Autour du Théorème de Jordan

Julie Distexhe

Université libre de Bruxelles

3 août 2015

Le Théorème de Jordan

Camille Jordan (1838-1922) est un mathématicien français. Il a notamment enseigné l'analyse à l'École Polytechnique de Paris.

Le Théorème de Jordan

Camille Jordan (1838-1922) est un mathématicien français. Il a notamment enseigné l'analyse à l'École Polytechnique de Paris.

En 1887, dans son *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, il tente de prouver que

> *"Toute courbe continue fermée sans point multiple divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure"*

Le Théorème de Jordan

Définition

Une *courbe de Jordan* est l'image d'une courbe fermée qui est continue et injective.

Le Théorème de Jordan

Définition

Une *courbe de Jordan* est l'image d'une courbe fermée qui est continue et injective.

Théorème

Le complémentaire d'une courbe de Jordan dans $\mathbb{R}^2$ *est formé de deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non.*

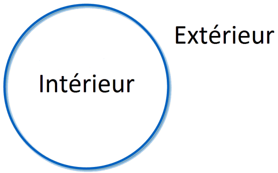
Le Théorème de Jordan

Définition

Une *courbe de Jordan* est l'image d'une courbe fermée qui est continue et injective.

Théorème

Le complémentaire d'une courbe de Jordan dans $\mathbb{R}^2$ *est formé de deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non.*



Historique

- Un énoncé très simple a priori, longtemps considéré comme une évidence

Historique

- Un énoncé très simple a priori, longtemps considéré comme une évidence
- Au début du 19ème siècle, **Bolzano** y voit un vrai problème mathématique et tente des démonstrations

Historique

- Un énoncé très simple a priori, longtemps considéré comme une évidence
- Au début du 19ème siècle, **Bolzano** y voit un vrai problème mathématique et tente des démonstrations
- En 1887, **Jordan** rédige une première démonstration (partielle) du résultat

Historique

- Un énoncé très simple a priori, longtemps considéré comme une évidence
- Au début du 19ème siècle, **Bolzano** y voit un vrai problème mathématique et tente des démonstrations
- En 1887, **Jordan** rédige une première démonstration (partielle) du résultat
- La preuve de Jordan est largement critiquée, jugée incomplète et peu rigoureuse par de nombreux mathématiciens

"Jordan's explicit formulation of the fundamental theorem that a simple closed curve lying wholly in a plane decomposes the plane into an inside and an outside region is justly regarded as a most important step in the direction of a perfectly rigorous mathematics. This may be confidently asserted whether we believe that perfect rigor is attainable or not. His proof, however, is unsatisfactory to many mathematicians. It assumes the theorem without proof in the important special case of a simple polygon and of the argument from that point on, one must admit at least that all details are not given."

O. Veblen, 1904

"The proof given by Jordan was neither short nor simple, and the surprise was even greater when it turned out that Jordan's proof was invalid and that considerable effort was necessary to fill the gaps in his reasoning. The first rigorous proofs of the theorem were quite complicated and hard to understand, even for many well-trained mathematicians."

R. Courant, H. Robbins, 1941

Preuves et applications

- Aujourd'hui, il existe plusieurs preuves complètes reprenant les idées de Jordan et la preuve originale est considérée comme "essentiellement valable"

Preuves et applications

- Aujourd'hui, il existe plusieurs preuves complètes reprenant les idées de Jordan et la preuve originale est considérée comme "essentiellement valable"
- De nombreuses preuves alternatives ont été rédigées. Toutes font appel à des outils mathématiques non triviaux !

Preuves et applications

- Aujourd'hui, il existe plusieurs preuves complètes reprenant les idées de Jordan et la preuve originale est considérée comme "essentiellement valable"
- De nombreuses preuves alternatives ont été rédigées. Toutes font appel à des outils mathématiques non triviaux !
- C'est un résultat essentiel (topologie, analyse complexe, théorie des graphes...)

Régularité

Remarque : Aucune hypothèse de régularité n'est nécessaire !

Régularité

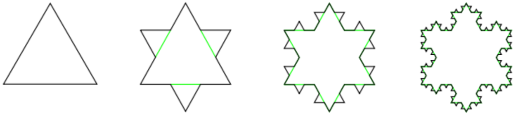
Remarque : Aucune hypothèse de régularité n'est nécessaire !

Le théorème est donc valide en particulier pour les courbes continues partout non dérivables.

Régularité

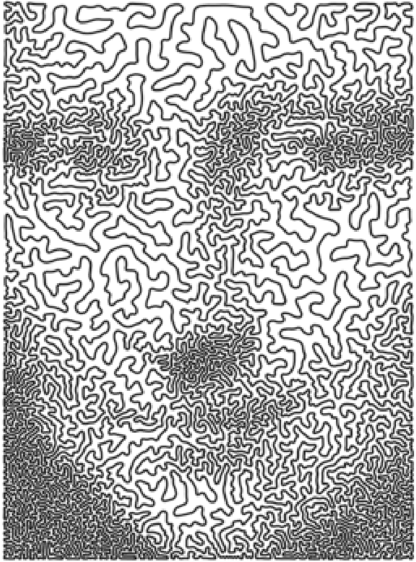
Remarque : Aucune hypothèse de régularité n'est nécessaire !

Le théorème est donc valide en particulier pour les courbes continues partout non dérivables.

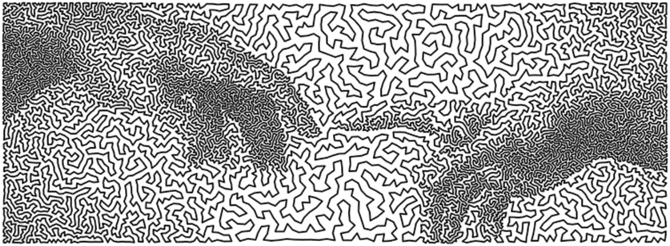


Quelques courbes de Jordan

Quelques courbes de Jordan



Quelques courbes de Jordan



Digression : le TSP-art

Le **TSP-art** est un algorithme qui permet de convertir une image en une courbe de Jordan.

Digression : le TSP-art

Le **TSP-art** est un algorithme qui permet de convertir une image en une courbe de Jordan.

Première étape : le "stippling"

L'image est remplacée par un nuage de points. La répartition des points est liée aux niveaux de gris de l'image.

Digression : le TSP-art

Deuxième étape : le problème du voyageur de commerce (TSP)

Le but est de construire un chemin de longueur totale minimale qui passe exactement une fois par chaque point et revient à son point de départ.

Digression : le TSP-art

Deuxième étape : le problème du voyageur de commerce (TSP)

Le but est de construire un chemin de longueur totale minimale qui passe exactement une fois par chaque point et revient à son point de départ.

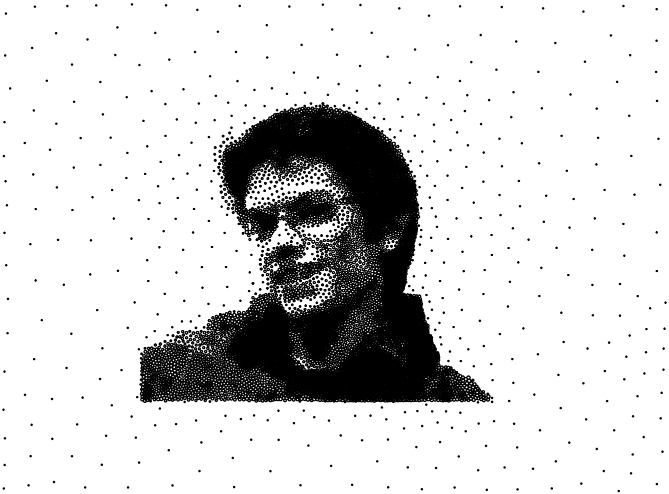
"Longueur totale minimale" : permet d'éviter le croisement des arêtes

Le TSP-art

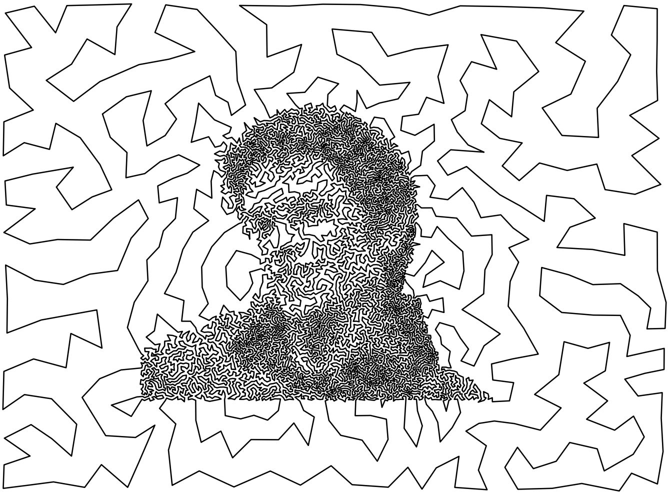
Le TSP-art

Le TSP-art

Le TSP-art



Le TSP-art



Un peu de topologie

Un peu de topologie

Définition

Deux espaces X et Y sont *homéomorphes* s'il existe une bijection continue $f : X \to Y$ dont l'inverse est continu.

Un peu de topologie

Définition

Deux espaces X et Y sont *homéomorphes* s'il existe une bijection continue $f : X \to Y$ dont l'inverse est continu.

L'homéomorphisme traduit l'idée intuitive de déformation continue entre deux espaces, sans "faire de trou".

Un peu de topologie

Définition

Deux espaces X et Y sont *homéomorphes* s'il existe une bijection continue $f : X \to Y$ dont l'inverse est continu.

L'homéomorphisme traduit l'idée intuitive de déformation continue entre deux espaces, sans "faire de trou".

Définition

Une *courbe de Jordan* dans $\mathbb{R}^2$ est une courbe qui est homéomorphe au cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Un peu de topologie

Un peu de topologie

Définition

Un espace X est *simplement connexe* si tout lacet continu dans X est contractible en un point.

Un peu de topologie

Définition

Un espace X est *simplement connexe* si tout lacet continu dans X est contractible en un point.

Intuitivement, un espace est simplement connexe s'il n'admet "aucun trou".

Un peu de topologie

Définition

Un espace X est *simplement connexe* si tout lacet continu dans X est contractible en un point.

Intuitivement, un espace est simplement connexe s'il n'admet "aucun trou".

Propriété

Si X et Y sont homéomorphes et si X est simplement connexe, alors Y l'est aussi.

Reformulation du Théorème de Jordan

Théorème

Dans $\mathbb{R}^2$, le complémentaire d'une courbe Σ homéomorphe à S^1 est formé de deux composantes connexes, dont l'une est bornée et l'autre non.

Questions

- L'extérieur de Σ a-t-il la même nature topologique que l'extérieur de S^1 ?

Questions

- L'extérieur de Σ a-t-il la même nature topologique que l'extérieur de S^1 ?
- De manière générale, si deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes, leurs complémentaires sont-ils homéomorphes ?

Le Théorème de Jordan–Schoenflies

Questions

- L'extérieur de Σ a-t-il la même nature topologique que l'extérieur de S^1 ?
- De manière générale, si deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes, leurs complémentaires sont-ils homéomorphes ?

Théorème (Schoenflies, 1906)

Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ est homéomorphe à S^1, il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui applique Σ sur S^1.

Le Théorème de Jordan–Brouwer

Le Théorème de Jordan se généralise en dimension supérieure à 2 sans aucune hypothèse supplémentaire.

Le Théorème de Jordan–Brouwer

Le Théorème de Jordan se généralise en dimension supérieure à 2 sans aucune hypothèse supplémentaire.

Théorème (Brouwer, 1912)

Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *est homéomorphe à* S^{n-1}*, alors* $\mathbb{R}^n \backslash \Sigma$ *est formé de deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non.*

Le Théorème de Jordan–Brouwer

Le Théorème de Jordan se généralise en dimension supérieure à 2 sans aucune hypothèse supplémentaire.

Théorème (Brouwer, 1912)

Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *est homéomorphe à* S^{n-1}*, alors* $\mathbb{R}^n \backslash \Sigma$ *est formé de deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non.*

Remarque

Le résultat est vrai de manière plus générale pour des hypersurfaces compactes et connexes de $\mathbb{R}^n$.

Question

Existe-t-il un analogue du Théorème de Jordan–Schoenflies en dimension $n \geq 3$? Autrement dit, si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à S^{n-1}, les extérieurs de Σ et S^{n-1} sont-ils homéomorphes ?

Question

Existe-t-il un analogue du Théorème de Jordan–Schoenflies en dimension $n \geq 3$? Autrement dit, si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à S^{n-1}, les extérieurs de Σ et S^{n-1} sont-ils homéomorphes ?

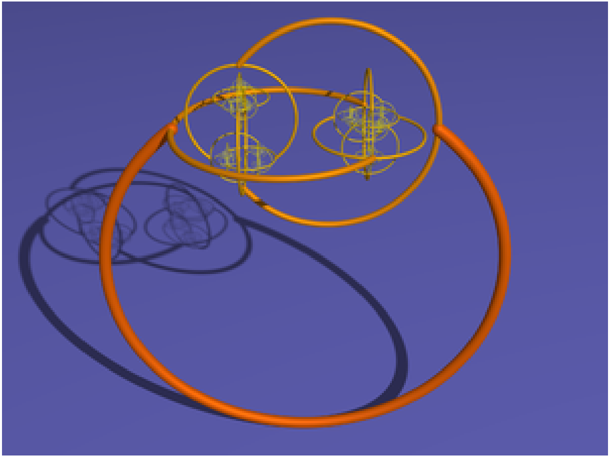
- La réponse est non si l'on n'ajoute aucune hypothèse

Question

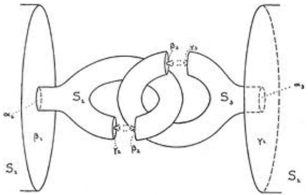
Existe-t-il un analogue du Théorème de Jordan–Schoenflies en dimension $n \geq 3$? Autrement dit, si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à S^{n-1}, les extérieurs de Σ et S^{n-1} sont-ils homéomorphes ?

- La réponse est non si l'on n'ajoute aucune hypothèse
- En 1923, le topologue **Alexander** décrit une surface homéomorphe à la sphère S^2 dont l'extérieur n'est pas simplement connexe !

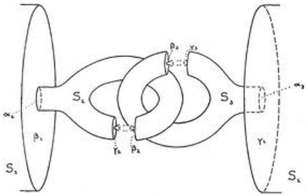
La sphère cornue d'Alexander



La sphère cornue d'Alexander

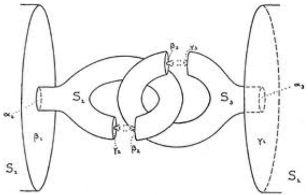


La sphère cornue d'Alexander



- L'extérieur de la sphère cornue d'Alexander n'est pas simplement connexe.

La sphère cornue d'Alexander



- L'extérieur de la sphère cornue d'Alexander n'est pas simplement connexe.
- D'autres sphères cornues peuvent maintenant être imaginées : cornes à l'intérieur, plusieurs paires de cornes . . .

Alexander's Horned Sphere

Bill Parry

The sea was the first to propose it,
anticipating Alexander's thought.
The whited branch which clawed the ocean floor,
the echoing shell, the time-worn stone,
anemone and jell of sea-flower ;
had he seen all this before ?
Did he find inspiration
along this sepulchered beach
or in some anatomy lesson ?
Strands of bladderwrack,
distend to dentritic kelp. He saw
this could go on forever,
each increment a crab's law.
So friend, hand in hand, we must keep close.
For should you stray,
perhaps along that promontory,
there's no going back.
Our lonely paths shall intersect
only by leap synapse.

Alexander's Horned Sphere

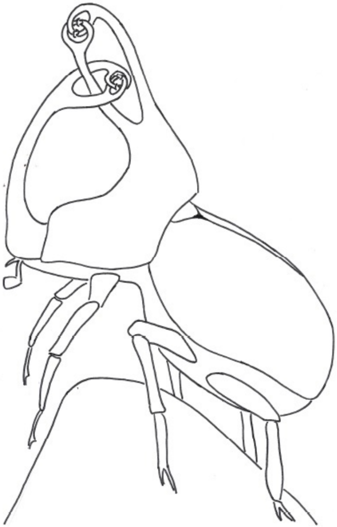
Bill Parry

The sea was the first to propose it,
anticipating Alexander's thought.
The whited branch which clawed the ocean floor,
the echoing shell, the time-worn stone,
anemone and jell of sea-flower;
had he seen all this before?
Did he find inspiration
along this sepulchered beach
or in some anatomy lesson?
Strands of bladderwrack,
distend to dentritic kelp. He saw
this could go on forever,
each increment a crab's law.
So friend, hand in hand, we must keep close.
For should you stray,
perhaps along that promontory,
there's no going back.
Our lonely paths shall intersect
only by leap synapse.

Alexander's Horned Sphere
Bill Parry

The sea was the first to propose it,
anticipating Alexander's thought.
The whited branch which clawed the ocean floor,
the echoing shell, the time-worn stone,
anemone and jell of sea-flower;
had he seen all this before?
Did he find inspiration
along this sepulchered beach
or in some anatomy lesson?
Strands of bladderwrack,
distend to dentritic kelp. He saw
this could go on forever,
each increment a crab's law.
So friend, hand in hand, we must keep close.
For should you stray,
perhaps along that promontory,
there's no going back.
Our lonely paths shall intersect
only by leap synapse.

Le scarabée cornu



Digression

James Waddell Alexander (1888-1971) est un mathématicien américain, considéré comme un des pionniers de la topologie algébrique.

Digression

James Waddell Alexander (1888-1971) est un mathématicien américain, considéré comme un des pionniers de la topologie algébrique.

Il est également un grimpeur et alpiniste réputé.

Digression

James Waddell Alexander (1888-1971) est un mathématicien américain, considéré comme un des pionniers de la topologie algébrique.

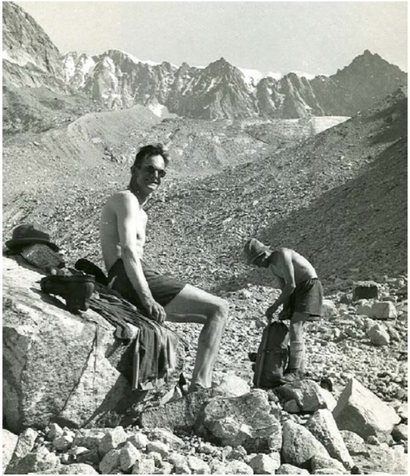
Il est également un grimpeur et alpiniste réputé.

"Around Princeton Alexander was also celebrated for his prowess in climbing the university buildings, such as the Cleveland Tower. He liked to reach his office on the top floor of Fine Hall by climbing up the outside wall of the building and entering through the window, which he always left ajar for this reason."

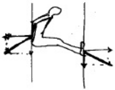
I.M. James, 2001

Digression

Digression



Digression



en faisant un effort comme s'il voulait écarter les deux parois : il exerce sur les deux parois deux forces opposées, on dit qu'il fait ~~Plus cet effort~~ [illegible] une opposition. Il répartit son poids sur ces deux points d'appui. On voit que, plus l'opposition est forte, plus faible est l'angle des ~~chaque~~ forces exercées sur chaque appui avec la normale, ici l'horizontale.

Si les parois sont très glissantes, une très forte opposition est nécessaire. Si elles sont rugueuses, l'opposition peut être réduite.

Pour progresser, le grimpeur monte successivement les deux pieds – une seule jambe effectuant alors l'opposition – puis le dos, ayant remplacé le dos par les coudes et les avant-bras.

Voici un deuxième exemple : l'escalade d'une fissure selon la méthode dite « à la Dülfer »

Les mains et les pieds exercent ici les efforts opposés qui permettent d'adhérer.

Ce procédé d'escalade est rapide, mais très fatigant. Si l'on peut coincer les souliers et les bras, cela vaut mieux.

Le collier d'Antoine

Le collier d'Antoine

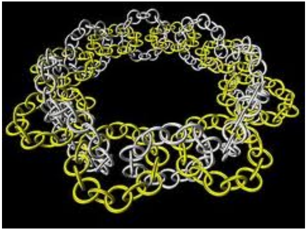
- On commence avec une copie du tore plein T_0

Le collier d'Antoine

- On commence avec une copie du tore plein T_0
- À chaque étape, une chaîne de n tores entrelacés est plongée dans tout tore de l'étape précédente.

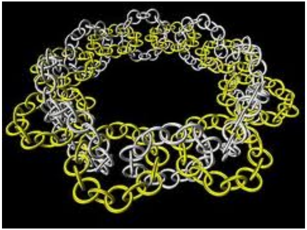
Le collier d'Antoine

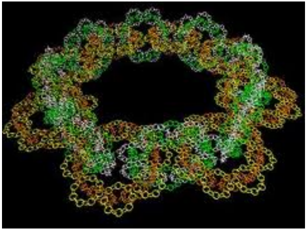
- On commence avec une copie du tore plein T_0
- À chaque étape, une chaîne de n tores entrelacés est plongée dans tout tore de l'étape précédente.



Le collier d'Antoine

- On commence avec une copie du tore plein T_0
- À chaque étape, une chaîne de n tores entrelacés est plongée dans tout tore de l'étape précédente.





Le collier d'Antoine

À l'étape i, on a une collection $T_i = T_{i,1} \cup T_{i,2} \cup \cdots \cup T_{i,n^i}$.

Le collier d'Antoine

À l'étape i, on a une collection $T_i = T_{i,1} \cup T_{i,2} \cup \cdots \cup T_{i,n^i}$.
Le *collier d'Antoine* est défini par

$$A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} T_i.$$

Le collier d'Antoine

À l'étape i, on a une collection $T_i = T_{i,1} \cup T_{i,2} \cup \cdots \cup T_{i,n^i}$.
Le *collier d'Antoine* est défini par

$$A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} T_i.$$

- C'est un ensemble totalement discontinu, c'est-à-dire que ses seules parties connexes sont des singletons.

Le collier d'Antoine

À l'étape i, on a une collection $T_i = T_{i,1} \cup T_{i,2} \cup \cdots \cup T_{i,n^i}$.
Le *collier d'Antoine* est défini par

$$A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} T_i.$$

- C'est un ensemble totalement discontinu, c'est-à-dire que ses seules parties connexes sont des singletons.
- Mais son complémentaire n'est pas simplement connexe !

Le collier d'Antoine

À l'étape i, on a une collection $T_i = T_{i,1} \cup T_{i,2} \cup \cdots \cup T_{i,n^i}$.
Le *collier d'Antoine* est défini par

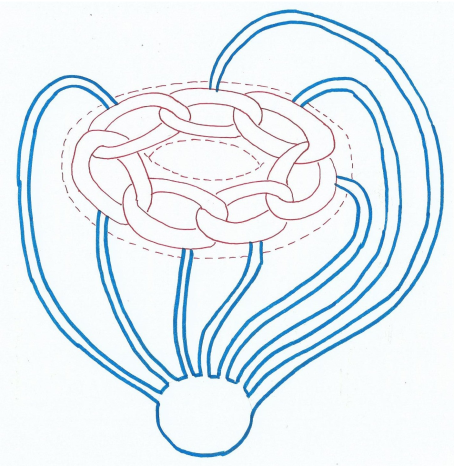
$$A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} T_i.$$

- C'est un ensemble totalement discontinu, c'est-à-dire que ses seules parties connexes sont des singletons.
- Mais son complémentaire n'est pas simplement connexe !

Remarque

Deux colliers d'Antoine A_n et A_m avec $n \neq m$ ne sont pas équivalents.

La sphère cornue d'Antoine



En résumé...

En résumé...

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est homéomorphe à S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont homéomorphes ?

En résumé...

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est homéomorphe à S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont homéomorphes ?

- OUI si $n = 2$ (Théorème de Jordan-Schoenflies)

En résumé...

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est homéomorphe à S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont homéomorphes ?

- OUI si $n = 2$ (Théorème de Jordan-Schoenflies)
- NON si $n = 3$ (sphères cornues)

En résumé...

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est homéomorphe à S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont homéomorphes ?

- OUI si $n = 2$ (Théorème de Jordan-Schoenflies)
- NON si $n = 3$ (sphères cornues)
- NON si $n \geq 4$

Dans la catégorie C^∞

Dans la catégorie C^∞

Une sphère cornue n'admet pas de structure différentiable

Dans la catégorie C^∞

Une sphère cornue n'admet pas de structure différentiable

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est une variété C^∞ de qui est difféomorphe à la sphère S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont difféomorphes ?

Dans la catégorie C^∞

Une sphère cornue n'admet pas de structure différentiable

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est une variété C^∞ de qui est difféomorphe à la sphère S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont difféomorphes ?

- OUI pour $n = 2$ (Schoenflies)

Dans la catégorie C^∞

Une sphère cornue n'admet pas de structure différentiable

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est une variété C^∞ de qui est difféomorphe à la sphère S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont difféomorphes ?

- OUI pour $n = 2$ (Schoenflies)
- OUI pour $n = 3$ (Alexander)

Dans la catégorie C^∞

Une sphère cornue n'admet pas de structure différentiable

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est une variété C^∞ de qui est difféomorphe à la sphère S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont difféomorphes ?

- OUI pour $n = 2$ (Schoenflies)
- OUI pour $n = 3$ (Alexander)
- OUI pour $n \geq 5$ (Brown, Mazur–Morse)

Dans la catégorie C^∞

Une sphère cornue n'admet pas de structure différentiable

Question

Dans $\mathbb{R}^n$, si M est une variété C^∞ de qui est difféomorphe à la sphère S^{n-1}, est-il vrai que les extérieurs de M et S^{n-1} sont difféomorphes ?

- OUI pour $n = 2$ (Schoenflies)
- OUI pour $n = 3$ (Alexander)
- OUI pour $n \geq 5$ (Brown, Mazur–Morse)
- Pour $n = 4$, c'est un problème ouvert...