Modèles de volatilité en finance

Harry Vander Elst

ECARES

Solvay Brussels School of Economics and Management

Université libre de Bruxelles

Brussels Summer School of Mathematics

7 Août 2014

Outline

Outline

Motivation : actifs financiers et rendements

- Certaines statistiques sont récurentes en finance
  - La **volatilité**
  - Les **corrélations** entre actifs
- Importance par exemple pour déterminer
  1. La valeur d'un actif – actions, options, obligations,...
  2. Le coût lié la structure du capital d'une entreprise – coût des fonds propres (CAPM)
  3. La politique de couverture face un facteur de risque – devises, matières premières, taux d'intérêts
  4. Choix de vendre ou acheter un actif (mobilier ou immobilier) dans la gestion d'un patrimoine – compromis entre risque et valeur
  5. Respect des réglementations – Basel III, Solvency II, IFRS 9, IAS 39...

Motivation : actifs financiers et rendements

- Certaines statistiques sont récurentes en finance
  - La **volatilité**
  - Les **corrélations** entre actifs
- Importance par exemple pour déterminer
  1. La valeur d'un actif – actions, options, obligations,...
  2. Le coût lié la structure du capital d'une entreprise – coût des fonds propres (CAPM)
  3. La politique de couverture face un facteur de risque – devises, matières premières, taux d'intérêts
  4. Choix de vendre ou acheter un actif (mobilier ou immobilier) dans la gestion d'un patrimoine – compromis entre risque et valeur
  5. Respect des réglementations – Basel III, Solvency II, IFRS 9, IAS 39...

Motivation : actifs financiers et rendements

- P_t – prix d'un actif au temps t
- $R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ – rendement sur la période $[t-1; t]$
- D_t – dividende, l'intérêt payé, rendement d'opportunité ou coût de stockage en t
- Souvent $R_t = \frac{aP_t - aP_{t-1}}{aP_{t-1}}$
  1. D_t n'est pas toujours disponible facilement...
  2. Fractionnement d'actions – 1 actions à 100 $\rightarrow$ 2 actions à 50
- Par facilité : $r_t = \log(\frac{aP_t}{aP_{t-1}}) = \log(1 + R_t) \approx R_t$

Motivation : actifs financiers et rendements

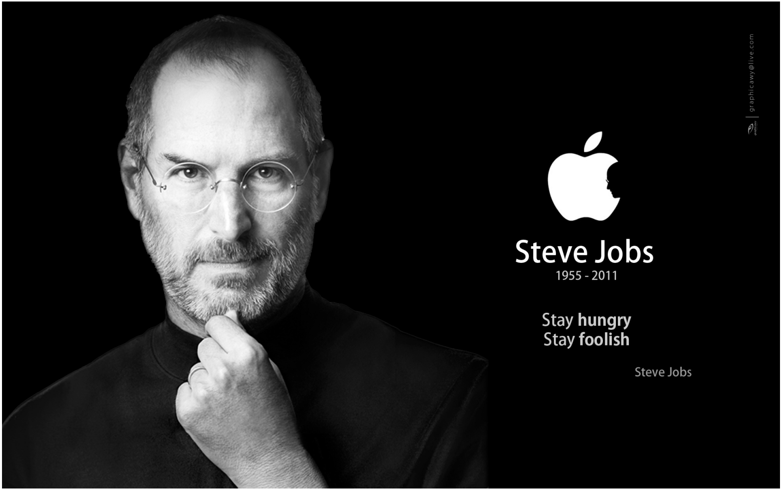
- P_t – prix d'un actif au temps t
- $R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ – rendement sur la période $[t-1; t]$
- D_t – dividende, l'intérêt payé, rendement d'opportunité ou coût de stockage en t
- Souvent $R_t = \frac{aP_t - aP_{t-1}}{aP_{t-1}}$
  1. D_t n'est pas toujours disponible facilement...
  2. Fractionnement d'actions – 1 actions à 100 $\rightarrow$ 2 actions à 50
- Par facilité : $r_t = \log(\frac{aP_t}{aP_{t-1}}) = \log(1 + R_t) \approx R_t$

Outline

Mandelbrot (1963)

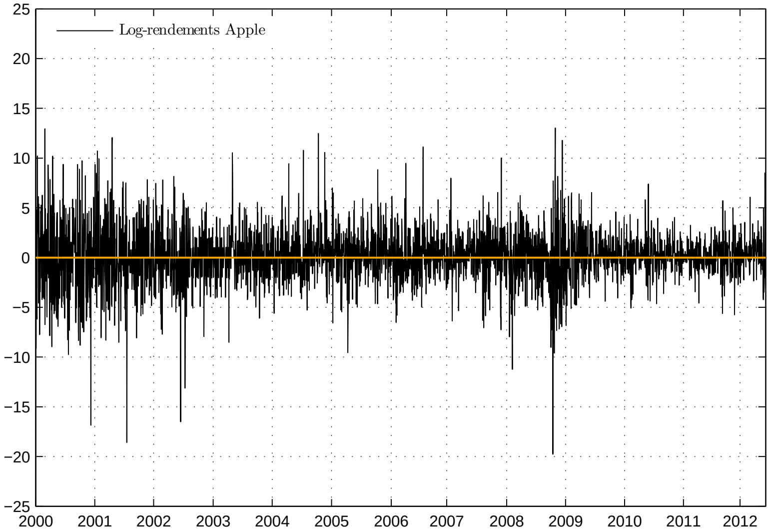
- Des faits stylisés sont des régularités empiriques observées dans les données historiques
- Mandelbrot (1963) observe plusieurs propriétés empiriques apparaissant dans la pluspart des actions aux USA
- Vérifions ces régularité avec une action au hasard

Apple

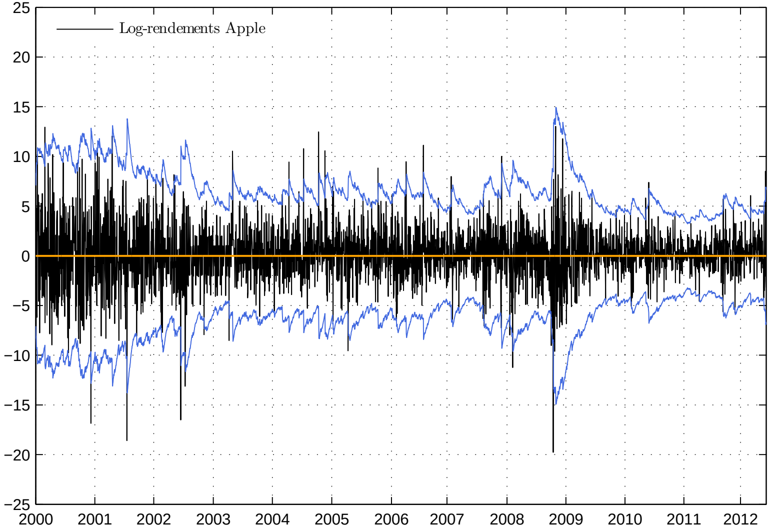


1. Les prix ne sont pas stationnaires

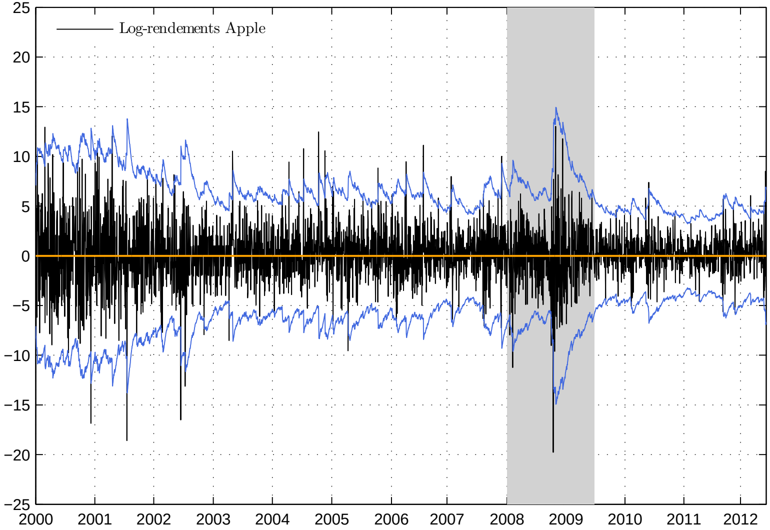
2. Les rendements ont une moyenne stationnaire



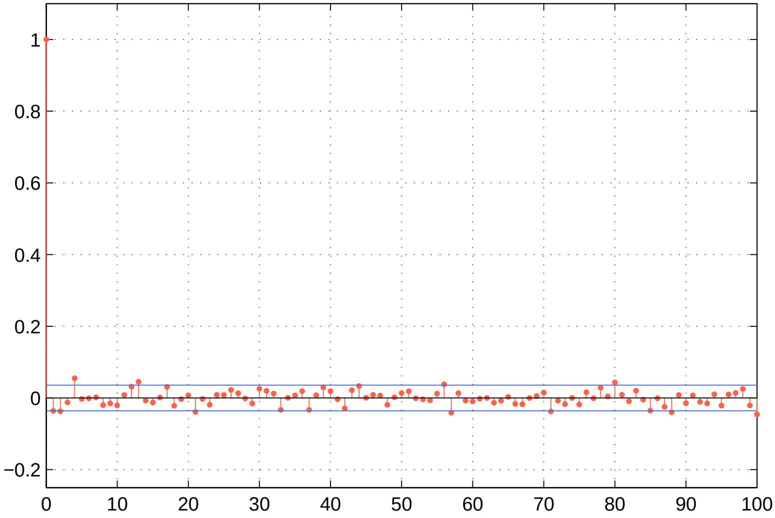
3. La volatilité n'est pas constante – Volatility clustering



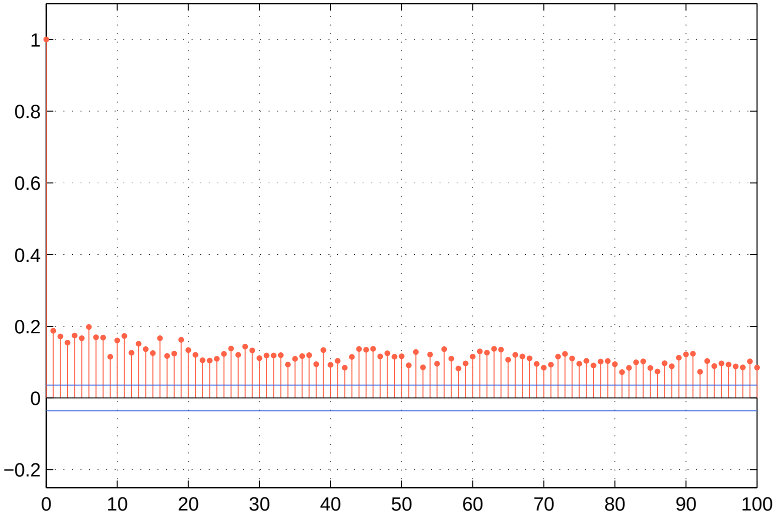
3. La volatilité n'est pas constante – Volatility clustering



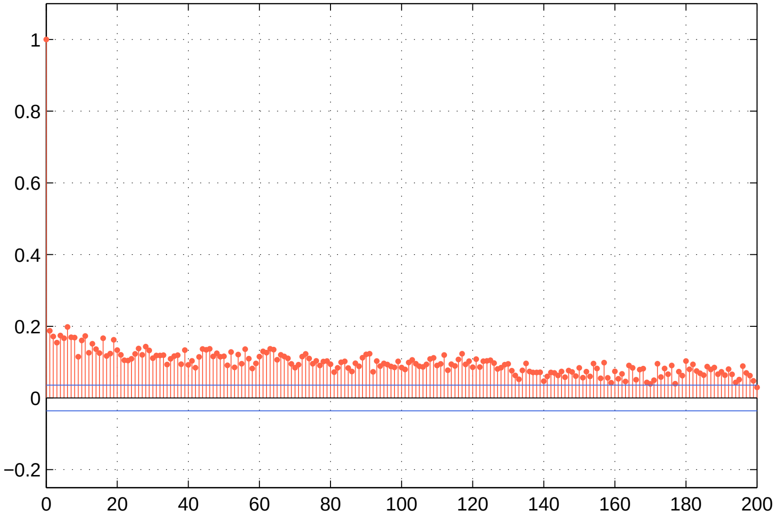
4. Les rendements se comportent comme un bruit blanc



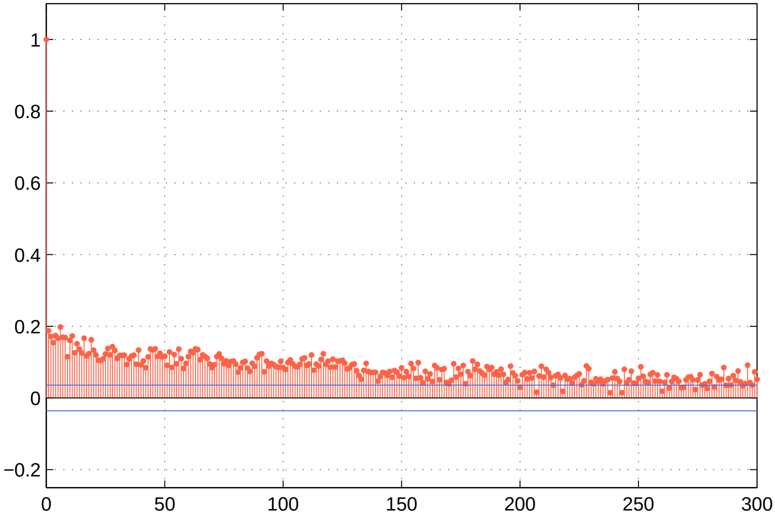
5. Les rendements absolus (carrés) sont positivement autocorrélés



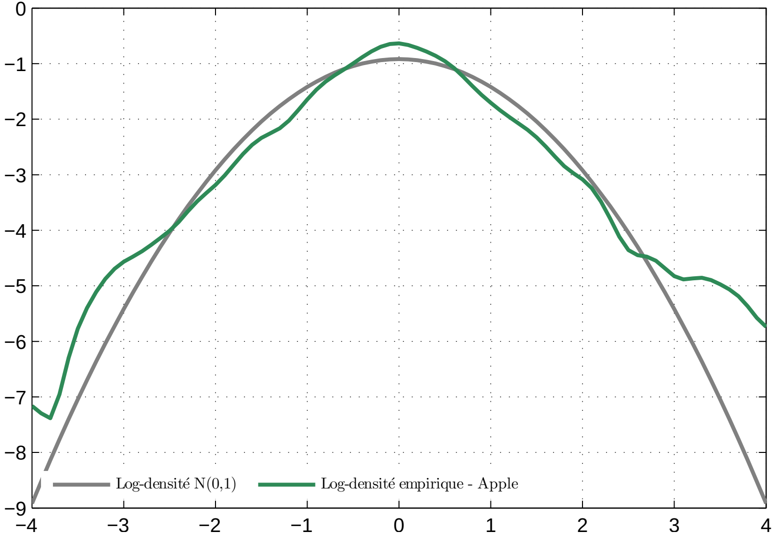
5. Les rendements absolus (carrés) sont **très** autocorrélés



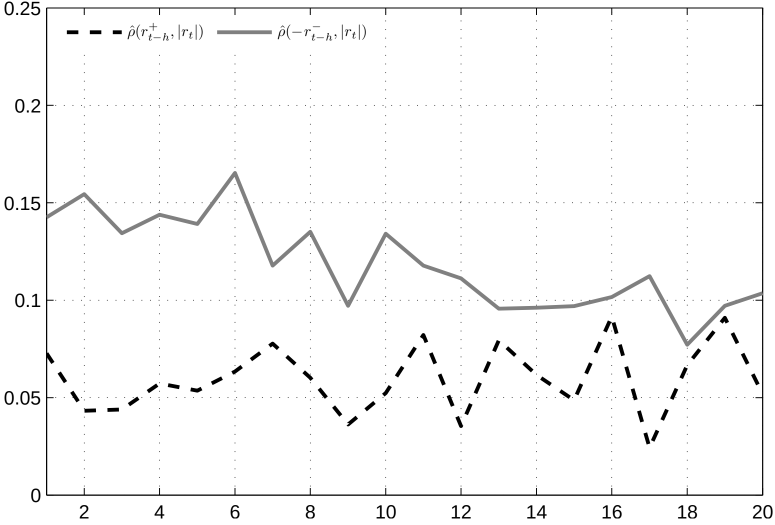
5. Les rendements absolus (carrés) ont une longue mémoire !



6. Les rendements ont une distribution leptokurtique



7. Effets de Leviers



Outline

Formulation générale

Définition

Un modèle conditionnellement hétéroscédastique est défini comme :

$$r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t \tag{1}$$

Où :

- μ est un paramètre constant représentant la moyenne de r_t
- $\epsilon_t \sim i.i.d. D(0, 1)$
- σ_t est $\mathcal{F}_{t-1}$ - mesurable
- $\sigma_t > 0$

r_t est un bruit blanc à variance conditionnellement variable et le but est de construire un modèle pour $\sigma_t = g(\theta, \mathcal{F}_{t-1})$ où θ est un ensemble paramètres.

Quelques propriétés de base du modèle

2. Les rendements ont une moyenne stationnaire ✓

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[r_t] &= \mathsf{E}[\mu + \sigma_t \epsilon_t] \\ &= \mu + \mathsf{E}[\epsilon_t]\mathsf{E}[\sigma_t] \\ &= \mu \end{aligned}$$

3. La volatilité nest pas constante ✓

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[r_t|\mathcal{F}_{t-1}] &= \mathsf{E}[\epsilon_t^2 \sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathsf{E}[\sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]\mathsf{E}[\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \sigma_t^2 \end{aligned}$$

4. Les rendements se comportent comme un bruit blanc ✓

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(r_t, r_{t-h}) &= \mathsf{E}[\epsilon_t \sigma_t \epsilon_{t-h} \sigma_{t-h}] \\ &= \mathsf{E}[\epsilon_t]\mathsf{E}[\sigma_t \epsilon_{t-h} \sigma_{t-h}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quelques propriétés de base du modèle

2. Les rendements ont une moyenne stationnaire ✓

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[r_t] &= \mathsf{E}[\mu + \sigma_t \epsilon_t] \\ &= \mu + \mathsf{E}[\epsilon_t]\mathsf{E}[\sigma_t] \\ &= \mu \end{aligned}$$

3. La volatilité nest pas constante ✓

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathsf{E}[\epsilon_t^2 \sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathsf{E}[\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]\mathsf{E}[\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \sigma_t^2 \end{aligned}$$

4. Les rendements se comportent comme un bruit blanc ✓

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}(r_t, r_{t-h}) &= \mathsf{E}[\epsilon_t \sigma_t \epsilon_{t-h} \sigma_{t-h}] \\ &= \mathsf{E}[\epsilon_t]\mathsf{E}[\sigma_t \epsilon_{t-h} \sigma_{t-h}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quelques propriétés de base du modèle

2. Les rendements ont une moyenne stationnaire ✓

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[r_t] &= \mathrm{E}[\mu + \sigma_t \epsilon_t] \\ &= \mu + \mathrm{E}[\epsilon_t]\mathrm{E}[\sigma_t] \\ &= \mu \end{aligned}$$

3. La volatilité nest pas constante ✓

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[r_t|\mathcal{F}_{t-1}] &= \mathrm{E}[\epsilon_t^2 \sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathrm{E}[\sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]\mathrm{E}[\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \sigma_t^2 \end{aligned}$$

4. Les rendements se comportent comme un bruit blanc ✓

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(r_t, r_{t-h}) &= \mathrm{E}[\epsilon_t \sigma_t \epsilon_{t-h} \sigma_{t-h}] \\ &= \mathrm{E}[\epsilon_t]\mathrm{E}[\sigma_t \epsilon_{t-h} \sigma_{t-h}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. Les rendements ont une distribution leptokurtique ✓

$$\mathrm{Var}[r_t] = \mathrm{E}[\epsilon_t^2\sigma_t^2] = \mathrm{E}[\sigma_t^2]$$

Sous l'hypothèse que $\epsilon_t \sim \text{i.i.d.} N(0,1)$

$$\mathrm{E}[(r_t-\mu)^4] = \mathrm{E}[\epsilon_t^4\sigma_t^4] = \mathrm{E}[\sigma_t^4]\mathrm{E}[\sigma_t^4] = 3\mathrm{E}[\sigma_t^4]$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{K}[r_t] &= \frac{\mathrm{E}[(r_t-\mu)^4]}{\mathrm{E}[(r_t-\mu)^2]^2} = \frac{3\mathrm{E}[\sigma_t^4]}{\mathrm{E}[\sigma_t^2]^2} \\ &= \frac{3(\mathrm{Var}[\sigma_t^2] + \mathrm{E}[\sigma_t^2]^2)}{\mathrm{E}[\sigma_t^2]^2} \\ &= 3\left(1 + \frac{\mathrm{Var}[\sigma_t^2]}{\mathrm{E}[\sigma_t^2]^2}\right) > 3 \end{aligned}$$

Outline

Première génération - ARCH(q) - Engle (1982)

Définition

Un modèle ARCH(q) (**A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroskedastic) est défini comme :

$$r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t \tag{2}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i z_{t-i}^2 \tag{3}$$

Où :

- μ est un paramètre constant représentant la moyenne de r_t
- $\epsilon_t \sim i.i.d.D(0,1)$ et $z_t = r_t - \mu$
- $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ for $i = 1, ..., q-1$ et $\alpha_q > 0$

Ce modèle comprend q+1 coefficients à estimer.

Première génération - GARCH(p,q) - Bollerslev (1986)

Définition

Un modèle GARCH(p,q) (**G**eneralized **A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroskedastic) est défini comme :

$$r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t \tag{4}$$

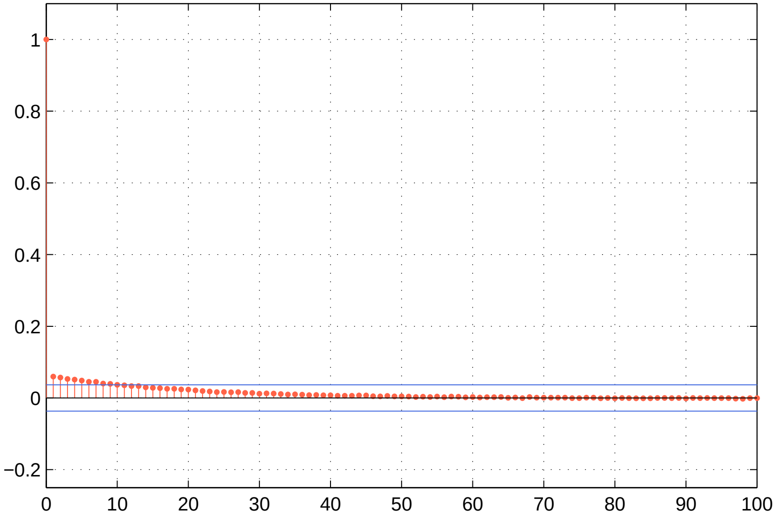
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{5}$$

Where :

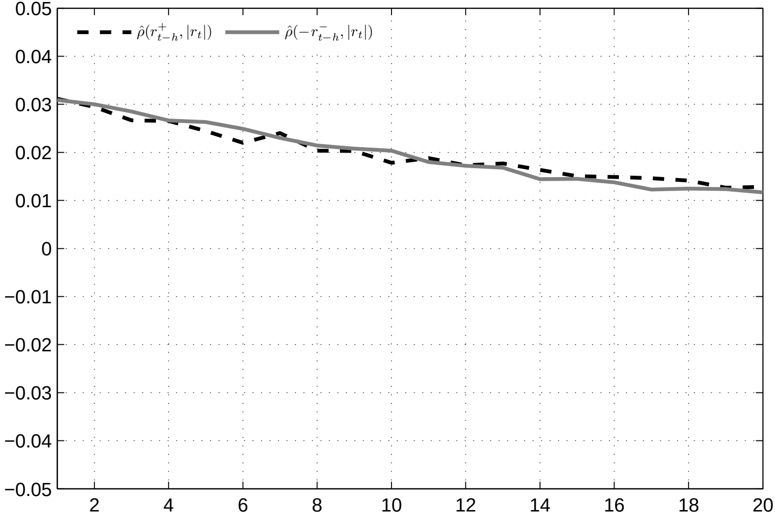
- μ est un paramètre constant représentant la moyenne de r_t
- $\epsilon_t \sim i.i.d.D(0,1)$ et $z_t = r_t - \mu$
- $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ for $i = 1, ..., q-1$, $\alpha_q > 0$, $\beta_j \geq 0$ for $j = 1, ..., p-1$ et $\beta_p > 0$

Nous avons q+p+1 paramètres dans le modèle.

5. Les rendements absolus (carrés) sont autocorrélés ✗



7. Effets de Leviers ✗



Leverage effect - EGARCH(p,q) - Nelson (1991)

Définition

Un modèle EGARCH(p,q) (**E**xponential GARCH) est défini comme :

$$
\begin{aligned}
r_t &= \mu + \sigma_t \epsilon_t & (6)\\
\log \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g(\epsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log \sigma_{t-j}^2 & (7)
\end{aligned}
$$

Où :

- $g(\epsilon_{t-i}) = \theta \epsilon_{t-i} + \gamma(|\epsilon_{t-i}| - E|\epsilon_{t-i}|)$
- ω, α_i, β_j, θ et γ sont des nombres réels

✗ Ne tiens pas compte de la mémoire longue

Leverage effect et Mémoire longue - Arch(∞)

Considérons le modèle EGARCH(1,1) :

$$\log\sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1}) + \beta\log\sigma_{t-1}^2$$

De manière équivalente :

$$(1 - \beta L)\log\sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1})$$
$$\log\sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^j g(\epsilon_{t-1-k})$$
$$\log\sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \lambda(L)g(\epsilon_{t-1})$$

Les coefficients β^k du filtre contrôlent le niveau de mémoire et ont une décroissance **exponentielle** !

Leverage effect et Mémoire longue - Arch(∞)

Considérons le modèle EGARCH(1,1) :

$$\log \sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1}) + \beta \log \sigma_{t-1}^2$$

De manière équivalente :

$$(1 - \beta L) \log \sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1})$$

$$\log \sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^j g(\epsilon_{t-1-k})$$

$$\log \sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \lambda(L) g(\epsilon_{t-1})$$

Les coefficients β^k du filtre contrôlent le niveau de mémoire et ont une décroissance **exponentielle** !

Leverage effect et Mémoire longue - Arch(∞)

Considérons le modèle EGARCH(1,1) :

$$\log \sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1}) + \beta \log \sigma_{t-1}^2$$

De manière équivalente :

$$(1 - \beta L) \log \sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1})$$

$$\log \sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^j g(\epsilon_{t-1-k})$$

$$\log \sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \lambda(L) g(\epsilon_{t-1})$$

Les coefficients β^k du filtre contrôlent le niveau de mémoire et ont une décroissance **exponentielle** !

Leverage effect et Mémoire longue - Arch(∞)

Considérons le modèle EGARCH(1,1) :

$$\log \sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1}) + \beta \log \sigma_{t-1}^2$$

De manière équivalente :

$$(1 - \beta L)\log \sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1})$$

$$\log \sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^j g(\epsilon_{t-1-k})$$

$$\log \sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \lambda(L) g(\epsilon_{t-1})$$

Les coefficients β^k du filtre contrôlent le niveau de mémoire et ont une décroissance **exponentielle** !

Leverage effect et Mémoire longue - Arch(∞)

Transformons le modèle EGARCH(1,1) :

$$(1-\beta L)(1-L)^d \log\sigma_t^2 = \omega + g(\epsilon_{t-1})$$

Où $d \in (0,1)$ et $(1-z)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{d,k} z^k$

$$\log\sigma_t^2 = \tilde{\omega} + [1-\beta L]^{-1}(1-L)^{-d} g(\epsilon_{t-1})$$
$$\log\sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \lambda(L) g(\epsilon_{t-1})$$

Les coefficients λ_k du filtre contrôlent le niveau de mémoire et ont une décroissance **hyperbolique** !

Mémoire longue - FIEGARCH(p,d,q) - Bollerslev et al. (1996)

Définition

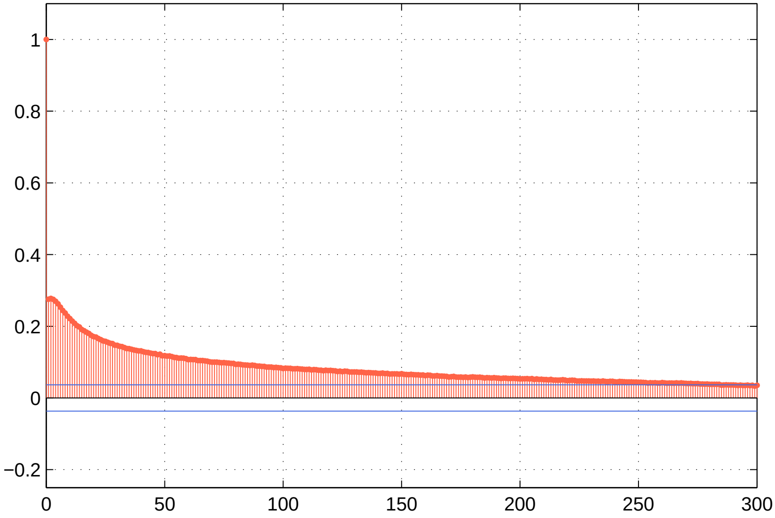
Un modèle FIEGARCH(p,d,q) (**F**ractionally **I**ntegrated EGARCH) est défini comme :

$$
\begin{aligned}
r_t &= \mu + \sigma_t \epsilon_t & (8) \\
\log \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_k g(\epsilon_{t-1-k}) & (9)
\end{aligned}
$$

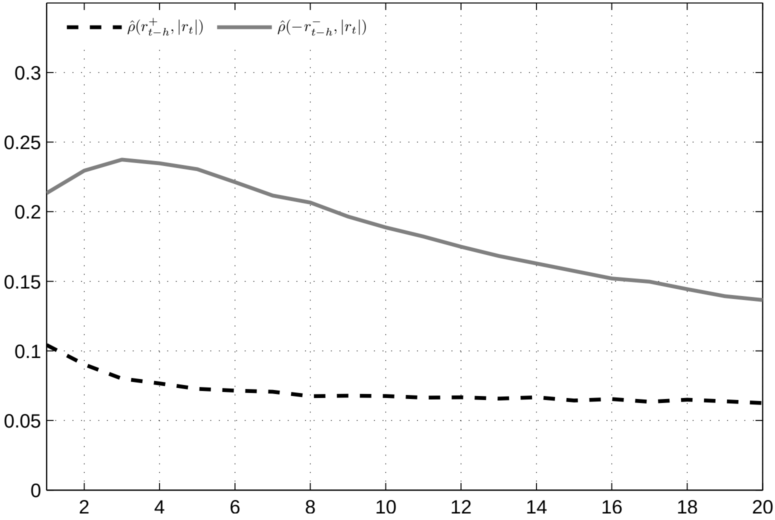
Où :

- $g(\epsilon_{t-i}) = \theta \epsilon_{t-i} + \gamma(|\epsilon_{t-i}| - E|\epsilon_{t-i}|)$
- ω, λ_k, θ et γ sont des nombres réels

5. Les rendements absolus (carrés) sont autocorrélés ✓



7. Effets de Leviers ✓



Outline

- Bases de donnés regroupant les transactions intra-journalières
- Gigantesque quantité d'information pour calculer des volatilités
- Calcul de mesure non-paramétriques de la volatilité passée

Ex : pour le jour t, N transactions/prix disponibles (N-1 rendements)

$$VR_t = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t,i}^2$$

Seconde génération

- Bases de donnés regroupant les transactions intra-journalières
- Gigantesque quantité d'information pour calculer des volatilités
- Calcul de mesure non-paramétriques de la volatilité passée

Ex : pour le jour t, N transactions/prix disponibles (N-1 rendements)

$$VR_t = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t,i}^2$$

Seconde génération

- Bases de donnés regroupant les transactions intra-journalières
- Gigantesque quantité d'information pour calculer des volatilités
- Calcul de mesure non-paramétriques de la volatilité **passée**

Ex : pour le jour t, N transactions/prix disponibles (N-1 rendements)

$$VR_t = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t,i}^2$$

Seconde génération

- Bases de donnés regroupant les transactions intra-journalières
- Gigantesque quantité d'information pour calculer des volatilités
- Calcul de mesure non-paramétriques de la volatilité **passée**

Ex : pour le jour t, N transactions/prix disponibles (N-1 rendements)

$$VR_t = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t,i}^2$$

Seconde génération

- Bases de donnés regroupant les transactions intra-journalières
- Gigantesque quantité d'information pour calculer des volatilités
- Calcul de mesure non-paramétriques de la volatilité **passée**

Ex : pour le jour t, N transactions/prix disponibles (N-1 rendements)

$$VR_t = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t,i}^2 \quad \propto \quad \sigma_t^2$$

Seconde génération

La différence entre la première et la second génération est...

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_t^1 &= \sigma(\chi_s, s \leq t) \quad \text{where} \quad \chi_s = \{r_s\} \\
\mathcal{F}_t^2 &= \sigma(\chi_s, s \leq t) \quad \text{where} \quad \chi_s = \{r_s, \mathrm{VR}_s\}
\end{aligned}
$$

...**l'information disponible** !

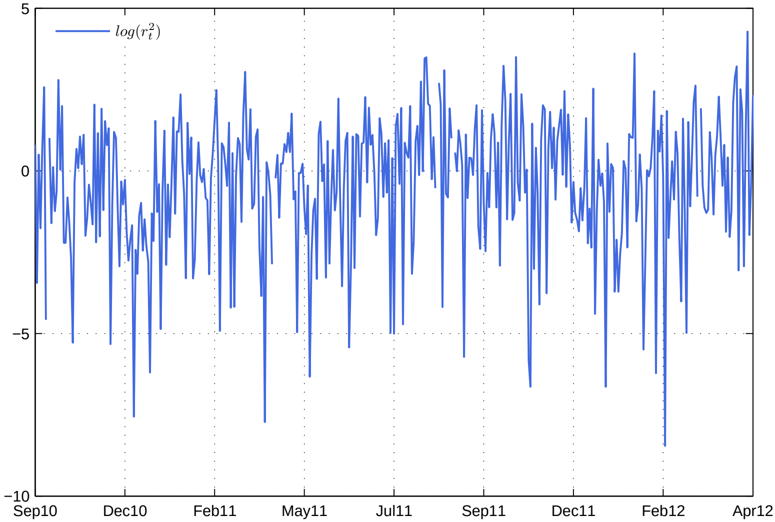
Seconde génération

La différence entre la première et la second génération est...

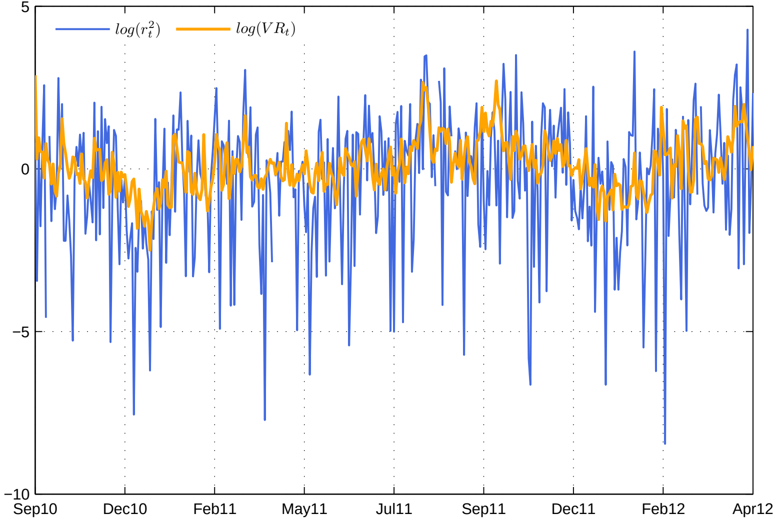
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^1 &= \sigma(\chi_s, s \leq t) \quad \text{where} \quad \chi_s = \{r_s\} \\ \mathcal{F}_t^2 &= \sigma(\chi_s, s \leq t) \quad \text{where} \quad \chi_s = \{r_s, \mathrm{VR}_s\} \end{aligned}$$

...**l'information disponible** !

Rendements au carré vs Mesures réalisées



Rendements au carré vs Mesures réalisées



Définition

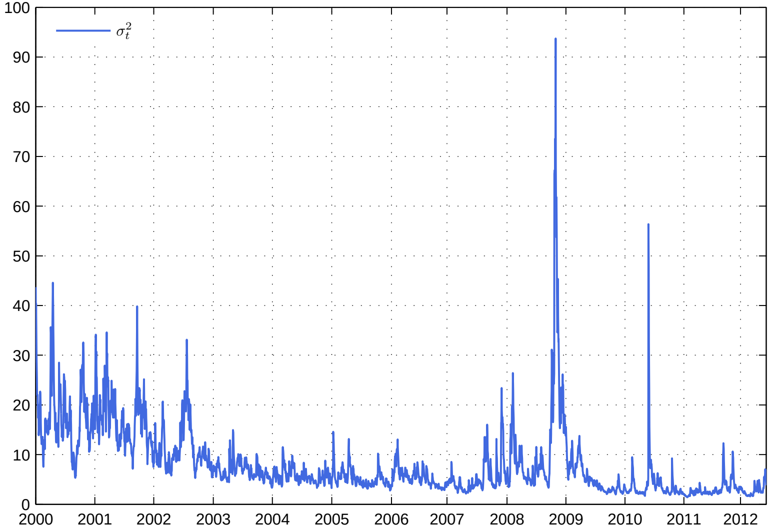
Un modèle RealGARCH(p,q) (**Real**ized GARCH) est défini comme :

$$
\begin{aligned}
r_t &= \mu + \sigma_t \epsilon_t && (10)\\
\sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \mathrm{VR}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 && (11)\\
\mathrm{VR}_t &= \xi + \phi \sigma_t^2 + u_t && (12)
\end{aligned}
$$

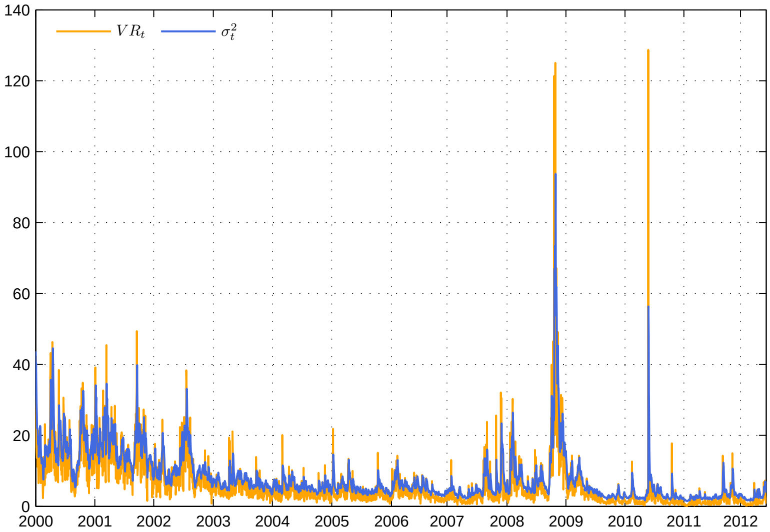
Where :

- $u_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_u)$ et VR_t est une variance réalisée

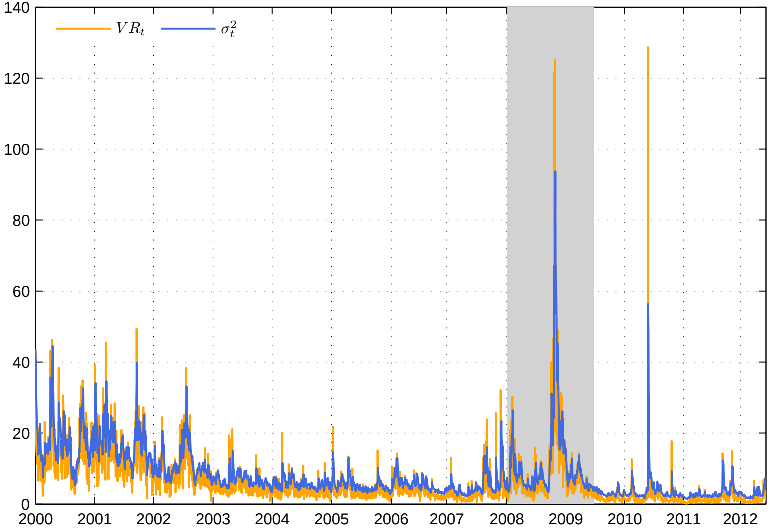
Volatilités cond. vs Mesures réalisées



Volatilités cond. vs Mesures réalisées



Volatilités cond. vs Mesures réalisées



Seconde génération - RealGARCH(p,q) - Hansen et al. (2011)

- Leverage effect – RealEGARCH – Hansen et Huang (2012)
- Mémoire longue – **FloGARCH**

Seconde génération - RealGARCH(p,q) - Hansen et al. (2011)

- Leverage effect – RealEGARCH – Hansen et Huang (2012)
- Mémoire longue – FloGARCH

Seconde génération - RealGARCH(p,q) - Hansen et al. (2011)

- Leverage effect – RealEGARCH – Hansen et Huang (2012)
- Mémoire longue – **FloGARCH**

Outline

Conclusion

- Les modèles de volatilité sont très utiles en finance
- Les modèles de type ARCH ont eu énormément de succès ces 30 dernières années
- Il existe énormément d'approches pour modéliser la volatilité des rendements
- Mais aussi les corrélations et les covariances (MGARCH)
- Beaucoup reste à faire :
  - Généraliser les modèles existant dans le contexte multivariés
  - Nouveau modèles utilsant les nouvelles information disponibles (VR, Vol. induite, etc.)