De Poincaré à Perelman: une promenade topologique à travers le 20ème siècle.

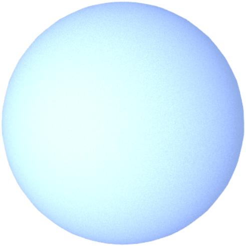
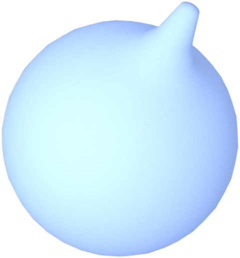
Julien Meyer et Patrick Weber

Université Libre de Bruxelles

4 août 2014

Géométrie

Topologie	:	Science du caoutchouc
Géométrie	:	**Métrique** comme structure supplémentaire sur la variété

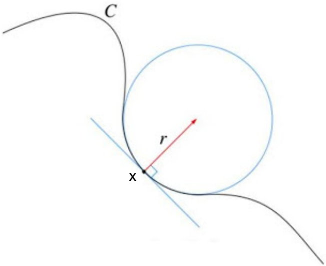



topologiquement équivalentes
géométriquement non équivalentes

Notations

variété	variété topologique fermée et orientable
surface	variété de dimension 2
simplement connexe	$\pi_1 = 1$
équivalent	topologiquement équivalent

Courbure d'une courbe



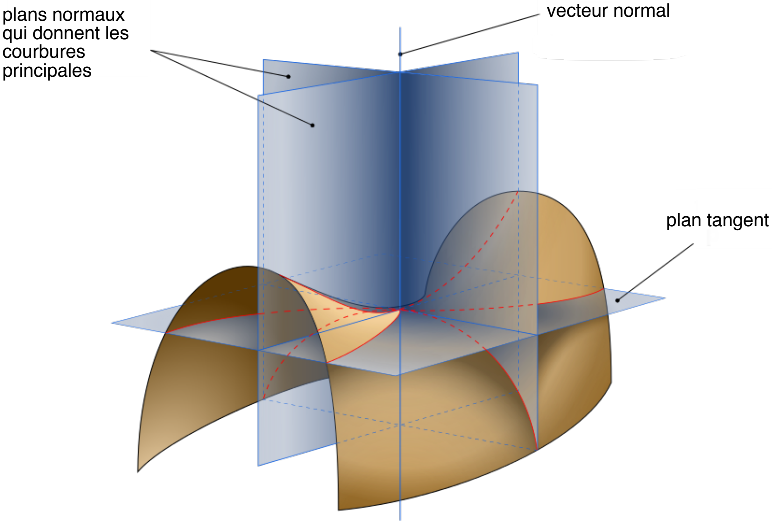
Courbure d'une courbe plane en un point x :

$$k(x) = \pm\frac{1}{r}$$

r : rayon du cercle osculateur.

- cercle : $k(x) = \frac{1}{r}$ où r est le rayon du cercle.
- droite : $k(x) = 0$.
- sinusoïde : $k(x)$ oscille entre $+1$ et -1.

Courbure d'une surface



Courbure de Gauss

Définition

La courbure de Gauss d'une surface en un point x est

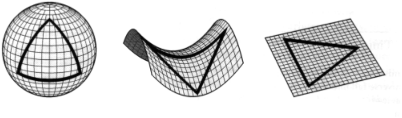
$$K(x) = k_{max}(x) \cdot k_{min}(x)$$

où k_{max} et k_{min} désignent les courbures principales.

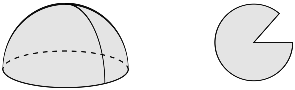
- sphère ronde : $K(x) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}$ où r est le rayon de la sphère.
- plan : $K(x) = 0$.
- selle de cheval : $K(x) < 0$.

Quelques propriétés

	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
Exemples	selle de cheval	plan euclidien	sphère ronde
Somme des angles d'un triangle	$< 180^\circ$	$= 180^\circ$	$> 180^\circ$
Aire d'un disque de rayon r	$> \pi r^2$	$= \pi r^2$	$< \pi r^2$



Trois triangles



Le problème du couturier

La **courbure de Gauss** K en un point d'une surface mesure la différence d'aire entre

- un disque infinitésimal (centré en ce point) sur la surface et
- un disque infinitésimal dans le plan euclidien.

Plus précisément, l'aire d'un petit disque de rayon r centré en x vaut :

$$\pi r^2 - \frac{K(x)}{12}\pi r^4 + o(r^4)$$

La **courbure scalaire** R en un point d'une variété de dimension quelconque mesure la différence de volume entre

- une boule infinitésimale (centrée en ce point) sur la variété et
- une boule infinitésimale dans l'espace euclidien.

Courbure de Ricci

Intuitivement : Version directionelle de la courbure scalaire

Aire d'un petit secteur d'angle θ et de rayon r (centré en x) dans la direction v :

$$\frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{Ric_x(v,v)}{24}\theta r^4 + o(\theta r^4)$$

Sur une surface la courbure de Ricci et la courbure scalaire sont reliées par

$$Ric = \frac{1}{2} R g$$

où g désigne la métrique.

Résumé

- Courbure scalaire positive : volume d'une boule plus petit que dans l'espace euclidien.
- Courbure de Ricci positive : volume d'un secteur plus petit que dans l'espace euclidien.
- Courbure de Ricci, courbure scalaire et courbure de Gauss reliées pour des surfaces par

$$Ric = \frac{1}{2} Rg = Kg.$$

Pourquoi parler de géométrie ?

Dans certains bons cas, des informations sur la courbure (courbure constante, positive,. . .) peuvent donnent des informations sur la topologie.

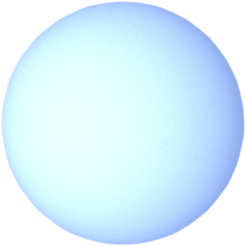
Exemple-type : Théorème de Gauss–Bonnet

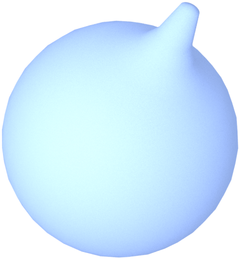
Soit S une surface fermée et orientable de dimension 2 et notons par K la courbure de Gauss. Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_S K(x) = 2 - 2g$$

où g est le genre de la surface.

Miracle : membre gauche dépend de la géométrie, alors que membre droit est purement topologique !



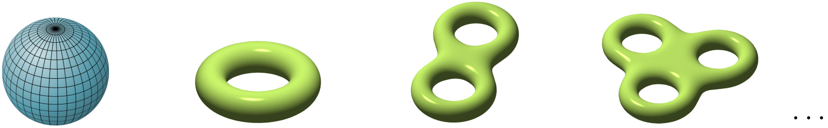


Même si la courbure peut varier,
l'intégrale sur la courbure reste constante.

Courbure constante

Soit S une surface avec courbure de Gauss K **constante**.

- Si $K > 0$ alors S est équivalente à la sphère S^2.
- Si $K = 0$ alors S est équivalente au tore T^2.
- Si $K < 0$ alors S est équivalente à un tore de genre ≥ 2.



$K > 0$ $K = 0$ $K < 0$ $K < 0$

Courbure positive

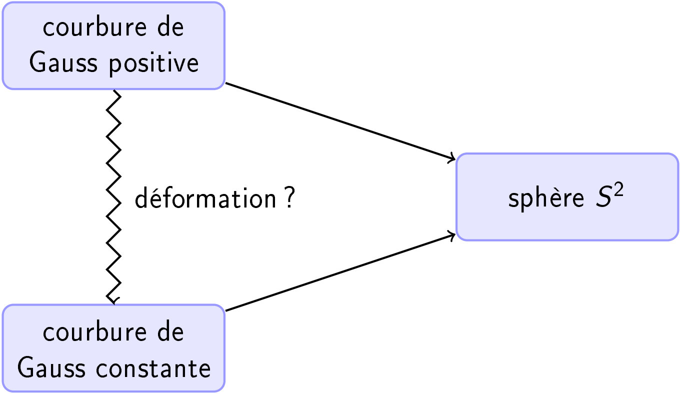
Cas un peu plus difficile :

métrique avec courbure de Gauss positive mais pas forcément constante.

Si une surface est munie d'une métrique à courbure de Gauss **positive**, alors elle est équivalente à la sphère S^2.

Même conclusion en partant d'hypothèses plus faibles !

$$\boxed{\text{courbure positive}} \overset{?}{\rightsquigarrow} \boxed{\text{courbure constante}}$$


courbure de
Gauss positive
déformation ?
sphère S^2
courbure de
Gauss constante

Plan de bataille

Soit une surface avec une métrique initiale donnée. Pour voir si la surface est équivalente à une sphère on procède en 2 étapes :

- Déformer la métrique initiale en une métrique à courbure de Gauss constante.
- Appliquer un résultat de nature "Géométrie–Topologie" (du genre Gauss–Bonnet) à cette métrique à courbure constante pour déterminer la topologie de la surface.

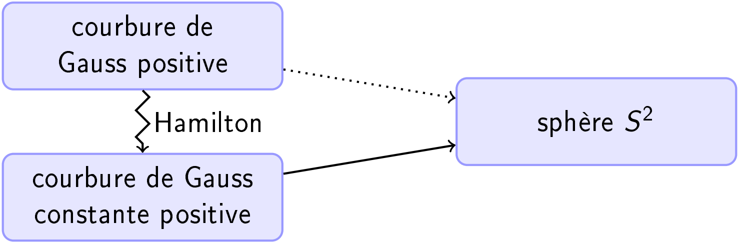
Richard Hamilton

Idée géniale de Richard Hamilton : **flot de Ricci**

Équation d'évolution qui essaye d'homogénéiser la métrique afin d'arriver à une métrique à courbure constante.

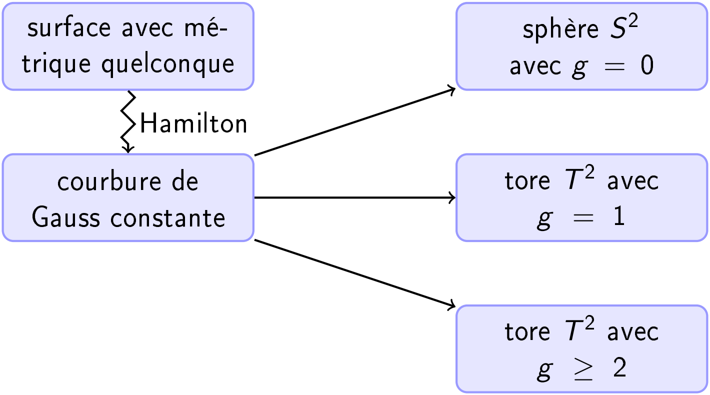
Un premier resultat d'Hamilton

Soit une surface avec une métrique à courbure de Gauss positive. Alors le flot de Ricci fait évoluer cette métrique vers une métrique à courbure de Gauss constante positive. Par conséquent, la surface est équivalente à la sphère S^2.



Théorème d'uniformisation (Hamilton et Andrews–Bryan)

Soit une surface avec une métrique. Alors le flot de Ricci fait évoluer cette métrique vers une métrique à courbure de Gauss constante.



Flot de Ricci

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric_g$$

Courbure scalaire

Équation d'évolution pour la courbure scalaire

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \underbrace{\Delta R}_{1} + \underbrace{R(R-r)}_{2}$$

1. Diffusion : favorise une homogénéisation de la métrique
2. Réaction : favorise une explosion de la courbure

Côté positif	:	Sorte d'équation de la chaleur pour la courbure scalaire
Côté négatif	:	Risque de singularités à cause du terme de réaction

Exemple d'évolution du flot de Ricci

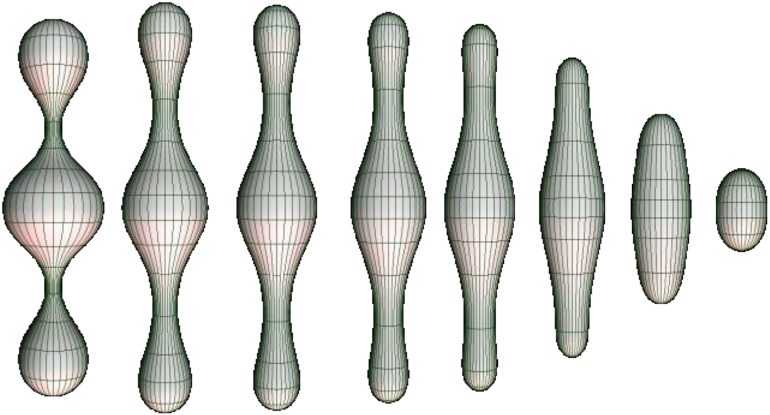


Image prise de Wikipedia (Ricci flow)

Théorème d'uniformisation (par flot de Ricci)

Considérons une surface avec métrique initiale g_0. Alors le flot de Ricci normalisé

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -(R - r)g$$

a les propriétes suivantes :

- Existence court terme : flot existe pour $t \in [0, \epsilon[$.
- Unicité : si le flot existe, il est unique.
- Existence long terme : flot existe jusque $t \to \infty$.
- Convergence : si $t \to \infty$, la métrique converge uniformément vers une métrique lisse g_∞ de courbure constante.

Existence long terme pour surfaces

Existence long terme

S'il n'y a pas d'explosion de la courbure scalaire en temps fini, alors le flot de Ricci normalisé va exister jusque $t \to \infty$.

- **But** : Trouver des bornes (uniformes) pour la courbure scalaire.
- **Outil** : Principe du maximum.

Borne inférieure

Principe du maximum appliqué à l'équation d'évolution de la courbure scalaire.

Borne supérieure

Principe du maximum appliqué à des quantités monotones (potentiel, largeur, entropie, volume réduit, ...).

Et en dimension 3 ?

Affirmation : Il existe un résultat Géométrie–Topologie pour métriques à courbure de Ricci constante :

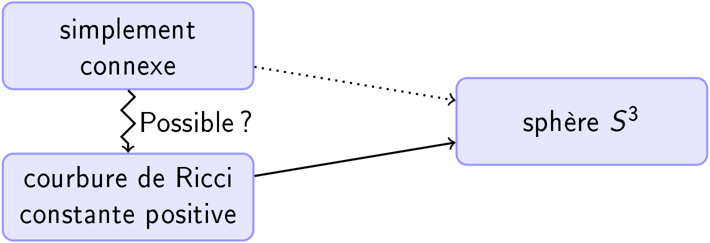
Théorème de Hopf (1926)

Soit M une variété de dimension 3 avec une métrique à courbure de Ricci constante positive. Alors M est équivalente à la sphère S^3.

$\Rightarrow$ Possibilité de reformuler la conjecture de Poincaré en tant que problème de géométrie !

Conjecture de Poincaré (version géométrique)

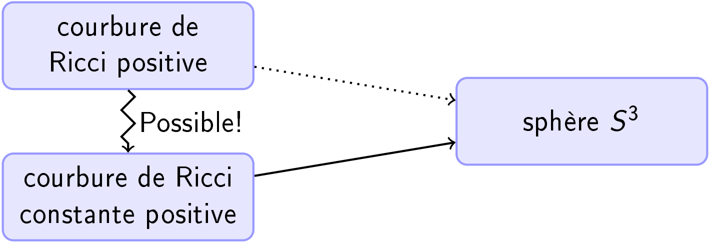
Soit une variété **simplement connexe** de dimension 3 avec métrique initiale quelconque g_0. Est-ce que le flot de Ricci déforme la métrique g_0 en une métrique g, qui elle a courbure de Ricci **constante positive** ?



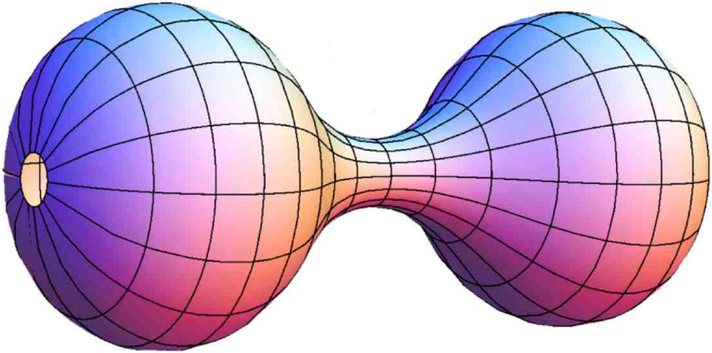
Version plus facile établie par Hamilton :

Théorème d'Hamilton (1982)

Soit une variété de dimension 3 avec une métrique g_0 à courbure de Ricci positive. Alors le flot de Ricci va déformer la métrique g_0 en une métrique g, qui elle a courbure de Ricci **constante positive**.

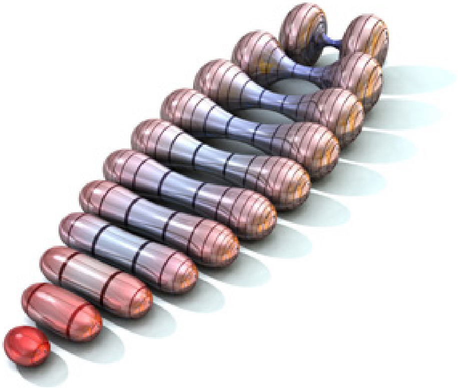


Problèmes en dimension 3



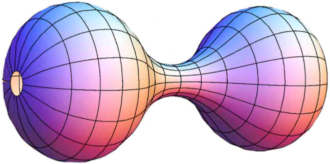
L'exemple de l'haltère

Rappel : pas de problème en dimension 2

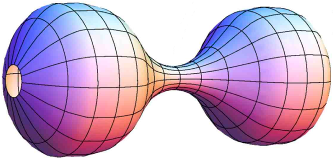


Cover du "Science" magazine, Décembre 2006

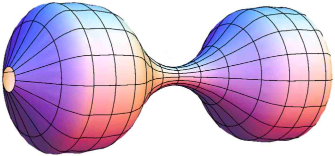
Neck pinching en dimension 3



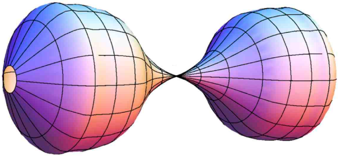
Étape 1



Étape 2



Étape 3



Étape 4

Grigori Perelman

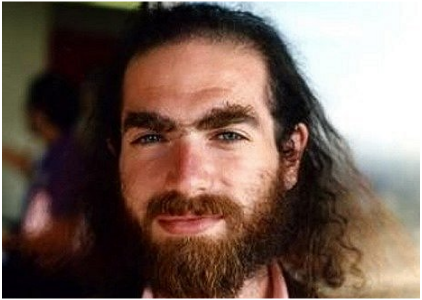


Photo prise à Oberwolfach en 1993

Mérites de Perelman :

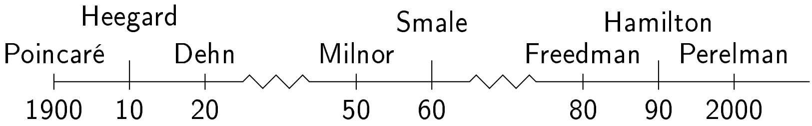
- Quantités monotones (entropie, volume réduit, . . .)
- Analyse des singularités
- Flot avec chirurgie
- . . .

Résolution de la conjecture de Poincaré

100 ans pour résoudre un problème

Conjecture de Poincaré = Théorème de Perelman

Soit M une variété fermée orientable de dimension 3. Si M est simplement connexe, alors M est topologiquement équivalente à la sphère S^3.



I know how to control the Universe. Why would I run to get a million, tell me ?

Grigori Perelman

Merci pour votre attention !