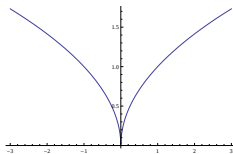
$$x \mapsto |\sin(x)|$$

Introduction

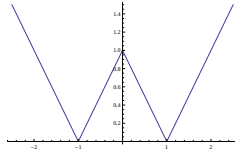
Des fonctions non-dérivables?



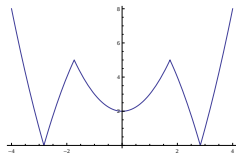
$$x \mapsto |x|$$



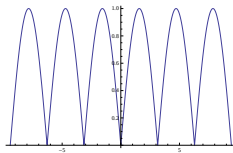
$$x \mapsto \sqrt{|x|}$$



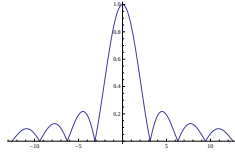
$$x \mapsto ||x| - 1|$$



$$x \mapsto ||x^2 - 3| - 5|$$



$$x \mapsto |\sin(x)|$$



$$x \mapsto \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$$

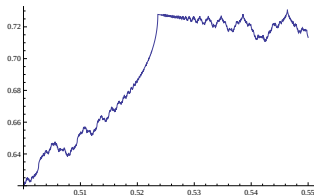
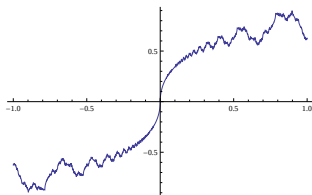
Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861. La fonction

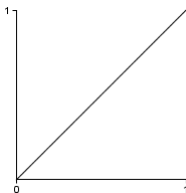
$$R(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x), \quad x \in \mathbb{R}$$

est dérivable uniquement en les points $\frac{p\pi}{q}$ où p et q sont des entiers impairs.



Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

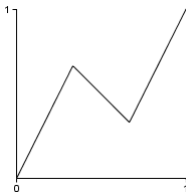
- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.



- On part d'un segment joignant le point $(0,0)$ au point $(1,1)$

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

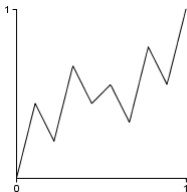
- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.



- On part d'un segment joignant le point $(0,0)$ au point $(1,1)$
- On le coupe en trois segments égaux, on fixe les extrémités initiales et on double la pente des deux segments extrêmes, et on transforme le segment intermédiaire afin de garder la continuité

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

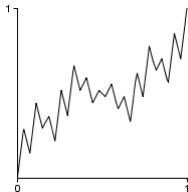
- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.



- On part d'un segment joignant le point $(0,0)$ au point $(1,1)$
- On le coupe en trois segments égaux, on fixe les extrémités initiales et on double la pente des deux segments extrêmes, et on transforme le segment intermédiaire afin de garder la continuité
- On applique la construction précédente à chacun des trois segments de cette ligne brisée, et ainsi de suite...

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

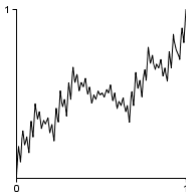
- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.



- On part d'un segment joignant le point $(0,0)$ au point $(1,1)$
- On le coupe en trois segments égaux, on fixe les extrémités initiales et on double la pente des deux segments extrêmes, et on transforme le segment intermédiaire afin de garder la continuité
- On applique la construction précédente à chacun des trois segments de cette ligne brisée, et ainsi de suite...

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

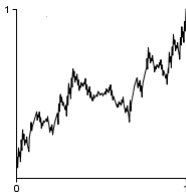
- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.



- On part d'un segment joignant le point $(0,0)$ au point $(1,1)$
- On le coupe en trois segments égaux, on fixe les extrémités initiales et on double la pente des deux segments extrêmes, et on transforme le segment intermédiaire afin de garder la continuité
- On applique la construction précédente à chacun des trois segments de cette ligne brisée, et ainsi de suite...

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.



- On part d'un segment joignant le point $(0,0)$ au point $(1,1)$
- On le coupe en trois segments égaux, on fixe les extrémités initiales et on double la pente des deux segments extrêmes, et on transforme le segment intermédiaire afin de garder la continuité
- On applique la construction précédente à chacun des trois segments de cette ligne brisée, et ainsi de suite...

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.



Cela revient à itérer l'opérateur

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}f(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}f(3x-1) & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}f(3x-2) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

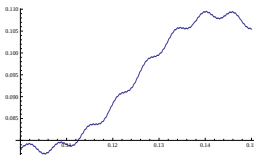
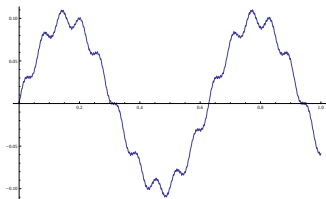
à partir de la fonction $x \mapsto x$.

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860. Soit $a > 1000$ est un entier pair. La fonction

$$C(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k} \sin(a^k x), \quad x \in \mathbb{R},$$

n'est dérivable en aucun point.



Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.

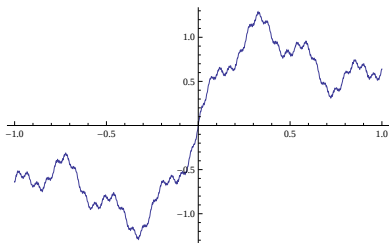
Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.
- Darboux 1873.

Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.
- Darboux 1873.

$$D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sin((k+1)!x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

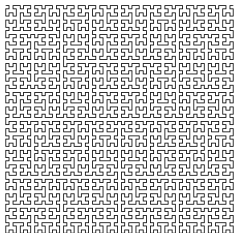


Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.
- Darboux 1873.
- Peano 1890. Premier exemple d'une courbe "qui remplit l'espace"

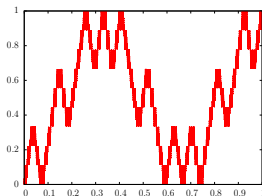
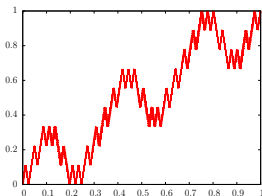
Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.
- Darboux 1873.
- Peano 1890. Premier exemple d'une courbe "qui remplit l'espace": fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ surjective dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Construction basée sur la décomposition en base 3. Ses composantes sont continues et nulle part dérivables.



Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

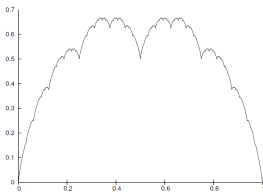
- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.
- Darboux 1873.
- Peano 1890. Premier exemple d'une courbe "qui remplit l'espace": fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ surjective dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Construction basée sur la décomposition en base 3. Ses composantes sont continues et nulle part dérivables.



Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.
- Darboux 1873.
- Peano 1890. Premier exemple d'une courbe "qui remplit l'espace"
- Takagi 1903.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{dist}(2^n x, \mathbb{Z})$$



Un ensemble non-dénombrable de points de non-dérivabilité?

- Riemann 1861.
- Bolzano 1830. Première construction d'une fonction nulle part dérivable.
- Cellérier 1860.
- Weierstrass 1872. Premier exemple publié.
- Darboux 1873.
- Peano 1890. Premier exemple d'une courbe "qui remplit l'espace"
- Takagi 1903.
- Etc.

“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable
des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”
(Correspondance de Hermite à Stieltjes, 1893)

“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable
des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”
(Correspondance de Hermite à Stieltjes, 1893)

Contredit l’intuition: Fonction continue $\neq$ on peut la dessiner sans lever le crayon!

“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable
des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”
(Correspondance de Hermite à Stieltjes, 1893)

Contredit l’intuition: Fonction continue $\neq$ on peut la dessiner sans lever le crayon!

Et pourtant...

- Vitesse d’un fluide turbulent
- Signaux financiers
- Codage de séquences d’ADN
- Traffic internet
- Température de l’air
- Signaux biomédicaux
- Etc.

Fonction de Weierstrass

Soit $a \in]0, 1[$ et soit b un nombre impair plus grand que 1 tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. La **fonction de Weierstrass** $W_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$W_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$

Fonction de Weierstrass

Soit $a \in]0, 1[$ et soit b un nombre impair plus grand que 1 tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. La **fonction de Weierstrass** $W_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$W_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$

Bien défini? Ok par le critère de convergence de Weierstrass puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |a^k \cos(b^k \pi x)| \leq a^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a^k < +\infty.$$

Fonction de Weierstrass

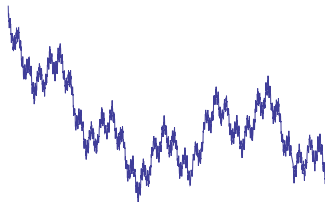
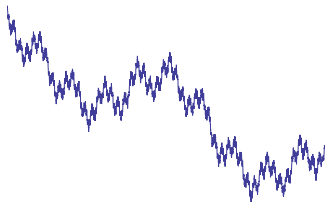
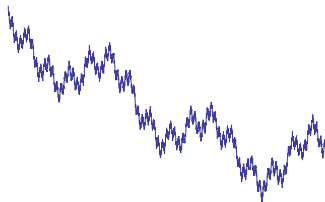
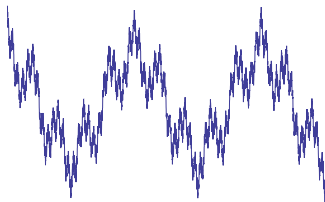
Soit $a \in]0, 1[$ et soit b un nombre impair plus grand que 1 tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. La **fonction de Weierstrass** $W_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

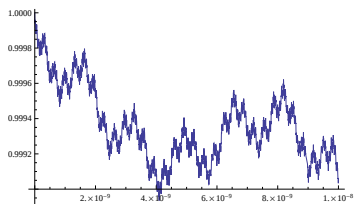
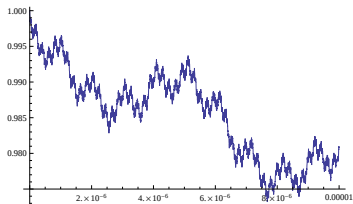
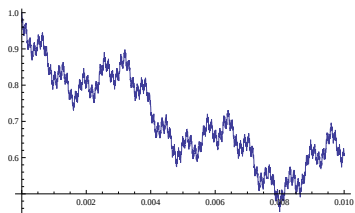
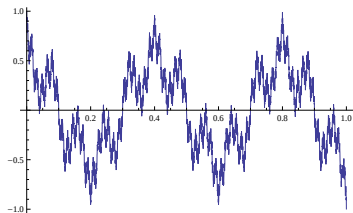
$$W_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$

Bien défini? Ok par le critère de convergence de Weierstrass puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |a^k \cos(b^k \pi x)| \leq a^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a^k < +\infty.$$

En particulier, $W_{a,b}$ est **continu** car limite uniforme de fonctions continues.





Proposition

La fonction de Weierstrass $W_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Proposition

La fonction de Weierstrass $W_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Construction d'une suite $(y_m)_m$ qui converge vers x_0^-

Pour tout $m \geq 1$, on choisit $c_m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x_m := b^m x_0 - c_m \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

et on pose

$$y_m := \frac{c_m - 1}{b^m}.$$

Proposition

La fonction de Weierstrass $W_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Construction d'une suite $(y_m)_m$ qui converge vers x_0^-

Pour tout $m \geq 1$, on choisit $c_m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x_m := b^m x_0 - c_m \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

et on pose

$$y_m := \frac{c_m - 1}{b^m}.$$

On a

$$y_m - x_0 = \frac{c_m - 1}{b^m} - \frac{x_m + c_m}{b^m} = -\frac{1 + x_m}{b^m} \in \left[-\frac{3}{2b^m}, 0 \right[.$$

2. Etude du quotient différentiel

On a

$$W_{a,b}(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x_0) \quad \text{et} \quad W_{a,b}(y_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi y_m)$$

donc

$$\frac{W_{a,b}(y_m) - W_{a,b}(x_0)}{y_m - x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

2. Etude du quotient différentiel

On a

$$W_{a,b}(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x_0) \quad \text{et} \quad W_{a,b}(y_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi y_m)$$

donc

$$\frac{W_{a,b}(y_m) - W_{a,b}(x_0)}{y_m - x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0} = S_1^m + S_2^m$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^m := \sum_{k=0}^{m-1} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0} \\ S_2^m := \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0} \end{array} \right.$$

a) Regardons S_1^m

$$S_1^m = \sum_{k=0}^{m-1} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

a) Regardons S_1^m

$$S_1^m = \sum_{k=0}^{m-1} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

$$\begin{aligned} |\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)| &= \left| b^k \pi \int_{y_m}^{x_0} \sin(b^k \pi t) dt \right| \leq b^k \pi \int_{y_m}^{x_0} |\sin(b^k \pi t)| dt \\ &\leq b^k \pi |y_m - x_0| \end{aligned}$$

a) Regardons S_1^m

$$S_1^m = \sum_{k=0}^{m-1} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

$$\begin{aligned} |\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)| &= \left| b^k \pi \int_{y_m}^{x_0} \sin(b^k \pi t) dt \right| \leq b^k \pi \int_{y_m}^{x_0} |\sin(b^k \pi t)| dt \\ &\leq b^k \pi |y_m - x_0| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |S_1^m| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} a^k \frac{|\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)|}{|y_m - x_0|} \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} (ab)^k \pi \\ &= \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \leq \frac{(ab)^m \pi}{ab - 1} \quad \text{car } ab > 1. \end{aligned}$$

a) Regardons S_1^m

$$S_1^m = \sum_{k=0}^{m-1} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

$$\begin{aligned} |\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)| &= \left| b^k \pi \int_{y_m}^{x_0} \sin(b^k \pi t) dt \right| \leq b^k \pi \int_{y_m}^{x_0} |\sin(b^k \pi t)| dt \\ &\leq b^k \pi |y_m - x_0| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |S_1^m| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} a^k \frac{|\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)|}{|y_m - x_0|} \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} (ab)^k \pi \\ &= \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \leq \frac{(ab)^m \pi}{ab - 1} \quad \text{car } ab > 1. \end{aligned}$$

On en tire que

$$\boxed{\varepsilon_m := (-1)^{c_m} \frac{S_1^m(ab - 1)}{(ab)^m \pi} \in [-1, 1]} \quad (*)$$

b) Regardons S_2^m

$$S_2^m = \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

b) Regardons S_2^m

$$S_2^m = \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

Comme b est impair, $c_m \in \mathbb{Z}$, et $y_m = \frac{c_m - 1}{b^m}$

$$\cos(b^k \pi y_m) = \cos(b^{k-m} \pi (c_m - 1)) = (-1)^{c_m - 1} = -(-1)^{c_m}$$

b) Regardons S_2^m

$$S_2^m = \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

Comme b est impair, $c_m \in \mathbb{Z}$, et $y_m = \frac{c_m - 1}{b^m}$

$$\cos(b^k \pi y_m) = \cos(b^{k-m} \pi (c_m - 1)) = (-1)^{c_m - 1} = -(-1)^{c_m}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(b^k \pi x_0) &= \cos(b^{k-m} \pi (x_m + c_m)) \\ &= \cos(b^{k-m} \pi x_m) \cos(b^{k-m} \pi c_m) - \sin(b^{k-m} \pi x_m) \sin(b^{k-m} \pi c_m) \\ &= (-1)^{c_m} \cos(b^{k-m} \pi x_m). \end{aligned}$$

b) Regardons S_2^m

$$S_2^m = \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

Comme b est impair, $c_m \in \mathbb{Z}$, et $y_m = \frac{c_m - 1}{b^m}$

$$\cos(b^k \pi y_m) = \cos(b^{k-m} \pi (c_m - 1)) = (-1)^{c_m - 1} = -(-1)^{c_m}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(b^k \pi x_0) &= \cos(b^{k-m} \pi (x_m + c_m)) \\ &= \cos(b^{k-m} \pi x_m) \cos(b^{k-m} \pi c_m) - \sin(b^{k-m} \pi x_m) \sin(b^{k-m} \pi c_m) \\ &= (-1)^{c_m} \cos(b^{k-m} \pi x_m). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \cos(b^k \pi y_m) - \cos(b^k \pi x_0) &= -(-1)^{c_m} - (-1)^{c_m} \cos(b^{k-m} \pi x_m) \\ &= -(-1)^{c_m} (1 + \cos(b^{k-m} \pi x_m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_2^m &= -(-1)^{c_m} \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^{k-m}\pi x_m)}{y_m - x_0} \\
&= b^m (-1)^{c_m} \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^{k-m}\pi x_m)}{1 + x_m} \\
&= (ab)^m (-1)^{c_m} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m}
\end{aligned}$$

car $y_m - x_0 = -\frac{1+x_m}{b^m}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_2^m &= -(-1)^{c_m} \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^{k-m}\pi x_m)}{y_m - x_0} \\
&= b^m (-1)^{c_m} \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^{k-m}\pi x_m)}{1 + x_m} \\
&= (ab)^m (-1)^{c_m} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m}
\end{aligned}$$

car $y_m - x_0 = -\frac{1+x_m}{b^m}$. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m} \geq \frac{1 + \cos(\pi x_m)}{1 + x_m} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

puisque'il s'agit d'une série à termes positifs et puisque $x_m \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_2^m &= -(-1)^{c_m} \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^{k-m}\pi x_m)}{y_m - x_0} \\
&= b^m (-1)^{c_m} \sum_{k=m}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^{k-m}\pi x_m)}{1 + x_m} \\
&= (ab)^m (-1)^{c_m} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m}
\end{aligned}$$

car $y_m - x_0 = -\frac{1+x_m}{b^m}$. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m} \geq \frac{1 + \cos(\pi x_m)}{1 + x_m} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

puisque'il s'agit d'une série à termes positifs et puisque $x_m \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ainsi,

$$\boxed{\eta_m := \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m} \geq 1 \quad \text{et} \quad S_2^m = (ab)^m (-1)^{c_m} \frac{2}{3} \eta_m} \quad (**)$$

c) Total.

$$\varepsilon_m = (-1)^{c_m} \frac{S_1^m(ab-1)}{(ab)^m \pi} \in [-1, 1] \quad (*)$$

$$\eta_m = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m} \geq 1 \quad \text{et} \quad S_2^m = (ab)^m (-1)^{c_m} \frac{2}{3} \eta_m \quad (**)$$

c) Total.

$$\varepsilon_m = (-1)^{c_m} \frac{S_1^m(ab-1)}{(ab)^m \pi} \in [-1, 1] \quad (*)$$

$$\eta_m = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m} \geq 1 \quad \text{et} \quad S_2^m = (ab)^m (-1)^{c_m} \frac{2}{3} \eta_m \quad (**)$$

On peut réécrire

$$\frac{W_{a,b}(y_m) - W_{a,b}(x_0)}{y_m - x_0} = S_1^m + S_2^m = (-1)^{c_m} (ab)^m \left(\varepsilon_m \frac{\pi}{ab-1} + \eta_m \frac{2}{3} \right).$$

c) Total.

$$\varepsilon_m = (-1)^{c_m} \frac{S_1^m(ab-1)}{(ab)^m \pi} \in [-1, 1] \quad (*)$$

$$\eta_m = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \frac{1 + \cos(b^k \pi x_m)}{1 + x_m} \geq 1 \quad \text{et} \quad S_2^m = (ab)^m (-1)^{c_m} \frac{2}{3} \eta_m \quad (**)$$

On peut réécrire

$$\frac{W_{a,b}(y_m) - W_{a,b}(x_0)}{y_m - x_0} = S_1^m + S_2^m = (-1)^{c_m} (ab)^m \left(\varepsilon_m \frac{\pi}{ab-1} + \eta_m \frac{2}{3} \right).$$

En utilisant (*),(**) et l'hypothèse $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, il vient

$$\varepsilon_m \frac{\pi}{ab-1} + \eta_m \frac{2}{3} \geq \underbrace{\frac{-\pi}{ab-1} + \frac{2}{3}}_{\text{indépendant de } m} > 0.$$

Comme $(ab)^m \rightarrow +\infty$, la fonction $W_{a,b}$ n'est pas dérivable en x_0 .



Généralisations

- Hardy 1916. Si $a \in]0, 1[$, $b > 1$ et $ab \geq 1$, alors les fonctions

$$W_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \sin(b^k \pi x) \text{ et } W_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

sont continues et nulle part dérivables sur $\mathbb{R}$.

Généralisations

- Hardy 1916. Si $a \in]0, 1[$, $b > 1$ et $ab \geq 1$, alors les fonctions

$$W_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \sin(b^k \pi x) \text{ et } W_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

sont continues et nulle part dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Porter 1919.

$$W_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \sin(b_k \pi x) \text{ et } W_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \cos(b_k \pi x)$$

Conditions sur les suites $(u_k)_k$ (fonctions dérivables) et $(b_k)_k$ (entiers) pour avoir des fonctions continues nulle part dérivables.

Théorème de Baire

- Donne l'existence de fonctions qui sont difficiles à construire et à visualiser.
Exemple: fonctions dérivables nulle part monotones (C. Weil 1976).

Théorème de Baire

- Donne l'existence de fonctions qui sont difficiles à construire et à visualiser.
Exemple: fonctions dérivables nulle part monotones (C. Weil 1976).
- Donne une notion d'ensemble générique (i.e. large) d'un point de vue topologique.

Théorème de Baire

- Donne l'existence de fonctions qui sont difficiles à construire et à visualiser.
Exemple: fonctions dérivables nulle part monotones (C. Weil 1976).
- Donne une notion d'ensemble générique (i.e. large) d'un point de vue topologique.

Théorème

Tout espace métrisable complet est de Baire, c'est-à-dire toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Théorème de Baire

- Donne l'existence de fonctions qui sont difficiles à construire et à visualiser.
Exemple: fonctions dérivables nulle part monotones (C. Weil 1976).
- Donne une notion d'ensemble générique (i.e. large) d'un point de vue topologique.

Théorème

Tout espace métrisable complet est de Baire, c'est-à-dire toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Définition

Une partie d'un espace de Baire est **résiduel** s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Théorème de Baire

- Donne l'existence de fonctions qui sont difficiles à construire et à visualiser. Exemple: fonctions dérivables nulle part monotones (C. Weil 1976).
- Donne une notion d'ensemble générique (i.e. large) d'un point de vue topologique.

Théorème

Tout espace métrisable complet est de Baire, c'est-à-dire toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Définition

Une partie d'un espace de Baire est **résiduel** s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

- Tout ensemble résiduel est dense.
- Le complémentaire d'un ensemble résiduel est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide. On dit qu'il est **maigre** ou **de première catégorie**.

Soit $\mathcal{C}([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Sur cet espace, on définit la norme $\| \cdot \|$ par

$$\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1]).$$

Muni de cette norme, $\mathcal{C}([0, 1])$ est un espace complet.

Soit $\mathcal{C}([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Sur cet espace, on définit la norme $\| \cdot \|$ par

$$\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1]).$$

Muni de cette norme, $\mathcal{C}([0, 1])$ est un espace complet.

Lemme

Les polynômes forment une partie dense de $\mathcal{C}([0, 1])$, i.e. pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Les polynômes de Bernstein

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

conviennent.

Théorème (Banach - Mazurkiewicz, 1931)

L'ensemble $\mathcal{ND}$ des fonctions continues et nulle part dérivables sur $[0, 1]$ est résiduel dans $\mathcal{C}([0, 1])$.

Théorème (Banach - Mazurkiewicz, 1931)

L'ensemble $\mathcal{ND}$ des fonctions continues et nulle part dérivables sur $[0, 1]$ est résiduel dans $\mathcal{C}([0, 1])$.

Preuve. Si f est dérivable en x , on a

$$\sup_{y \in [0, 1]} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} < +\infty.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{ND} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} F_n,$$

où

$$F_n = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : \exists x \in [0, 1] \text{ tel que } |f(y) - f(x)| \leq n|y - x| \ \forall y \in [0, 1]\}.$$

Il reste à montrer que F_n est un fermé d'intérieur vide de $\mathcal{C}([0, 1])$.

1. F_n est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de F_n qui converge vers f dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Est-ce que $f \in F_n$?

1. F_n est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de F_n qui converge vers f dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Est-ce que $f \in F_n$?

Puisque $f_k \in F_n$,

$$\exists x_k \in [0, 1] \text{ tel que } |f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k| \quad \forall y \in [0, 1].$$

Comme la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{m(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Notons $x \in [0, 1]$ sa limite.

1. F_n est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de F_n qui converge vers f dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Est-ce que $f \in F_n$?

Puisque $f_k \in F_n$,

$$\exists x_k \in [0, 1] \text{ tel que } |f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k| \quad \forall y \in [0, 1].$$

Comme la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{m(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Notons $x \in [0, 1]$ sa limite. Alors

$$\begin{aligned} & |f(y) - f(x)| \\ \leq & |f(y) - f_K(y)| + |f_K(y) - f_K(x_K)| + |f_K(x_K) - f(x_K)| + |f(x_K) - f(x)| \\ \leq & 2\|f - f_K\| + n|y - x_K| + |f(x_K) - f(x)|. \end{aligned}$$

1. F_n est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de F_n qui converge vers f dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Est-ce que $f \in F_n$?

Puisque $f_k \in F_n$,

$$\exists x_k \in [0, 1] \text{ tel que } |f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k| \quad \forall y \in [0, 1].$$

Comme la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{m(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Notons $x \in [0, 1]$ sa limite. Alors

$$\begin{aligned} & |f(y) - f(x)| \\ & \leq |f(y) - f_K(y)| + |f_K(y) - f_K(x_K)| + |f_K(x_K) - f(x_K)| + |f(x_K) - f(x)| \\ & \leq 2\|f - f_K\| + n|y - x_K| + |f(x_K) - f(x)|. \end{aligned}$$

Si $K = m(k) \rightarrow +\infty$, on obtient

$$|f(y) - f(x)| \leq n|y - x|,$$

d'où $f \in F_n$.

2. F_n est d'intérieur vide dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $f \in F_n$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon) \not\subseteq F_n$.

2. F_n est d'intérieur vide dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $f \in F_n$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon) \not\subseteq F_n$. On cherche donc $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$ et $g \notin F_n$. Soit P un polynôme tel que

$$\|f - P\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. F_n est d'intérieur vide dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $f \in F_n$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon) \not\subset F_n$. On cherche donc $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$ et $g \notin F_n$. Soit P un polynôme tel que

$$\|f - P\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Idée. Prendre $g = P + h$ où $\|h\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|Dh(x)|$ “suffisamment grand”.

2. F_n est d'intérieur vide dans $\mathcal{C}([0, 1])$

Soit $f \in F_n$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon) \not\subset F_n$. On cherche donc $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$ et $g \notin F_n$. Soit P un polynôme tel que

$$\|f - P\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Idée. Prendre $g = P + h$ où $\|h\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|Dh(x)|$ “suffisamment grand”. Alors

$$\|f - g\| \leq \|f - P\| + \|h\| < \varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\geq |h(y) - h(x)| - |P(y) - P(x)| \\ &\geq C|y - x| - C'|y - x| \\ &\geq (n + 1)|y - x| \end{aligned}$$

Soit $M = \sup_{x \in [0,1]} |DP(x)|$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon N > 2(M + n + 1)$ et la fonction $\Phi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$.

Soit $M = \sup_{x \in [0,1]} |DP(x)|$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon N > 2(M + n + 1)$ et la fonction $\Phi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$. Posons

$$h(x) = \frac{\varepsilon}{2} \Phi(Nx).$$

Remarquons que h est $\frac{1}{N}$ - périodique, continue et sur $[0, \frac{1}{N}[$, on a

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \leq \frac{1}{2N}, \\ \frac{\varepsilon}{2} (1 - Nx) & \text{si } x \geq \frac{1}{2N}. \end{cases}$$

Soit $M = \sup_{x \in [0,1]} |DP(x)|$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon N > 2(M + n + 1)$ et la fonction $\Phi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$. Posons

$$h(x) = \frac{\varepsilon}{2} \Phi(Nx).$$

Remarquons que h est $\frac{1}{N}$ - périodique, continue et sur $[0, \frac{1}{N}]$, on a

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \leq \frac{1}{2N}, \\ \frac{\varepsilon}{2} (1 - Nx) & \text{si } x \geq \frac{1}{2N}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\|h\| = \sup_{x \in [0,1]} |h(x)| = \frac{\varepsilon}{4}$$

et de plus, en tout point x ,

$$|D^+ h(x)| = \frac{\varepsilon N}{2} > M + n + 1,$$

$$\begin{cases} \sup_{x \in [0,1]} |DP(x)| = M \\ |D^+h(x)| > M + n + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sup_{x \in [0,1]} |DP(x)| = M \\ |D^+h(x)| > M + n + 1 \end{cases}$$

Par le TAF,

$$|P(y) - P(x)| \leq M|x - y| \quad \forall y \in [0, 1].$$

$$\begin{cases} \sup_{x \in [0,1]} |DP(x)| = M \\ |D^+h(x)| > M + n + 1 \end{cases}$$

Par le TAF,

$$|P(y) - P(x)| \leq M|x - y| \quad \forall y \in [0, 1].$$

D'autre part, pour tout $y > x$ suffisamment proche de x , on a

$$|h(y) - h(x)| > (M + n + 1)|x - y|.$$

$$\begin{cases} \sup_{x \in [0,1]} |DP(x)| = M \\ |D^+h(x)| > M + n + 1 \end{cases}$$

Par le TAF,

$$|P(y) - P(x)| \leq M|x - y| \quad \forall y \in [0, 1].$$

D'autre part, pour tout $y > x$ suffisamment proche de x , on a

$$|h(y) - h(x)| > (M + n + 1)|x - y|.$$

On en tire qu'il existe $y \in [0, 1]$ tel que

$$|g(y) - g(x)| \geq (M + n + 1)|x - y| - M|x - y| > n|x - y|.$$



Remarque. En particulier, $\mathcal{ND}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Résultat obtenu sans utiliser de fonction nulle part dérivable $\implies$ Donne l'existence!

Remarque. En particulier, $\mathcal{ND}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Résultat obtenu sans utiliser de fonction nulle part dérivable $\implies$ Donne l'existence!

Autre preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Fixons $W \in \mathcal{ND}$.

Remarque. En particulier, $\mathcal{ND}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Résultat obtenu sans utiliser de fonction nulle part dérivable $\implies$ Donne l'existence!

Autre preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Fixons $W \in \mathcal{ND}$. Comme $f - W \in \mathcal{C}([0, 1])$, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes tels que

$$\|f - W - P_n\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

La suite $(W + P_n)_n$ converge donc vers f dans $\mathcal{C}([0, 1])$.

Remarque. En particulier, $\mathcal{ND}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Résultat obtenu sans utiliser de fonction nulle part dérivable $\implies$ Donne l'existence!

Autre preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Fixons $W \in \mathcal{ND}$. Comme $f - W \in \mathcal{C}([0, 1])$, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes tels que

$$\|f - W - P_n\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

La suite $(W + P_n)_n$ converge donc vers f dans $\mathcal{C}([0, 1])$. De plus, s'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $W + P_n$ est dérivable en x , alors il en est de même pour $W = (W + P_n) - P_n$, ce qui est impossible.

Remarque. En particulier, $\mathcal{ND}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Résultat obtenu sans utiliser de fonction nulle part dérivable $\implies$ Donne l'existence!

Autre preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Fixons $W \in \mathcal{ND}$. Comme $f - W \in \mathcal{C}([0, 1])$, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes tels que

$$\|f - W - P_n\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

La suite $(W + P_n)_n$ converge donc vers f dans $\mathcal{C}([0, 1])$. De plus, s'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $W + P_n$ est dérivable en x , alors il en est de même pour $W = (W + P_n) - P_n$, ce qui est impossible.

$\longrightarrow$ Utilise l'existence d'une fonction nulle part dérivable!

La notion de résidualité est purement topologique.

La notion de résidualité est purement topologique.

Autres notions.

- **Prévalence** (Christensen 1972, Hunt, Sauer et Yorke 1992). Généralise la notion de presque partout à des espaces de dimension infinie.
Hunt 1994: $\mathcal{ND}$ est prévalent.

La notion de résidualité est purement topologique.

Autres notions.

- **Prévalence** (Christensen 1972, Hunt, Sauer et Yorke 1992). Généralise la notion de presque partout à des espaces de dimension infinie.
Hunt 1994: $\mathcal{ND}$ est prévalent.
- **Linéabilité** (Aron, Gurariy, Seoane-Sepúlveda 2005). Existence de larges structures algébriques formées d'objets particuliers.

La notion de résidualité est purement topologique.

Autres notions.

- **Prévalence** (Christensen 1972, Hunt, Sauer et Yorke 1992). Généralise la notion de presque partout à des espaces de dimension infinie.
Hunt 1994: $\mathcal{ND}$ est prévalent.
- **Linéabilité** (Aron, Gurariy, Seoane-Sepúlveda 2005). Existence de larges structures algébriques formées d'objets particuliers.
Jiménez-Rodríguez, Muñoz-Fernández et Seoane-Sepúlveda 2013: $\mathcal{ND}$ est linéable. Plus précisément, toute combinaison linéaire non-nulle des fonctions

$$W_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(9^k \pi x), \quad a \in \left] \frac{7}{9}, 1 \right[$$

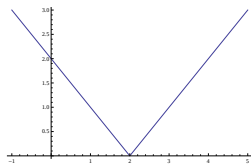
est nulle part dérivable.

Exposant de Hölder

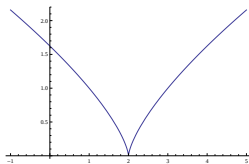
Question. Etant donné une fonction continue qui n'est pas dérivable en un point, comment peut-on caractériser l'irrégularité en ce point?

Exposant de Hölder

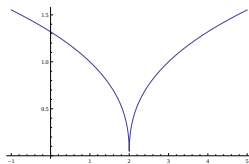
Question. Etant donné une fonction continue qui n'est pas dérivable en un point, comment peut-on caractériser l'irrégularité en ce point?



$$x \mapsto |x - 2|$$



$$x \mapsto |x - 2|^{0.7}$$



$$x \mapsto |x - 2|^{0.3}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée, $\alpha \in [0, 1]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que $f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe une constante $C > 0$ et un voisinage V de x_0 tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha, \quad \forall x \in V.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée, $\alpha \in [0, 1]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que $f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe une constante $C > 0$ et un voisinage V de x_0 tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha, \quad \forall x \in V.$$

De manière équivalente, on peut demander l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$|f(x_0 + l) - f(x_0)| \leq C|l|^\alpha, \quad \forall |l| < \delta.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée, $\alpha \in [0, 1]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que $f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe une constante $C > 0$ et un voisinage V de x_0 tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha, \quad \forall x \in V.$$

De manière équivalente, on peut demander l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$|f(x_0 + l) - f(x_0)| \leq C|l|^\alpha, \quad \forall |l| < \delta.$$

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée, $\alpha \geq 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que $f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe une constante $C > 0$, un polynôme P de degré strictement inférieur à α et $\delta > 0$ tel que

$$|f(x_0 + l) - P(l)| \leq C|l|^\alpha, \quad \forall |l| < \delta.$$

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Preuve. Supposons que

$$|f(x_0 + l) - P_1(l)| \leq C_1 |l|^\alpha \quad \forall |l| < \delta_1$$

$$|f(x_0 + l) - P_2(l)| \leq C_2 |l|^\alpha \quad \forall |l| < \delta_2$$

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Preuve. Supposons que

$$|f(x_0 + l) - P_1(l)| \leq C_1 |l|^\alpha \quad \forall |l| < \delta_1$$

$$|f(x_0 + l) - P_2(l)| \leq C_2 |l|^\alpha \quad \forall |l| < \delta_2$$

Posons $C = \max\{C_1, C_2\}$ et $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pour $|l| < \delta$, on a

$$|P_1(l) - P_2(l)| \leq |f(x_0 + l) - P_1(l)| + |f(x_0 + l) - P_2(l)| \leq 2C |l|^\alpha.$$

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Preuve. Supposons que

$$|f(x_0 + l) - P_1(l)| \leq C_1 |l|^\alpha \quad \forall |l| < \delta_1$$

$$|f(x_0 + l) - P_2(l)| \leq C_2 |l|^\alpha \quad \forall |l| < \delta_2$$

Posons $C = \max\{C_1, C_2\}$ et $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pour $|l| < \delta$, on a

$$|P_1(l) - P_2(l)| \leq |f(x_0 + l) - P_1(l)| + |f(x_0 + l) - P_2(l)| \leq 2C |l|^\alpha.$$

Ainsi,

$$\sup_{|l| < \delta} \frac{|P_1(l) - P_2(l)|}{|l|^\alpha} \leq 2C$$

ce qui est impossible car $P_1 - P_2$ est un polynôme non-nul de degré strictement inférieur à α .



Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Remarque. Le terme indépendant du polynôme P est donc $f(x_0)$.

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Remarque. Le terme indépendant du polynôme P est donc $f(x_0)$.

Corollaire

Si $f \in C^\alpha(x_0)$ et si f est $\lfloor \alpha \rfloor$ fois continument dérivable au voisinage de x_0 , alors le polynôme qui apparaît dans la définition est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ au point x_0 (à l'ordre $\alpha - 1$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Remarque. Le terme indépendant du polynôme P est donc $f(x_0)$.

Corollaire

Si $f \in C^\alpha(x_0)$ et si f est $\lfloor \alpha \rfloor$ fois continument dérivable au voisinage de x_0 , alors le polynôme qui apparaît dans la définition est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ au point x_0 (à l'ordre $\alpha - 1$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Preuve. La formule de Taylor limitée à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ donne

$$f(x_0 + l) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} l^k}_{P(l)} + R(l) \quad \text{où} \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{R(l)}{l^{\lfloor \alpha \rfloor}} = 0.$$

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Remarque. Le terme indépendant du polynôme P est donc $f(x_0)$.

Corollaire

Si $f \in C^\alpha(x_0)$ et si f est $\lfloor \alpha \rfloor$ fois continument dérivable au voisinage de x_0 , alors le polynôme qui apparaît dans la définition est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ au point x_0 (à l'ordre $\alpha - 1$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Preuve. La formule de Taylor limitée à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ donne

$$f(x_0 + l) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} l^k}_{P(l)} + R(l) \quad \text{où} \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{R(l)}{l^{\lfloor \alpha \rfloor}} = 0.$$

Ainsi, il existe $C > 0$ tel que

$$|f(x_0 + l) - P(l)| = |R(l)| \leq C|l|^\alpha$$

si l est suffisamment petit.

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Remarque. Le terme indépendant du polynôme P est donc $f(x_0)$.

Corollaire

Si $f \in C^\alpha(x_0)$ et si f est $\lfloor \alpha \rfloor$ fois continument dérivable au voisinage de x_0 , alors le polynôme qui apparaît dans la définition est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ au point x_0 (à l'ordre $\alpha - 1$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Remarque.

- $f \in C^1(x_0) \not\Rightarrow f$ est dérivable en x_0 . Ex. $x \mapsto |x - x_0|$.

Proposition

Si $f \in C^\alpha(x_0)$, le polynôme P apparaissant dans la définition est unique.

Remarque. Le terme indépendant du polynôme P est donc $f(x_0)$.

Corollaire

Si $f \in C^\alpha(x_0)$ et si f est $\lfloor \alpha \rfloor$ fois continument dérivable au voisinage de x_0 , alors le polynôme qui apparaît dans la définition est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ au point x_0 (à l'ordre $\alpha - 1$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Remarque.

- $f \in C^1(x_0) \not\Rightarrow f$ est dérivable en x_0 . Ex. $x \mapsto |x - x_0|$.
- Par contre, $f \in C^{1+\varepsilon}(x_0) \Rightarrow f$ est dérivable en x_0 .

Proposition

Si $\alpha' \leq \alpha$, alors $C^\alpha(x_0) \subseteq C^{\alpha'}(x_0)$.

Proposition

Si $\alpha' \leq \alpha$, alors $C^\alpha(x_0) \subseteq C^{\alpha'}(x_0)$.

Définition

L'exposant de Hölder de f en x_0 est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

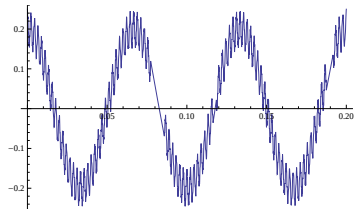
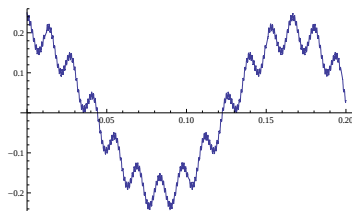
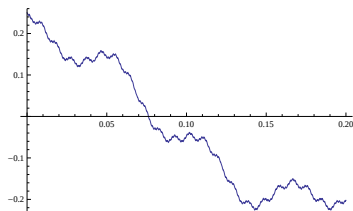
→ $h_f(x_0)$ informe sur la régularité de f en x_0 . Plus il est petit, plus le graphe est irrégulier au voisinage de x_0 .

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h_{W_{a,b}}(x) = -\frac{\log a}{\log b} \in]0, 1[$ ($ab > 1$).

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h_{W_{a,b}}(x) = -\frac{\log a}{\log b} \in]0, 1[$ ($ab > 1$).



Exposants de Hölder de 0.894, 0.649 et 0.473

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h_{W_{a,b}}(x) = -\frac{\log a}{\log b} \in]0, 1[$ ($ab > 1$).

Idée de la preuve. Posons $\alpha := -\frac{\log a}{\log b}$ et fixons $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W_{a,b} \in C^\alpha(x)$

Pour $l \in]-1, 1[$, on pose $m := \left\lfloor -\frac{\log |l|}{\log b} \right\rfloor$ et on considère le découpage

$$\begin{aligned} & |W_{a,b}(x+l) - W_{a,b}(x)| \\ \leq & \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} a^k |\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x)|}_{:= s_1^m} + \underbrace{\sum_{k=m}^{+\infty} a^k |\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x)|}_{:= s_2^m} \end{aligned}$$

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h_{W_{a,b}}(x) = -\frac{\log a}{\log b} \in]0, 1[$ ($ab > 1$).

Idee de la preuve. Posons $\alpha := -\frac{\log a}{\log b}$ et fixons $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W_{a,b} \in C^\alpha(x)$

Pour $l \in]-1, 1[$, on pose $m := \left\lfloor -\frac{\log |l|}{\log b} \right\rfloor$ et on considère le découpage

$$\begin{aligned} & |W_{a,b}(x+l) - W_{a,b}(x)| \\ & \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} a^k |\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x)|}_{:= s_1^m} + \underbrace{\sum_{k=m}^{+\infty} a^k |\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x)|}_{:= s_2^m} \end{aligned}$$

Comme fait précédemment, on a

$$s_1^m \leq \frac{\pi}{ab-1} |l|^\alpha \quad \text{et} \quad s_2^m \leq \frac{2}{a(1-a)} |l|^\alpha$$

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h_{W_{a,b}}(x) = -\frac{\log a}{\log b} \in]0, 1[$ ($ab > 1$).

Idée de la preuve. Posons $\alpha := -\frac{\log a}{\log b}$ et fixons $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W_{a,b} \in C^\alpha(x)$

Pour $l \in]-1, 1[$, on pose $m := \left\lfloor -\frac{\log |l|}{\log b} \right\rfloor$ et on considère le découpage

$$\begin{aligned} & |W_{a,b}(x+l) - W_{a,b}(x)| \\ & \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} a^k |\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x)|}_{:= s_1^m} + \underbrace{\sum_{k=m}^{+\infty} a^k |\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x)|}_{:= s_2^m} \end{aligned}$$

Comme fait précédemment, on a

$$s_1^m \leq \frac{\pi}{ab-1} |l|^\alpha \quad \text{et} \quad s_2^m \leq \frac{2}{a(1-a)} |l|^\alpha$$

$$\implies |W_{a,b}(x+l) - W_{a,b}(x)| \leq C |l|^\alpha \quad \forall l \in]-1, 1[$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, montrons que $W_{a,b} \notin C^{\alpha+\varepsilon}(x)$

Raffinement de la preuve de la non-dérivabilité de $W_{a,b}$ en tout point. On considère

$$\begin{aligned} W_{a,b}(x+l) - W_{a,b}(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} a^k \left(\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x) \right) \\ &+ a^m \left(\cos(b^m \pi(x+l)) - \cos(b^m \pi x) \right) + \sum_{m+1}^{+\infty} a^k \left(\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x) \right). \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, montrons que $W_{a,b} \notin C^{\alpha+\varepsilon}(x)$

Raffinement de la preuve de la non-dérivabilité de $W_{a,b}$ en tout point. On considère

$$\begin{aligned} W_{a,b}(x+l) - W_{a,b}(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} a^k \left(\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x) \right) \\ &+ a^m \left(\cos(b^m \pi(x+l)) - \cos(b^m \pi x) \right) + \sum_{m+1}^{+\infty} a^k \left(\cos(b^k \pi(x+l)) - \cos(b^k \pi x) \right). \end{aligned}$$

Les deux sommes peuvent être majorées comme précédemment. En ce qui concerne le terme du milieu, pour une infinité de l (et donc de m), on a

$$a^m |\cos(b^m \pi(x+l)) - \cos(b^m \pi x)| \geq |l|^\alpha |\cos(b^m \pi(x+l)) - \cos(b^m \pi x)| > \frac{|l|^\alpha}{2}.$$

□

Remarques.

- La fonction de Weierstrass a le même exposant de Hölder en chaque point!
 $\implies$ Fonction irrégulière très régulière!!

Remarques.

- La fonction de Weierstrass a le même exposant de Hölder en chaque point!

⇒ Fonction irrégulière très régulière!!

Fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder change radicalement d'un point à l'autre: **fonctions multifractales**. Calcul du spectre multifractal (donne une idée géométrique de la répartition des irrégularités).

Remarques.

- La fonction de Weierstrass a le même exposant de Hölder en chaque point!

⇒ Fonction irrégulière très régulière!!

Fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder change radicalement d'un point à l'autre: **fonctions multifractales**. Calcul du spectre multifractal (donne une idée géométrique de la répartition des irrégularités).

- Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.** Base orthonormée de la forme

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, si $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k} \text{ où } c_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

Remarques.

- La fonction de Weierstrass a le même exposant de Hölder en chaque point!

⇒ Fonction irrégulière très régulière!!

Fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder change radicalement d'un point à l'autre: **fonctions multifractales**. Calcul du spectre multifractal (donne une idée géométrique de la répartition des irrégularités).

- Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.** Base orthonormée de la forme

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, si $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k} \text{ où } c_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

$$\longrightarrow h_f(x) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \inf_k \frac{\log(|c_{j,k}|)}{\log(2^{-j} + |k2^{-j} - x|)} \quad (\text{Jaffard 1991})$$

Remarques.

- La fonction de Weierstrass a le même exposant de Hölder en chaque point!

⇒ Fonction irrégulière très régulière!!

Fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder change radicalement d'un point à l'autre: **fonctions multifractales**. Calcul du spectre multifractal (donne une idée géométrique de la répartition des irrégularités).

- Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.** Base orthonormée de la forme

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, si $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k} \text{ où } c_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

$$\longrightarrow h_f(x) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \inf_k \frac{\log(|c_{j,k}|)}{\log(2^{-j} + |k2^{-j} - x|)} \quad (\text{Jaffard 1991})$$

Avantage: Calcul de $h_f(x)$ plus simple et assez stable numériquement

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal
 - contient des détails à n'importe quelle échelle

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal
 - contient des détails à n'importe quelle échelle
 - possède souvent une certaine auto-similarité

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal
 - contient des détails à n'importe quelle échelle
 - possède souvent une certaine auto-similarité
 - ne peut être décrit par le langage géométrique traditionnel (pas le lieu des points qui vérifient une condition géométrique, ou les solutions d'une équation simple)

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal
 - contient des détails à n'importe quelle échelle
 - possède souvent une certaine auto-similarité
 - ne peut être décrit par le langage géométrique traditionnel (pas le lieu des points qui vérifient une condition géométrique, ou les solutions d'une équation simple)
 - obtenu par une procédure de récurrence simple

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal
 - contient des détails à n'importe quelle échelle
 - possède souvent une certaine auto-similarité
 - ne peut être décrit par le langage géométrique traditionnel (pas le lieu des points qui vérifient une condition géométrique, ou les solutions d'une équation simple)
 - obtenu par une procédure de récurrence simple
 - est "grand" (non-dénombrable) mais en général a une mesure de Lebesgue nulle.
 - la "dimension fractale" de l'ensemble est strictement supérieure à sa dimension topologique.

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal
 - contient des détails à n'importe quelle échelle
 - possède souvent une certaine auto-similarité
 - ne peut être décrit par le langage géométrique traditionnel (pas le lieu des points qui vérifient une condition géométrique, ou les solutions d'une équation simple)
 - obtenu par une procédure de récurrence simple
 - est "grand" (non-dénombrable) mais en général a une mesure de Lebesgue nulle.
 - la "dimension fractale" de l'ensemble est strictement supérieure à sa dimension topologique.
- Les dimensions fractales prennent des valeurs non entières: traduire la manière dont un ensemble fractal occupe l'espace à toutes les échelles.

Une conjecture célèbre

- Le graphe de $W_{a,b}$ est très irrégulier, pas d'échelle d'observation privilégiée.
- Ensemble fractal
 - contient des détails à n'importe quelle échelle
 - possède souvent une certaine auto-similarité
 - ne peut être décrit par le langage géométrique traditionnel (pas le lieu des points qui vérifient une condition géométrique, ou les solutions d'une équation simple)
 - obtenu par une procédure de récurrence simple
 - est "grand" (non-dénombrable) mais en général a une mesure de Lebesgue nulle.
 - la "dimension fractale" de l'ensemble est strictement supérieure à sa dimension topologique.
- Les dimensions fractales prennent des valeurs non entières: traduire la manière dont un ensemble fractal occupe l'espace à toutes les échelles.
- Dimension de Hausdorff et dimension de Minkowski (box-counting).

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$.

Si $\delta > 0$, on dit que $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est un δ -recouvrement de B si

- $\text{diam}(B_j) \leq \delta$ pour tout $j \in \mathbb{N}$
- $B \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$.

Si $\delta > 0$, on dit que $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est un δ -recouvrement de B si

- $\text{diam}(B_j) \leq \delta$ pour tout $j \in \mathbb{N}$
- $B \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$

On pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : (B_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la **mesure de Hausdorff** $\mathcal{H}^s$ par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

- Mesures de Hausdorff: généralisations de la mesure de Lebesgue

$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}_n(B) \text{ où } c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2)}.$$

- Mesures de Hausdorff: généralisations de la mesure de Lebesgue

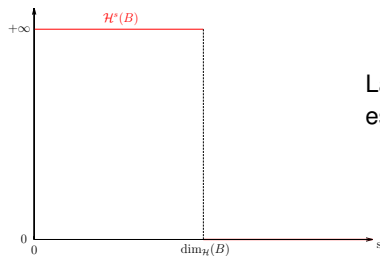
$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}_n(B) \text{ où } c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2)}.$$

- Dimension de Hausdorff: permet de déterminer la mesure de Hausdorff la mieux adaptée à l'ensemble.

- Mesures de Hausdorff: généralisations de la mesure de Lebesgue

$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}_n(B) \text{ où } c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2)}.$$

- Dimension de Hausdorff: permet de déterminer la mesure de Hausdorff la mieux adaptée à l'ensemble.
Il existe une valeur critique pour laquelle le graphe de $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$ “saute” de l’infini à 0.



La **dimension de Hausdorff** $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ de B est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}.$$

Conjecture (Mandelbrot 1977)

La dimension de Hausdorff du graphe de $W_{a,b}$ vaut $2 - \alpha$, où $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$.

Conjecture (Mandelbrot 1977)

La dimension de Hausdorff du graphe de $W_{a,b}$ vaut $2 - \alpha$, où $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$.

Arguments.

- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) \leq 2 - \alpha$

Conjecture (Mandelbrot 1977)

La dimension de Hausdorff du graphe de $W_{a,b}$ vaut $2 - \alpha$, où $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$.

Arguments.

- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) \leq 2 - \alpha$
- $\dim_B \text{Graphe}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$ (Kaplan, Mallet-Paret, Yorke 1984)

Conjecture (Mandelbrot 1977)

La dimension de Hausdorff du graphe de $W_{a,b}$ vaut $2 - \alpha$, où $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$.

Arguments.

- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) \leq 2 - \alpha$
- $\dim_B \text{Graphe}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$ (Kaplan, Mallet-Paret, Yorke 1984)
- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(\widetilde{W}_{a,b}) = 2 - \alpha$ avec une probabilité 1, où $\widetilde{W}_{a,b}$ est la fonction de Weierstrass avec une phase aléatoire uniforme (Hunt 1998)

Conjecture (Mandelbrot 1977)

La dimension de Hausdorff du graphe de $W_{a,b}$ vaut $2 - \alpha$, où $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$.

Arguments.

- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) \leq 2 - \alpha$
- $\dim_B \text{Graphe}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$ (Kaplan, Mallet-Paret, Yorke 1984)
- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(\widetilde{W}_{a,b}) = 2 - \alpha$ avec une probabilité 1, où $\widetilde{W}_{a,b}$ est la fonction de Weierstrass avec une phase aléatoire uniforme (Hunt 1998)
- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$ pour tout entier b "suffisamment grand" (Biacino 2011)

Conjecture (Mandelbrot 1977)

La dimension de Hausdorff du graphe de $W_{a,b}$ vaut $2 - \alpha$, où $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$.

Arguments.

- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) \leq 2 - \alpha$
- $\dim_B \text{Graphe}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$ (Kaplan, Mallet-Paret, Yorke 1984)
- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(\widetilde{W}_{a,b}) = 2 - \alpha$ avec une probabilité 1, où $\widetilde{W}_{a,b}$ est la fonction de Weierstrass avec une phase aléatoire uniforme (Hunt 1998)
- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$ pour tout entier b "suffisamment grand" (Biacino 2011)
- Pour tout entier $b \geq 2$, il existe $\tilde{\lambda}_b < \lambda_b < 1$ tels que

$$\dim_{\mathcal{H}} \text{Graphe}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$$

pour tout $a \in]\lambda_b, 1[$ et pour presque tout $a \in]\tilde{\lambda}_b, 1[$ (Barański, Bárány, Romanowska, 2014)

Références



S. Banach.

Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen.

Studia Math., 3:174–179, 1931.



K. Barański, B. Bárány, and J. Romanowska.

On the dimension of the graph of the classical Weierstrass function.

Adv. Math., 265:32–59, 2014.



L. Biacino.

On the Hausdorff dimension of the graph of a Weierstrass type function.

Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 4:7–17, 2011.



J.P.R. Christensen.

Topology and Borel structure.

North Holland, Amsterdam, 1974.



K. Falconer.

Fractal Geometry: Mathematical Foundation and Applications.

John Wiley & Sons, 1990.



G. Hardy.

Weierstrass's non-differentiable function.

Trans. Amer. Math. Soc., 17:301–325, 1916.



B. R. Hunt.

The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions.

Proc. Amer. Math. Soc., 126(3):791–800, 1998.



B.R. Hunt.

The prevalence of continuous nowhere differentiable functions.

Proc. Amer. Math. Soc., 122(3):711–717, 1994.



B.R. Hunt, T. Sauer, and J.A. Yorke.

Prevalence: a translation-invariant “almost every” on infinite-dimensional spaces.

Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 27(2):217–238, 1992.



S. Jaffard and S. Nicolay.

Pointwise smoothness of space-filling functions.

Appl. Comput. Harmon. Anal., 26:181–199, 2009.



P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñoz-Fernández, and J. B. Seoane-Sepúlveda.

On Weierstrass’s monsters and lineability.

Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 20(4):577–586, 2013.



S. Mazurkiewicz.

Sur les fonctions non dérivables.

Studia Math., 3:92–94, 1931.



Johan Thim.

Continuous Nowhere Differentiable Functions.

Master’s thesis, Lulea University of Technology, 2003.