De Poincaré à Perelman: une promenade topologique à travers le 20ème siècle.

Julien Meyer et Patrick Weber

Université Libre de Bruxelles

4 août 2014

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

Cherchons à nous rendre compte de la nature de ce concours ; les figures suppléent d'abord à l'infirmité de notre esprit en appelant nos sens à son secours ; mais ce n'est pas seulement cela. On a bien souvent répété que la Géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites ; encore ces figures, pour ne pas nous tromper, doivent-elles satisfaire à certaines conditions ; les proportions peuvent être grossièrement altérées, mais les positions relatives des diverses parties ne doivent pas être bouleversées.

L'emploi des figures a donc avant tout pour but de nous faire connaître certaines relations entre les objets de nos études, et ces relations sont celles dont s'occupe une branche de la Géométrie que l'on a appelée *Analysis Situs*, et qui décrit la situation relative des points des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur.

Il y a des relations de même nature entre les êtres de l'hyperespace ; il y a donc une *Analysis Situs* à plus de trois dimensions, comme l'ont montré Riemann et Betti.

Henri Poincaré, Analysis Situs (1895)

La topologie est souvent appelée la science du caoutchouc.
Intuitivement deux objets sont considéré les mêmes si on peut déformer l'un dans l'autre sans le casser.

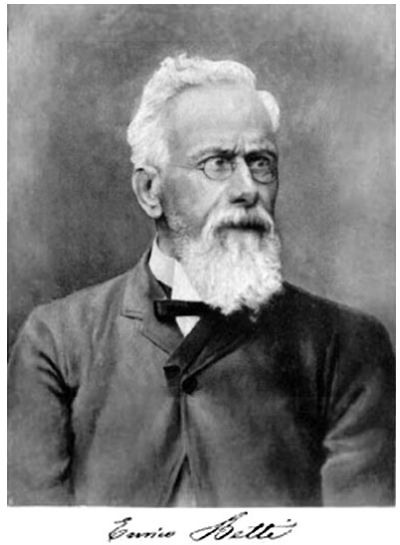
click

$\rightarrow$ on n'a pas de notion de longueur, volume, distance, forme,...

Poincaré peut être considéré comme père de la topologie comme on la connait aujourd'hui.

Certainement il y avaient des travaux topologiques avant Poincaré :

Leonard Euler



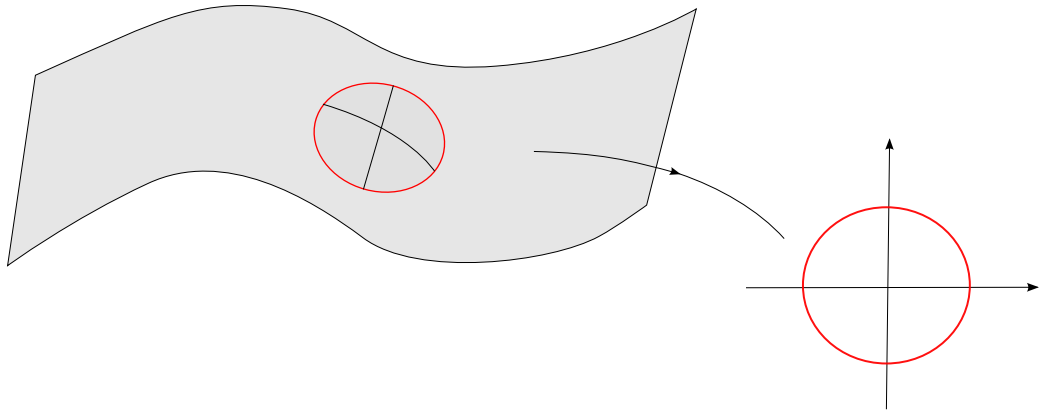
Enrico Betti

Mais la première fois que la topologie devenait un sujet mathématique indépendant était avec les travaux de Poincaré.

Pour comprendre le travail de Poincaré, placons-nous à la fin du 19e siècle et discutons ce qui était connu pour les surfaces.

Qu'est-ce qu'on entend par surface ?

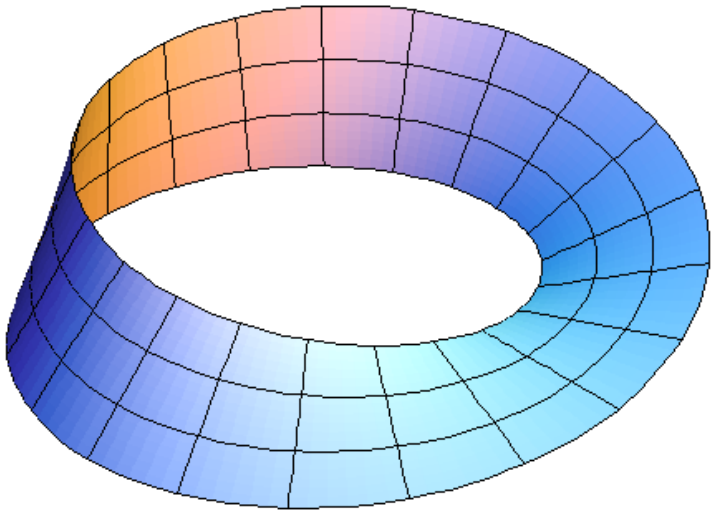
Une surface est un espace M avec la propriété que $\forall x \in M$ il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe à la boule unitée de $\mathbb{R}^2$.



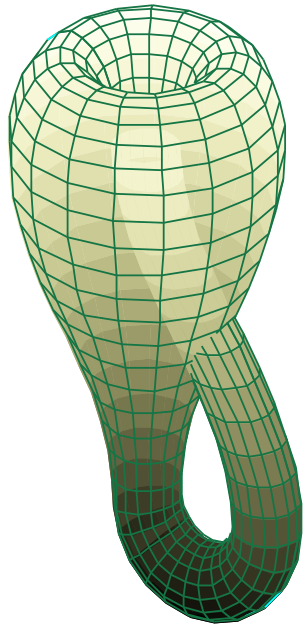
Remarque : En remplacant 2 par n dans la définition, on obtient des variétés de dimension n.

Pour des raisons techniques, on suppose que les surfaces sont compactes et orientables.

Exemple de surfaces non-orientables :



ruban de Moebius



Bouteille de Klein

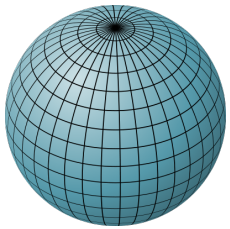
A l'époche de Poincaré, la topologie des surfaces était bien compris.
A chaque surface, on associe un nombre entier appelé le genre.

Le genre d'une surface

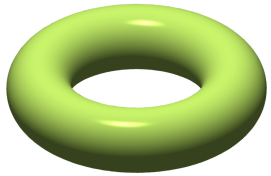
Le genre d'une surface est un entier représentant le nombre maximal de courbes sans intersections avec la propriété que si on coupe suivant ces courbes le résultat reste connexe.

Remarque : Le genre est égale au nombre d'anses de la surface.

Quelques exemples :

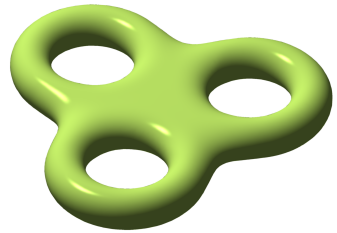


genre 0



genre 1

genre 2



genre 3

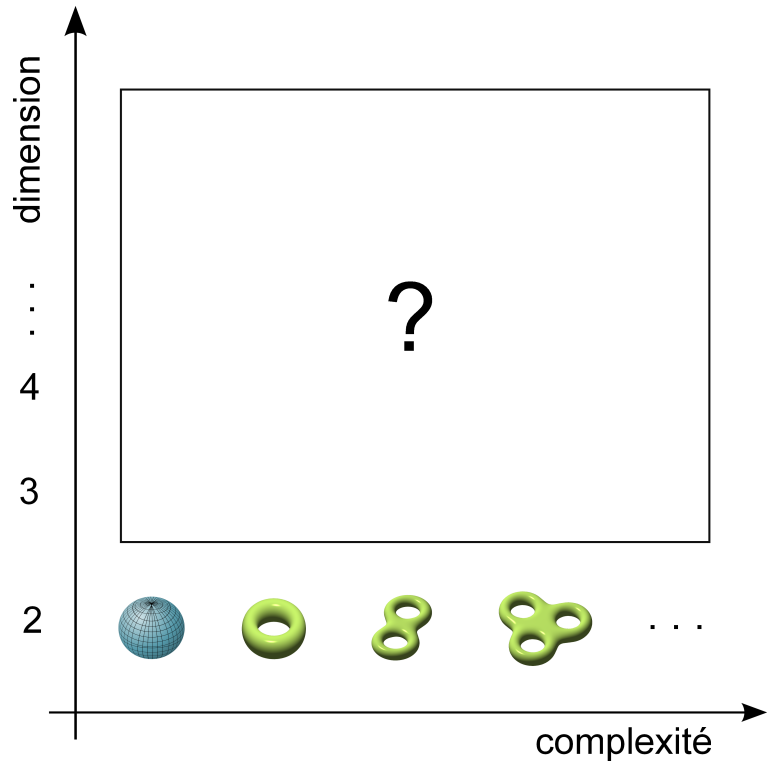
...

Deux surfaces sont considérées comme topologiquement équivalentes s'il existe un homéomorphisme entre eux.

Classification des surfaces

Deux surfaces sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles ont le même genre.

La topologie à la fin du 19e siècle :



Pour Poincaré le plus logique était de continuer son étude en passant en dimension 3. Il pensait qu'en augmentant la dimension, la théorie devient de plus en plus difficile.

En plus, il commencait avec ce qui devrait être la variété la moins complexe, à savoir la 3-sphère :

$$\mathcal{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

Rappelons que deux variétés sont topologiquement équivalentes s'il existe un homéomorphism entre eux.

MAIS, comment prouver que deux variétés ne sont pas topologiquement équivalentes ?

$\rightarrow$ Faire appel à des invariants .

Invariants topologiques

In invariant $\mathcal{I}$ est un objet mathématique (entier, groupe, anneau,...) qu'on associe à une variété ayant la propriété que

$$X \sim Y \implies \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y)$$

si X et Y sont deux variétés.

Exemples :

la dimension, le nombre de composantes connexes, le genre,...

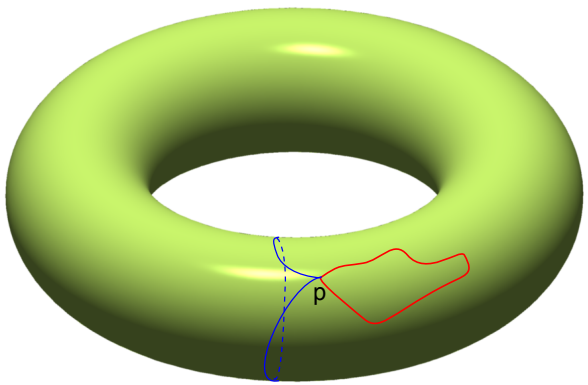
Le but de Poincaré était de trouver un invariant qui caractérise la 3-sphère.

Il introduisait deux invariants : l'homologie et le groupe fondamental .

1. Le groupe fondamental

Deux lacets sur M qui peuvent être déformés de manière continue l'un dans l'autre sont appelées homotopes et une telle déformation est appelée une homotopie.

Exemple :



Les lacets en noir et bleu sont homotopes. Mais aucun d'eux n'est homotope au lacet en noir.

On dit que deux lacets appartiennent à la même classe d'homotopie s'ils sont homotopes.

Définition du groupe fondamental

Fixons un point quelconque $p \in M$. Le groupe fondamental $\pi_1(M; p)$ est défini comme suit :

- les éléments de $\pi_1(M; p)$ sont les classes d'homotopies de lacets basés en p.
- La loi du groupe est la concatenation, i.e. à deux lacets est associé un 3e en parcourant d'abord le premier, puis le deuxième.
- L'élément neutre est la classe d'homotopie du lacet constant, i.e. qui reste en p.
- On dbtient un élément inverse en parcourant les lacets d'une classe d'homotopie dans le sens inverse.

Remarque :

Si $p, q \in M$ alors $\pi_1(M; p) \cong \pi_1(M; q)$

$\Longrightarrow$ On écrira juste $\pi_1(M)$ sans faire référence à point de base.

Exemples :

- $\pi_1(\mathbb{R}^n) \cong 1$
- $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$,
- $\pi_1(\mathcal{S}^n) \cong 1$, pour $n \geq 2$
- $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Un espace dont tout lacet est homotope à un point (i.e. si $\pi_1(M) \cong 1$) est appelé simplement connexe.

2. L'homologie

Définition de l'homologie

L'homologie $H_1(M)$ est définie comme l'abélianisation du groupe fondamental $\pi_1(M)$.

Supposons que $\pi_1(M)$ soit présenté sous forme de générateurs et relations

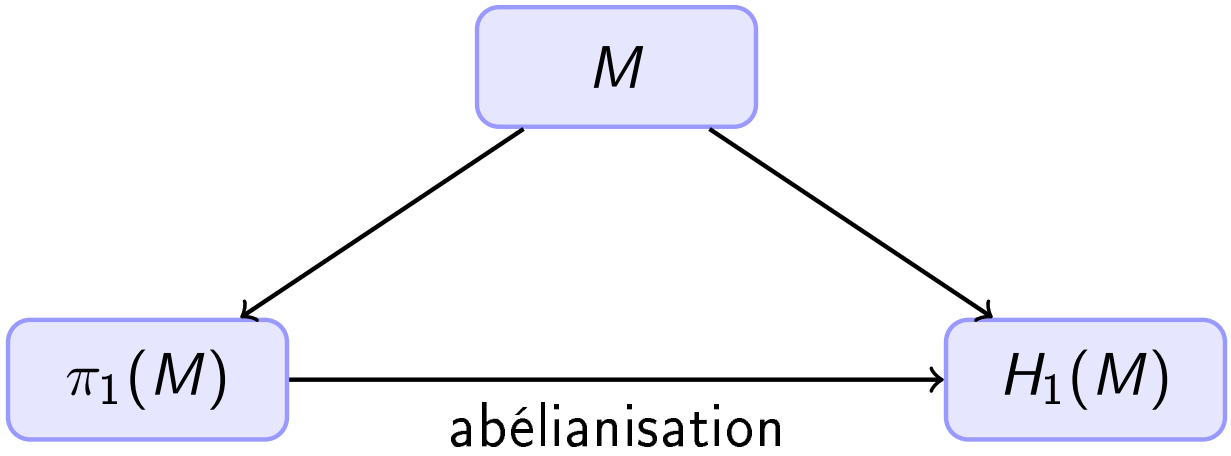
$$\pi_1(M) = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \mid r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$$

alors l'abélianisation est obtenue en ajoutant les relations de commutation

$$g_i g_j = g_j g_i$$

pour tout i, j.

Donc à chaque espace M, Poincaré associe deux invariants :



Maintenant Poincaré se pose la question si $H_1(X)$ permet à caractériser la 3-sphere :

Une première conjecture

Soit M une variété compacte, orientable de dimension 3 tel que $H_1(M) = 1$. Alors M est toplogiquement équivalent à la 3-sphère.

Or Poincaré montre lui même dans un 5e compément à *Analysis Situs* que ceci est faux un construisant un premier exemple de ce qui est aujourd'hui connue sous le nom de sphère d'homologie. Il construit une 3-variété t.q. $H_1(M) = 1$ mais $\pi_1(M)$.

Poincaré se demande alors si $\pi_1(M)$ est la seule obstruction. En d'autres mots, il pose une question qui va devenir une des conjectures les plus importantes du 20e siècle :

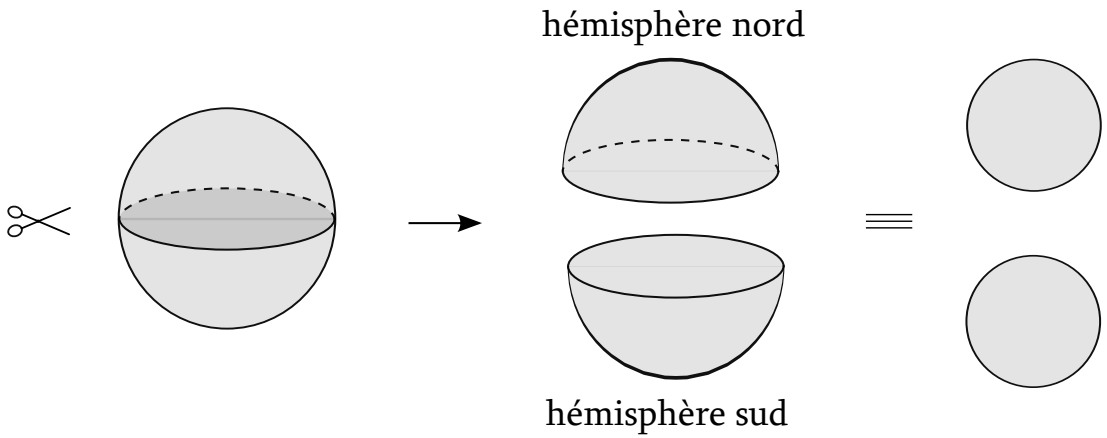
Conjecture de Poincaré

Soit M une variété compacte, orientable de dimension 3 tel que $\pi_1(M) = 1$. Alors M est toplogiquement équivalent à la 3-sphère.

Rappelons que l'hypothèse $\pi_1(M) = 1$ veut dire que tout lacet peut être déformé de manière continue en un point.

Comment Poincaré visualisait les variétés de dimension 3

Exemple : Afin de comprendre ce qui suit, commencons par une analogie en dimension 2.



La sphere de dimension 2 peut être décomposée en union de deux 2-disques qu'on colle suivant leur bord qui est un cercle.

$$\mathcal{S}^2 = D^2 \cup_{\mathcal{S}^1} D^2$$

Similairement on obtient $\mathcal{S}^3$ en collant deux 3-disques (des boules !) suivant leur bord qui est une 2-sphère :

$$\mathcal{S}^3 = D^3 \cup_{\mathcal{S}^2} D^3$$

Plus précisément, on décompose

$$\mathcal{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

en deux parties, l'hémisphère nord

$$\mathcal{S}^3_N = \mathcal{S}^3 \cap \{w \geq 0\}$$

et l'hémisphère sud

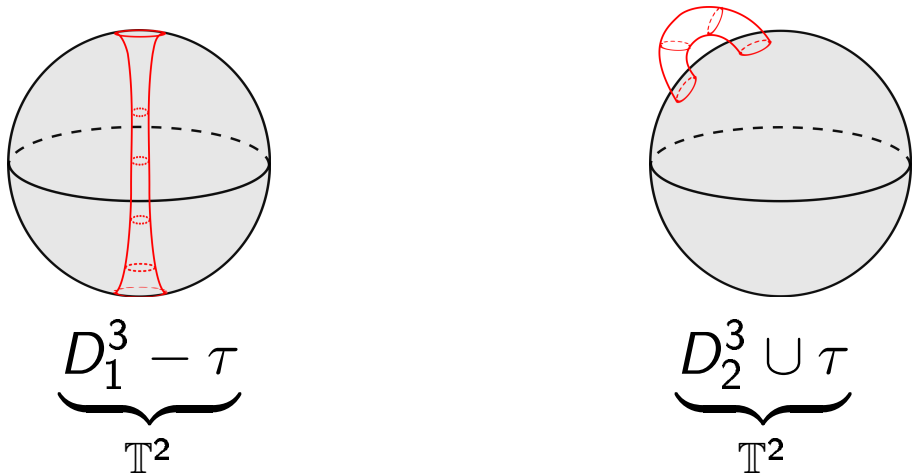
$$\mathcal{S}^3_S = \mathcal{S}^3 \cap \{w \leq 0\}.$$

On voit bien que l'intersection $\mathcal{S}^3_N \cap \mathcal{S}^3_S = S^2$.

Encore la sphère $\mathcal{S}^3$:

Rappelons que $\mathcal{S}^3 = D_1^3 \cup_{\mathcal{S}^2} D_2^3$.

Enlevons un petit tube τ de D_1^3 et collons-le sur D_2^3.



$\underbrace{D_1^3 - \tau}_{\mathbb{T}^2}$ $\underbrace{D_2^3 \cup \tau}_{\mathbb{T}^2}$

Nous obtenons :

$$\mathcal{S}^3 = \mathbb{T}^2 \cup_{\Sigma_1} \mathbb{T}^2$$

où $\mathbb{T}^2$ est un tore solide.

Généralisation : nous enlevons g tubes dénoués de D_1^3 et les collons sur D_2^3 afin d'obtenir

$$\mathcal{S}^3 = H_g \cup_{\Sigma_g} H_g$$

où H_g est un solide à anses de genre g et Σ_g la surface de genre g.

Solide à anses

Le solide à anses de genre g, noté H_g, est la 3-variété compacte obtenue en ajoutant g anses à un 3-disque.

Exemple :

Décomposition de Heegaard

Une décomposition de Heegaard d'une 3-variété M est une décomposition de M en deux solides à anses de même genre g, collés suivant leur bord Σ_g,

$$M = H_g \cup_{\Sigma_g} H'_g$$

Propriétée : Chaque 3-variété compacte, connexe admet une décomposition de Heegaard.

Remarque : Comme on a vu pour la sphère, une telle décomposition n'est pas unique !

On va maintenant voir comment stocker toute l'information d'une décomposition de Heegaard dans le bord Σ_g.

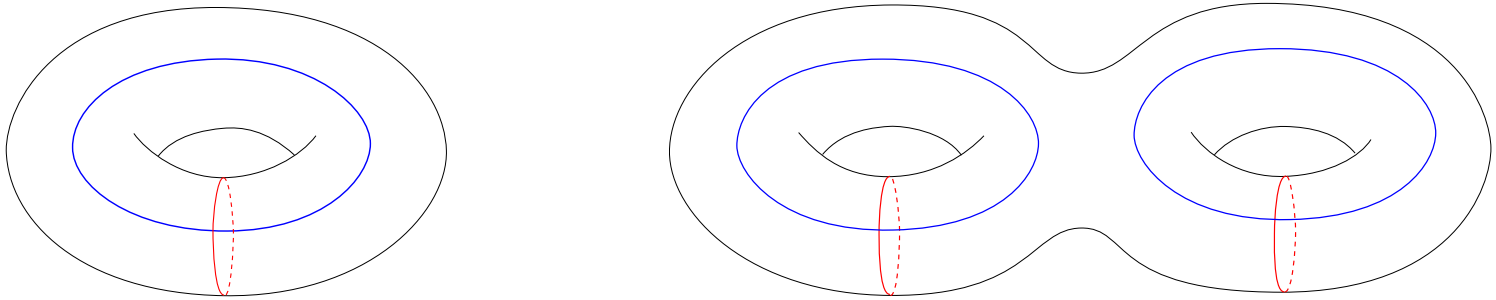
Diagrames de Heegaard

Un diagrame de Heegaard est un triple $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ où Σ_g est une surface de genre g et α et β sont deux systèmes de g courbes sur Σ_g satisfaisant

- les courbes α_j sont disjoints,
- $\Sigma_g - \alpha_1 - \cdots - \alpha_g$ est connexe,
- chaque courbe α_j est le bord d'un disque plongé dans M.

Idem pour le système de courbes β.

Exemple : Deux diagrames pour la sphère $\mathcal{S}^3$ correspondant à la décomposition de Heegaard de genre 1 et 2.



Comment passer d'un diagramme de Heegaard à la variété ?

Etant donné un diagrame $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$, on construit deux solides à anses de la manière suivante :

- On colle des disques sur les courbes du système α.

$$\text{On obtient une surface avec bord } \mathcal{S}^2.$$

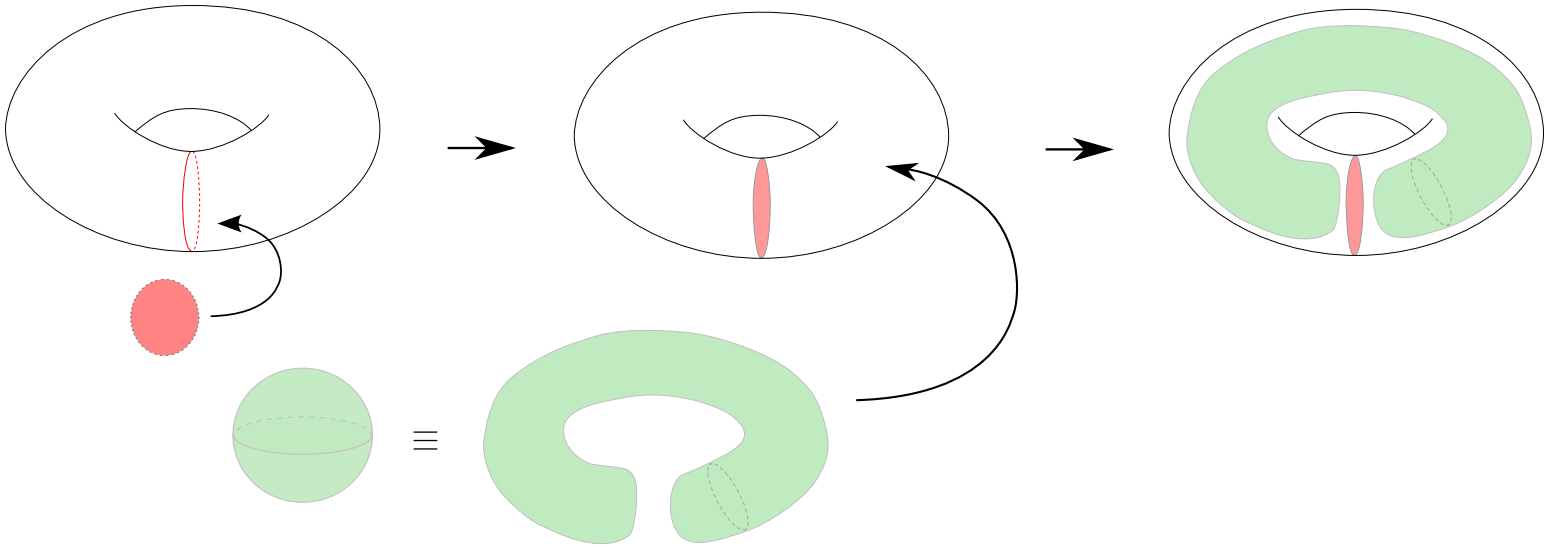
- On colle un 3-disque.

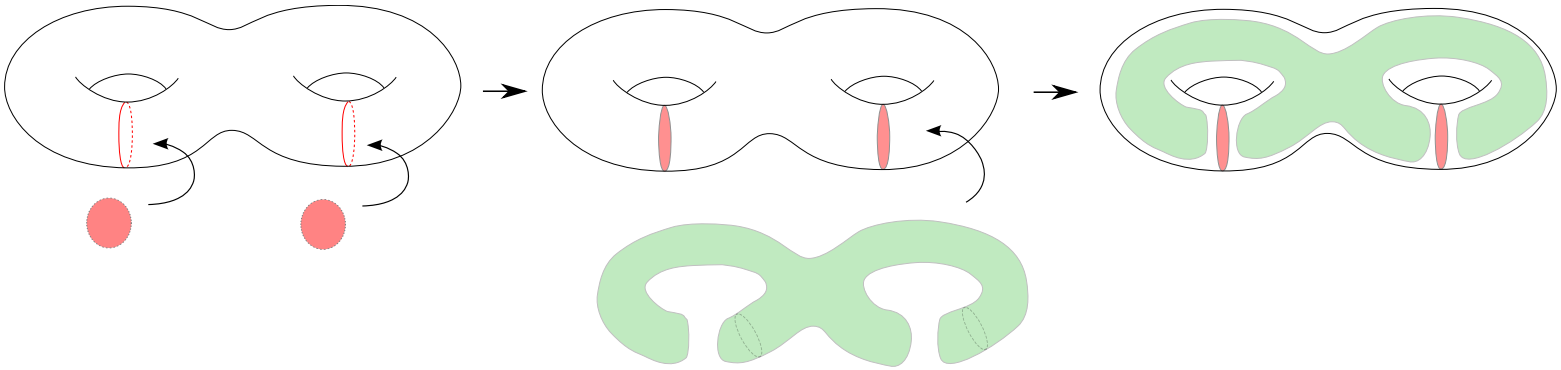
$$\text{On obtient le premier solide à anses } H_\alpha.$$

- On fait la même chose pour le systàme β.
- La 3-variété donné par $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ est alors

$$M := H_\alpha \cup_{\Sigma_g} H_\beta$$

Examples :



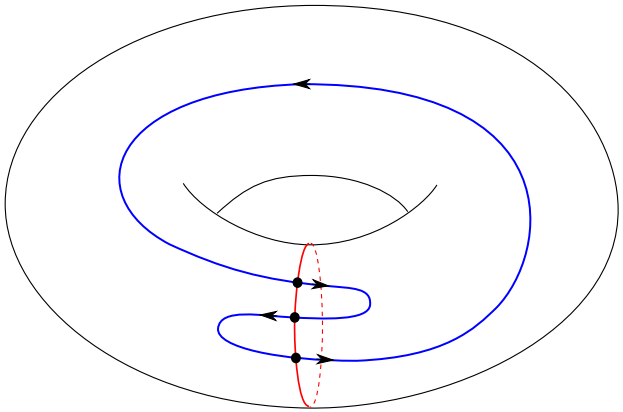


Supposons que $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ est un diagrame de Heegaard.

Le groupe fondamental à partir d'un diagrame de Heegaard ?

- Le nombre de générateurs est égal au genre de la décomposition de Heegaard.
- Pour trouver les relations, on compte les intersections orientées des courbes de β avec les courbes de α.

Exemple :



$$\pi_1(M) = \langle a \,|\, aa^{-1}a = 1 \rangle = 1$$

La sphère d'homologie de Poincaré

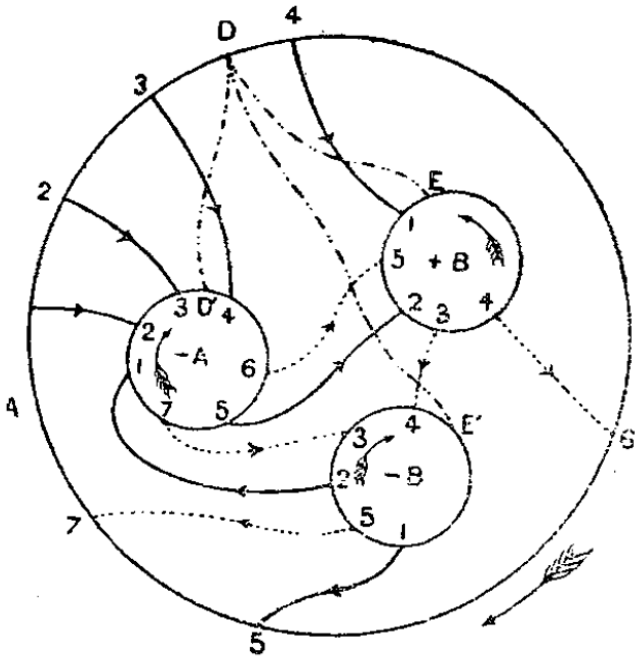


Fig. 4.

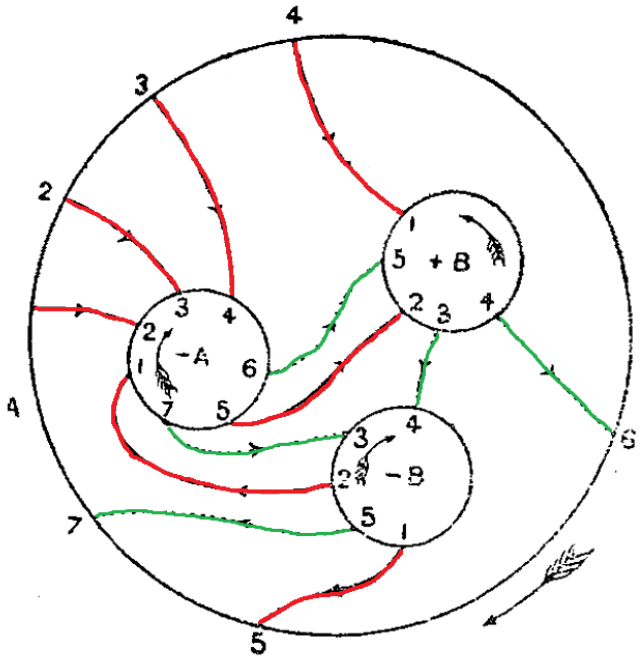
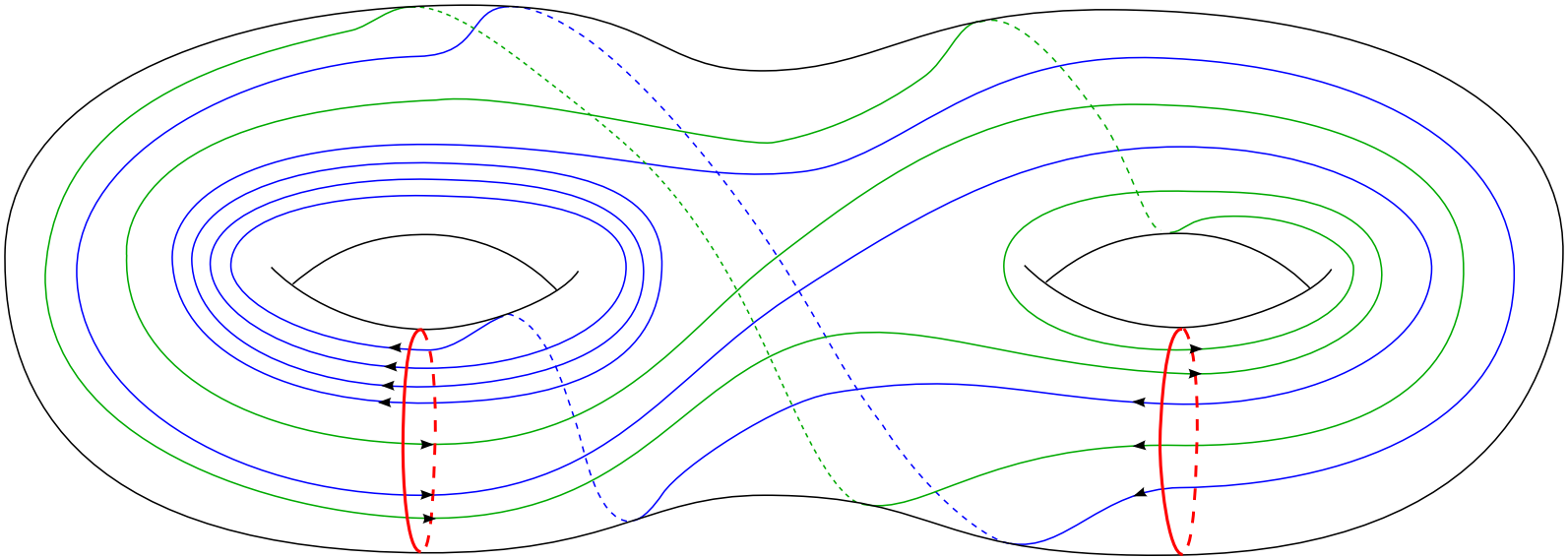


Fig. 4.



Calculons $\pi_1(M)$:

- On a deux générateurs, disons a et b.
- En suivant les courbes bleue et verte, on trouve les relations

$$a^4 b a^{-1} b = 1$$
$$a^{-1} b a^{-1} b^{-2} = 1$$

Donc,

$$\pi_1(M) = \langle a, b \,|\, a^4 b a^{-1} b = a^{-1} b a^{-1} b^{-2} = 1 \rangle$$

Afin de montrer que ce groupe ne soit pas trivial, Poincaré utilise l'astuce suivante : il ajoute la relation

$$(a^{-1} b)^2 = 1$$

On peut montrer alors (exercice facile) que le système de relations résultant

$$a^4 b a^{-1} b = 1$$
$$a^{-1} b a^{-1} b^{-2} = 1$$
$$(a^{-1} b)^2 = 1$$

est équvalent aux relations

$$a^5 = 1$$
$$b^3 = 1$$
$$(a^{-1} b)^2 = 1$$

Or Poincaré savait que ces relations définissent le groupe de symétrie du dodécaèdre, donc n'est pas trivial.

Conclusion : $\pi_1(M)$ contient comme sous-groupe le groupe de symétrie du dodécaèdre, donc ne peut pas être trivial.

M n'est pas topologiquement équivalent à la sphère $\mathcal{S}^3$.

Par contre, si on abélianise $\pi_1(M)$, i.e. si on rajoute la relation $ab = ba$, le système de relations se réduit à $a = b = 1$ et donc

$$H_1(M) = 1.$$

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

En d'autres termes, peut-on tracer les cycles K_1'' et K_2'' de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences

$$K_1' \equiv K_2' \equiv 0, \quad K_1'' \equiv K_2'' \equiv 0$$

entraînent les équivalences

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

et que cependant la surface W ne puisse pas être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent les cycles C_1', C_2', C_3', C_4'; que les équivalences

$$K_1' \equiv K_2' \equiv 0$$

entraînent $C_1' \equiv C_3' \equiv 0$ et réciproquement; et qu'enfin les équivalences

$$K_1'' \equiv K_2'' \equiv 0$$

entraînent $C_2' \equiv C_4' \equiv 0$ et réciproquement?

Mais cette question nous entraînerait trop loin.

Paris, 3 novembre 1903.

H. Poincaré.

Attention : Pour Poincaré, *simplement connexe* $\equiv$ homéomorphe à la sphère ! *[c.f. 5e complément d'Analysis Situs, p.2.]*

Bibliographie

Ces slides sont basés sur :

1. Notes on Heegaard Splittings de Jesse Johnson :

   http ://users.math.yale.edu/∼jj327/notes.pdf

2. Deux présentations très intéressantes de John Morgan :

   a) History of the Poincaré Conjecture
   https ://www.youtube.com/watch ?v=Utf-uwArrq0

   b) The Poincaré conjecture : 1905 - 2003
   https ://www.youtube.com/watch ?v=VGHY1bGBz_c

3. *Analysis Situs* et son *5e complément* de Henri Poincaré.

Merci pour votre attention !