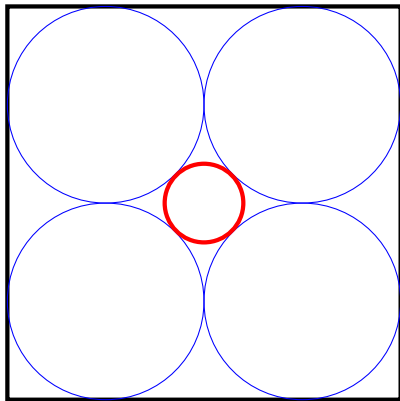
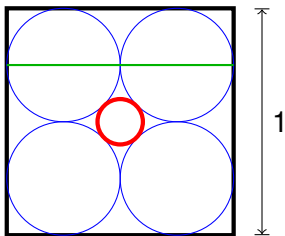




En dimension d :

un (hyper)cube de côté 1;

2^d sphères de rayon $1/4$;

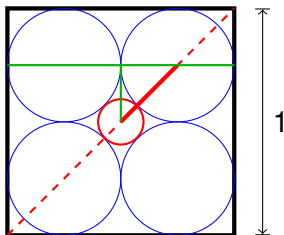


une sphère de rayon r_d .

Deviner le comportement de la suite de réels (r_d) ...

... n'est pas immédiat !?

Reprenons en dimension d :



La **diagonale** mesure $\sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}$, c.-à-d. $\sqrt{d}$.

Le **segment rouge** qui joint deux centres de sphère montre

$$r_d + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{d}$$

car il est un quart de diagonale.

Ainsi

$$r_d = \frac{1}{4} (\sqrt{d} - 1) .$$

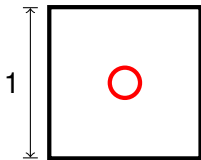
Comme

$$r_d = \frac{1}{4} (\sqrt{d} - 1),$$

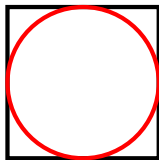
la suite (r_d) est strictement croissante et elle diverge vers $+\infty$.

Il vient

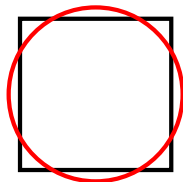
$$r_d \geq \frac{1}{2} \iff \sqrt{d} - 1 \geq 2 \iff d \geq 9.$$



$d = 2$



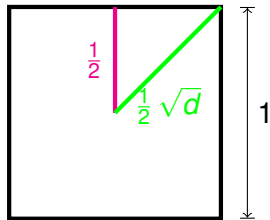
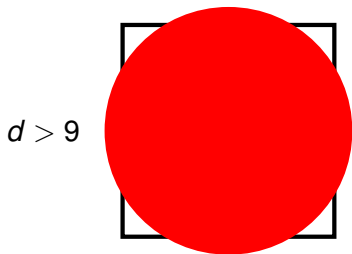
$d = 9$



$d > 9$

La sphère rouge est tangente à l'hypercube pour $d = 9$
et elle déborde de l'hypercube si $d > 9$.

Le rayon de la boule rouge vaut $\frac{1}{4}(\sqrt{d} - 1)$, tandis que



Comment se comporte le volume de la boule rouge ?

Le rayon de cette boule tend vers $+\infty$, mais le volume ?

La réponse suivra la formule pour le volume d'une boule de rayon R .

Magie de la dimension

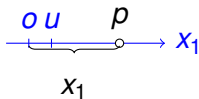
JEAN-PAUL DOIGNON

Université Libre de Bruxelles

`doignon@ulb.ac.be`

Exposé BSSM, le 8 août 2014;
merci aux organisateurs !

$d = 1$



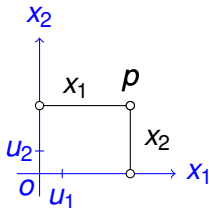
Un point p

$\mathbb{R}$

$\leftrightarrow$

un réel x_1 .

$d = 2$



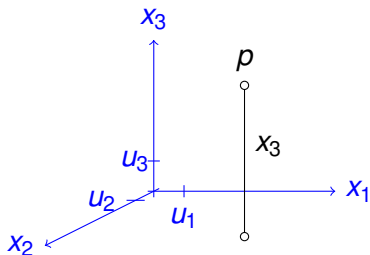
Un point p

$\mathbb{R}^2$

$\leftrightarrow$

un couple (x_1, x_2)
de réels.

$d = 3$



Un point p

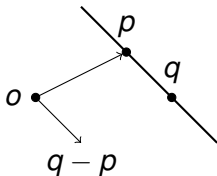
$\mathbb{R}^3$

$\leftrightarrow$

un triple (x_1, x_2, x_3)
de réels.

Dans l'espace numérique $\mathbb{R}^d$,

- ▷ un **point** est un d -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ de réels;
- ▷ l'**origine** est le point $(0, 0, \dots, 0)$;
- ▷ un **vecteur (lié à l'origine)** est un d -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ de réels;
- ▷ la **somme** des vecteurs $p = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ et $q = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ vaut
$$p + q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d);$$
- ▷ la **multiplication** du vecteur $p = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ par le **scalaire** λ vaut
$$\lambda p = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d);$$
- ▷ la **droite** par les points distincts p et q est
$$\{ p + \lambda(q - p) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$



Toujours dans $\mathbb{R}^d$,

- ▷ la **distance** entre les points p et q vaut

$$|pq| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_d - p_d)^2};$$

- ▷ la **sphère** de centre p et de rayon R est

$$S_d(p, R) = \{q \in \mathbb{R}^d \mid |pq| = R\};$$



- ▷ la **boule (fermée)** de centre p et de rayon R est

$$B_d(p, R) = \{q \in \mathbb{R}^d \mid |pq| \leq R\};$$



- ▷ etc.

- 1.- La sphère qui se voulait plus grosse que le cube
- 2.- La plus grosse boule de rayon 1

La plus grosse boule de rayon 1
existe-t-elle ?

Comportement de la suite des volumes des boules de rayon 1 ?

Volume de la boule de rayon R en dimension d :

dimension	terme	volume
1	longueur	$2R$
2	aire	πR^2
3	volume	$\frac{4}{3}\pi R^3$
$\vdots$	volume	$\vdots$

Et en dimension ≥ 4 ?

Volume de la boule de rayon R en dimension d :

dimension	volume	dimension	volume
1	$2 R$	2	πR^2
3	$\frac{4}{3} \pi R^3$	4	$\frac{1}{2} \pi^2 R^4$
5	$\frac{8}{15} \pi^2 R^5$	6	$\frac{1}{6} \pi^3 R^6$
7	$\frac{16}{105} \pi^3 R^7$	8	$\frac{1}{24} \pi^4 R^8$
9	$\frac{32}{945} \pi^4 R^9$	10	$\frac{1}{120} \pi^5 R^{10}$
$d = 2k + 1$	$\frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} \pi^k R^d$	$d = 2k$	$\frac{1}{k!} \pi^k R^d$

où $(2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)\cdots 1$
 (produit des naturels impairs $\leq 2k+1$).

Encore à prouver !

Pour uniformiser, chassons les facteurs 2 pour d impair :

dimension $d = 2k + 1$

$$\frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} \pi^k R^d$$

$$= \boxed{\frac{1}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \cdots \frac{1}{2}} \pi^k R^d}$$

dimension $d = 2k$

$$\frac{1}{k!} \pi^k R^d$$

$$= \boxed{\frac{1}{k!} \pi^k R^d}$$

Dans ces formules, $k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Calculons le facteur d'accroissement :

$$\frac{\frac{1}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \cdots \frac{1}{2}} \pi^k R^d}{\frac{1}{((k-1 + \frac{1}{2})(k-1 - \frac{1}{2}) \cdots \frac{1}{2}) \pi^{k-1} R^{d-2}}}$$

$$= \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \pi R^2 = \boxed{\frac{2}{d} \pi R^2}$$

$$\frac{\frac{1}{k!} \pi^k R^d}{\frac{1}{(k-1)!} \pi^{k-1} R^{d-2}}$$

$$= \frac{1}{k} \pi R^2 = \boxed{\frac{2}{d} \pi R^2}$$

Soit

- ▷ $B_d(p, R)$ la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre p et de rayon R ;
- ▷ $v_d(R)$ le volume de $B_d(p, R)$ (indépendant du centre p).

Comme les homothéties de rapport λ multiplient les volumes par $|\lambda|^d$,

$$v_d(R) = v_d(1) R^d.$$

Proposition

$$v_d(R) = \begin{cases} \frac{1}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \cdots \frac{1}{2}} \pi^k R^d & \text{si } d = 2k + 1, \\ \frac{1}{k(k-1) \cdots 1} \pi^k R^d & \text{si } d = 2k. \end{cases}$$

Preuve par récurrence. Il suffit d'établir¹

$$\frac{v_d(R)}{v_{d-2}(R)} = \frac{2}{d} \pi R^2.$$

¹Dans la suite, nous utiliserons ceci pour $R = 1$.

faire ici une belle figure !

Calculons l'intégrale multiple sur la boule $B_d(o, R)$ centrée à l'origine

$$v_d(R) = \int_{B_d(o, R)} 1 \, dV.$$

Pour (x_1, x_2) fixé, il reste à intégrer sur la section de $B_d(p, R)$ par un $(d-2)$ -sous-espace, donc sur une boule $B_{d-2}\left(p, \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right)$.

En passant aux coordonnées polaires r, θ dans le plan x_1, x_2 :

$$v_d(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_{d-2}\left(\sqrt{R^2 - r^2}\right) r \, dr \, d\theta \quad (1)$$

$$= 2\pi \int_0^R v_{d-2}(1) \cdot \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right)^{d-2} r \, dr \quad (2)$$

$$= 2\pi v_{d-2}(1) \int_0^R \left(R^2 - r^2\right)^{d/2-1} r \, dr \quad (3)$$

$$= 2\pi v_{d-2}(1) \left[\left(R^2 - r^2\right)^{d/2} \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{-1}{2} \right]_{r=0}^{r=R} \quad (4)$$

$$= 2\pi v_{d-2}(1) R^d \frac{1}{d} = \frac{2}{d} \pi R^d v_{d-2}(R). \quad (5)$$

□

Etudions la suite $\left(v_d(1)\right)_{d \in \mathbb{N}^*}$ des volumes des boules unités.

Nous avons établi

$$\frac{v_d(1)}{v_{d-2}(1)} = \frac{2}{d} \pi.$$

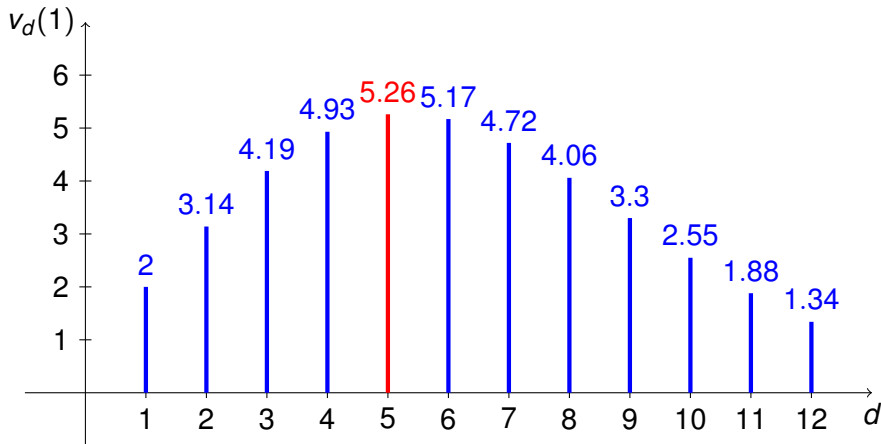
Ainsi

$$\frac{v_d(1)}{v_{d-2}(1)} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi > d \quad \Longleftrightarrow \quad d \leq 6.$$

- ▶ La suite des $v_{2k+1}(1)$ croit puis décroît, atteignant son maximum pour $d = 5$;
- ▶ la suite des $v_{2k}(1)$ croit puis décroît, atteignant son maximum pour $d = 6$.
- ▷ On montre encore que la suite des $v_d(1)$ croit puis décroît, atteignant son maximum pour $d = 5$.
- ▶ La suite des $v_d(1)$ tend vers 0

$$\text{car } 0 \leq v_d(1) < \frac{1}{2} v_{d-2}(1) \quad \text{pour } d \geq 13.$$

Volume $v_d(1)$ de la boule unité pour de petites dimensions



$$v_{100}(1) = \frac{1}{50!} \pi^{50} \sim 2 \cdot 10^{-40}$$

Avantage à la dimension 5 :



Pour $t \in \mathbb{R}^+$, posons

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

La fonction Γ satisfait

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad (6)$$

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad (7)$$

donc aussi

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \Gamma\left(\frac{2k}{2}\right) = (k-1)! \quad (8)$$

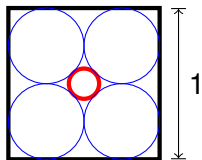
$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (9)$$

Proposition

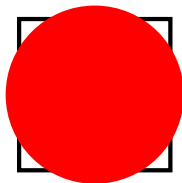
$$v_d(R) = \frac{1}{(d/2)\Gamma(d/2)} \pi^{d/2} R^d.$$

Revenons à la boule rouge qui déborde du cube unité pour $d > 9$:

$$d = 2$$



$$d > 9$$



Et la suite des volumes de cette boule ?

Le rayon étant

$$r_d = \frac{1}{4} (\sqrt{d} - 1),$$

le volume vaut lorsque $d = 2k$:

$$\frac{1}{k!} \pi^k \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} (\sqrt{2k} - 1)^{2k}.$$

Cette suite a-t-elle une limite ?

Utilisons la formule de **STIRLING**.

La formule de **STIRLING** donne

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

(le quotient de ces deux quantités tend vers 1 pour $k \rightarrow \infty$).

Le volume de la boule rouge pour $d = 2k$ vaut

$$\frac{1}{k!} \pi^k \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} (\sqrt{2k} - 1)^{2k} \quad (10)$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k} \pi^k \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} (2k)^k \quad (11)$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{e\pi}{8}\right)^k \quad (12)$$

et diverge vers $+\infty$ car $e\pi \approx 8.5397 \dots > 8$.

Argument à moitié complet ... : dimensions impaires ?

- 1.- La sphère qui se voulait plus grosse que le cube
- 2.- La boule de rayon 1 de plus grand volume
- 3.- La boule de rayon 1 de plus grande aire

La boule de rayon 1 de plus grande aire
existe-t-elle ?

“Aire” signifie $(d - 1)$ -volume (ou un autre terme ?).

Comportement de la suite des aires des boules de rayon 1 ?

Volume et aire de la boule de rayon R selon la dimension d :

dimension	terme	valeur	terme	valeur
1	longueur	$2R$	bord	2
2	aire	πR^2	périmètre	$2\pi R$
3	volume	$\frac{4}{3}\pi R^3$	aire	$4\pi R^2$
$\vdots$	volume	$\vdots$	aire	$\vdots$

Regardez bien les formules **ligne par ligne** !

Notons $a_d(R)$ l'aire de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition

Dans $\mathbb{R}^d$, l'aire de la boule de rayon R est la dérivée du volume :

$$a_d = (v_d)'.$$

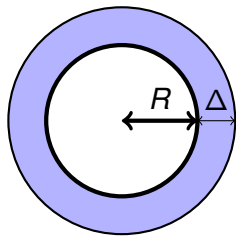
Réécriture :

$$a_d(R) = \frac{d}{dR} v_d(R).$$

(mais veuillez distinguer soigneusement d et d' ; pardon pour ceci).

Première esquisse de démonstration.

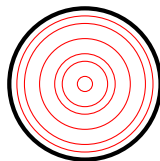
$$\frac{v_d(R + \Delta) - v_d(R)}{\Delta} \sim a_d(R)$$



Deuxième esquisse de démonstration.

Comme

$$v_d(R) = \int_0^R a_d(r) dr,$$



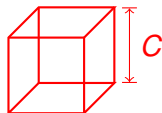
le théorème fondamental du CDI donne

$$a_d(R) = \frac{d}{dR} v_d(R).$$

La formule “**dérivée du volume = aire**” est-elle vraie pour d’autres solides, par exemple le cube ?

En dimension trois, un cube de côté C a pour volume et aire

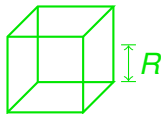
$$C^3 \quad \text{et} \quad 6 C^2.$$



Bof ...

Oui, mais si nous considérons plutôt $R = C/2$, les volume et aire sont

$$8R^3 \quad \text{et} \quad 24 R^2.$$



Chouette, ça marche encore !

Autre question de curiosité : et la dérivée seconde du volume ?

Pour le cube, $48 R$ donne deux fois la mesure totale des arêtes.

Laissons cela pour un autre exposé.

Revenons à l'aire $a_d(R)$ de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition

$$a_d(R) = \begin{cases} \frac{2}{(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \cdots \frac{1}{2}} \pi^k R^{d-1} & \text{si } d = 2k + 1, \\ \frac{2}{(k - 1)(k - 2) \cdots 1} \pi^k R^{d-1} & \text{si } d = 2k. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de dériver par rapport à R les formules pour le volume :

$$v_d(R) = \begin{cases} \frac{1}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \cdots \frac{1}{2}} \pi^k R^d & \text{si } d = 2k + 1, \\ \frac{1}{k(k - 1) \cdots 1} \pi^k R^d & \text{si } d = 2k. \end{cases}$$

□

Il vient

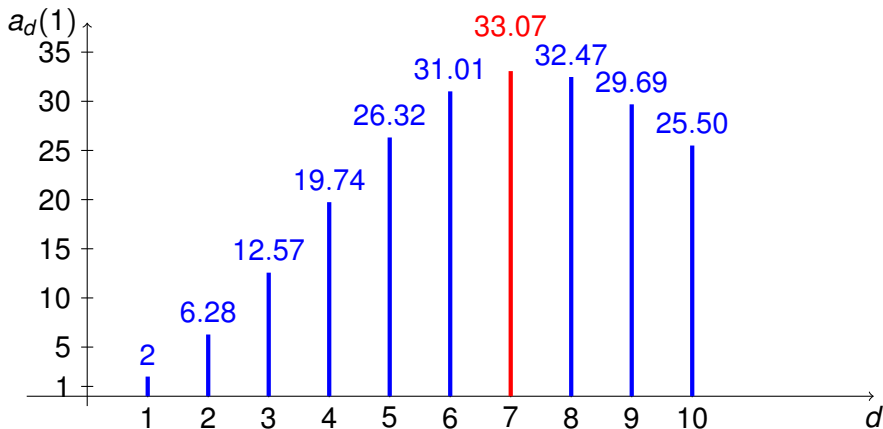
$$\frac{a_d(R)}{a_{d-2}(R)} = \frac{2}{d-2} \pi R^2.$$

Pour les aires des boules unités :

$$\frac{a_d(1)}{a_{d-2}(1)} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi > d-2 \quad \Longleftrightarrow \quad d \leq 8.$$

- ▶ La suite des $a_{2k+1}(1)$ croit puis décroît, atteignant son maximum pour $d = 7$;
- ▶ la suite des $a_{2k}(1)$ croit puis décroît, atteignant son maximum pour $d = 8$.
- ▷ On montre encore que la suite des $a_d(1)$ croit puis décroît, atteignant son maximum pour $d = 7$.
- ▶ La suite des $a_d(1)$ tend vers 0.

Aire $a_d(1)$ de la boule unité pour de petites dimensions



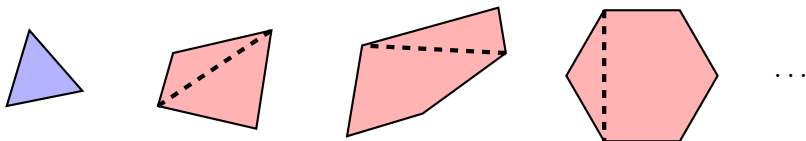
$$a_{100}(1) = \frac{2}{49!} \pi^{50} \approx 10^{-39}$$

- 1.- La sphère qui se voulait plus grosse que le cube
- 2.- La boule de rayon 1 de plus grand volume
- 3.- La boule de rayon 1 de plus grande aire
- 4.- Des polytopes à graphe complet existent-ils ?

Existe-t-il des polytopes à graphe complet
qui ne soient pas des simplexes ?

“Polytope” signifie ici “polytope convexe dans $\mathbb{R}^d$ ”.

Parmi les polygones convexes de dimension 2

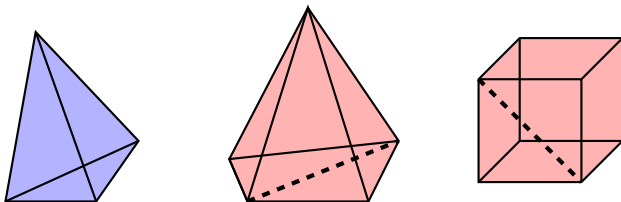


seul le triangle a un graphe complet.

Evident ... Faut-il une démonstration ?

Chaque sommet d'un polygone convexe appartient à au plus deux arêtes !

Parmi les polyèdres convexes de dimension 3



seuls les tétraèdres ont un graphe complet.

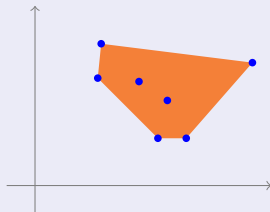
Deux pistes de démonstration. Soit P un polyèdre (sous-entendu borné) à graphe complet :

- ▶ une “bonne” projection de P sur une face de P donne une représentation plane d’un graphe complet; ceci n’existe que pour au plus 4 sommets;
- ▶ d’après le résultat analogue en 2D, les faces de P sont des triangles. Etc.

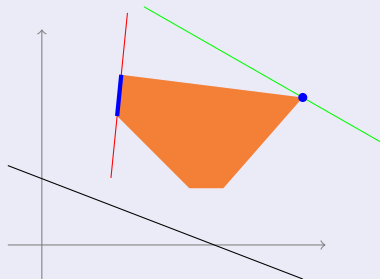
Voir MATH-F-319 pour une preuve rigoureuse complète (par ex., utilisant le théorème de Radon).

Définitions

Un **polytope** P de $\mathbb{R}^d$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.



Une **face** de P est soit P , soit l'intersection de P avec un hyperplan contenant P dans un de ses deux côtés (fermés).



Définitions (suite)

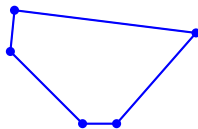
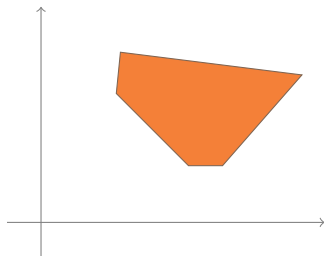
Une **facette** de P est une face de dimension $\dim P - 1$.

(ou une face propre maximale—comme démontrable).

Un **sommet** de P est un point q tel que $\{q\}$ est une face de P .

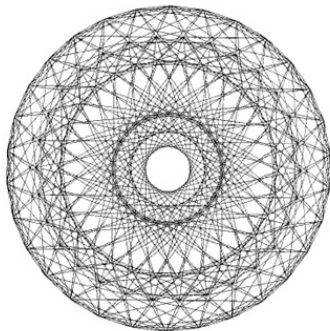
Une **arête** de P est une face de dimension 1.

Le **graphe** de P a pour **sommets** les sommets de P et pour **arêtes** les arêtes de P .



Graphe du 120-cellule

(un polytope régulier de dimension 4 ayant 600 sommets) :



(dû à VAN OSS, 1901, et connu via le frontispice de COXETER, *Regular Polytopes*, 1948)

Si j'avais le temps, je vous parlerais de

ALICIA BOOLE STOTT (Cork 1860 – Highgate 1940) !

En dimension supérieure à 3, existe-t-il des polyèdres à graphe complet ?

Proposition

Si $d \geq 4$ et $n \geq d + 1$, il existe un polyèdre

- ▷ *de dimension d ,*
- ▷ *ayant n sommets,*
- ▷ *dont le graphe est complet.*

Waouw !

Une conséquence parmi d'autres : en général, le graphe d'un polyèdre ne détermine pas la dimension du polyèdre.

Historique (GRÜNBAUM, 2003, page 127) :

- ▷ KUHN (19??) “tombe” sur un exemple de dimension 11 avec 24 sommets, puis GALE (1955) élabore la théorie;
- ▷ mais auparavant CARATHÉODORY (1907, 1911) (et encore d'autres auteurs). Nous reviendrons là-dessus.

794. David Gale: *On convex polyhedra.*

Let V be the set of vertices of a convex polyhedron P . The vertices belonging to a subset S of V are called *neighbors* if S is the intersection of V with a supporting hyperplane to P . If every m vertices of V are neighbors then P is called *m -neighborly*. Suppose P is k -dimensional and m -neighborly, $m \leq k$. If $k < 2m$, one easily shows that P must be a k -simplex. It is shown, on the other hand, that if $k \geq 2m$, then P may have any number of vertices. As a special case this shows that there exist polyhedra in 4-space with arbitrarily many vertices every two of which are connected by an edge. (Received July 7, 1955.)

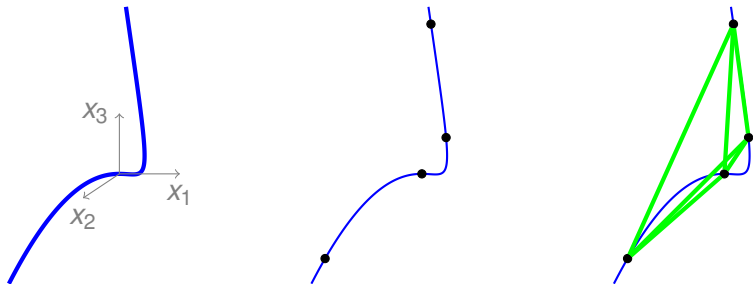
Bulletin of the American Mathematical Society 61(1955), 556.

Démonstration (début).

La **courbe des moments** est l'image de l'application bijective et lisse

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d : t \mapsto (t, t^2, \dots, t^d).$$

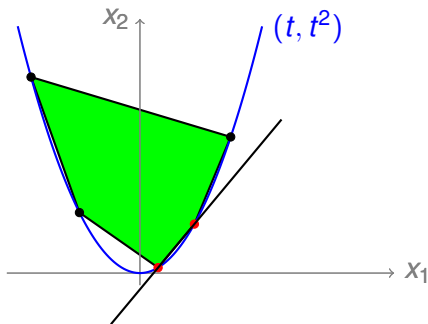
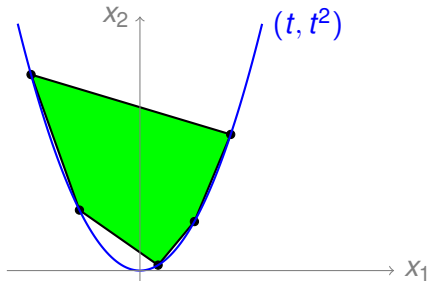
Soit A un ensemble de n points de la courbe des moments.



L'enveloppe convexe $\text{conv}(A)$ de ces n points donne l'exemple cherché.

Mais pourquoi donc ? Voir la suite : d'abord deux lemmes.

En dimension 2 avec 5 points :



Lemme (1)

Dans $\mathbb{R}^d$, tout ensemble de $d + 1$ points de la courbe des moments est affinement indépendant.

Preuve.

Pour $d + 1$ réels $u_1, u_2, \dots, u_{d+1}$ distincts, prenons les $d + 1$ points

$$\gamma(u_1), \quad \gamma(u_2), \quad \dots, \quad \gamma(u_{d+1}).$$

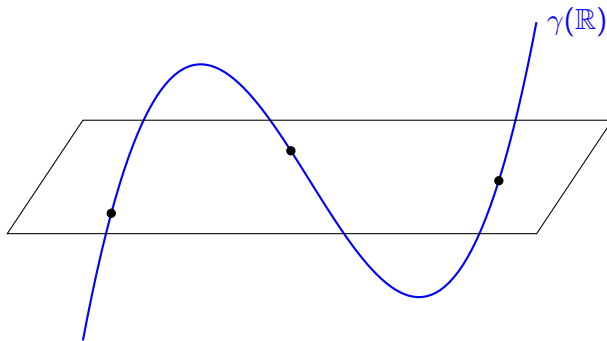
Il vient

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma(u_1) \\ 1 & \gamma(u_2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \gamma(u_{d+1}) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & u_1 & (u_1)^2 & \dots & (u_1)^d \\ 1 & u_2 & (u_2)^2 & \dots & (u_2)^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_{d+1} & (u_{d+1})^2 & \dots & (u_{d+1})^d \end{pmatrix} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^d (u_j - u_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Lemme (2)

Dans $\mathbb{R}^d$, tout ensemble de d points de la courbe des moments est contenu dans un unique hyperplan, traversé par la courbe en chacun de ces d points.

Exemple pour $d = 3$.



Preuve du Lemme (2).

Pour d réels $u_2, u_3, \dots, u_{d+1}$ distincts, les d points

$$\gamma(u_2), \quad \gamma(u_3), \quad \dots, \quad \gamma(u_{d+1})$$

de la courbe des moments sont affinement indépendants (Lemme (1)).

Ils déterminent l'hyperplan d'équation

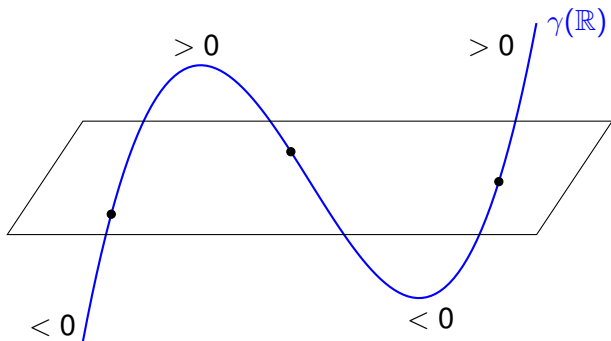
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_d \\ 1 & u_2 & (u_2)^2 & \dots & (u_2)^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_{d+1} & (u_{d+1})^2 & \dots & (u_{d+1})^d \end{pmatrix} = 0.$$

Le membre de gauche évalué en un point quelconque $\gamma(t)$ de la courbe des moments vaut

$$\prod_{\substack{i,j=2 \\ i < j}}^d (u_j - u_i) \cdot \prod_{k=2}^d (u_k - t).$$

Lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, il change de signe chaque fois que t franchit un des u_k .

Exemple pour $d = 3$.

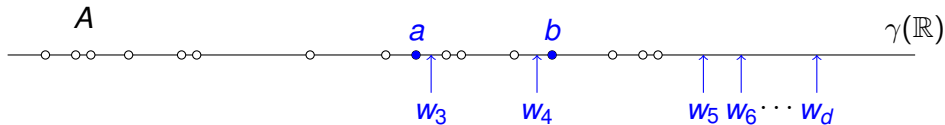


Démonstration de la proposition (fin).

Soit un ensemble A de n points de la courbe des moments $\gamma(\mathbb{R})$.

Soit a et b deux éléments de A .

Montrons que a et b sont deux sommets adjacents du polytope $\text{conv}(A)$.



Choisissons sur $\gamma(\mathbb{R})$ un point w_3 “proche” de a et un point w_4 “proche” de b ,

puis $d - 4$ points $w_5, w_6, \dots, w_d$ au-delà de A .

L’hyperplan par $a, b, w_3, w_4, \dots, w_d$ montre que a et b sont deux sommets adjacents.

En effet, $A \setminus \{a, b\}$ est dans un seul côté ouvert de cet hyperplan. $\square$

L'argument s'applique encore à $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ sommets de A .

Définition

Soit A un ensemble de n points de la courbe des moments, $n \geq d + 1$.
Le **polytope cyclique** $C_d(A)$ dans $\mathbb{R}^d$ est $\text{conv}(A)$.

Proposition

- a) Le polytope cyclique $C_d(A)$ est de dimension d et possède $n = |A|$ sommets.
- b) Ses faces propres sont toutes des simplexes.
- c) Tout ensemble d'au plus $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ sommets de $C_d(A)$ est l'ensemble des sommets d'une face de $C_d(A)$.
- d) Un ensemble S de d sommets est l'ensemble des sommets d'une **facette** (face de dimension $d - 1$) si et seulement si
"entre" deux sommets quelconques de $A \setminus S$ il y a un nombre pair de sommets de S .

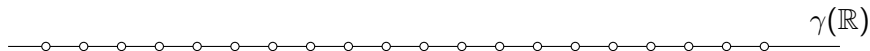
La structure combinatoire de $C_d(A)$ ne dépend que de d et n ; $C_d(n)$.

Le dernier critère,

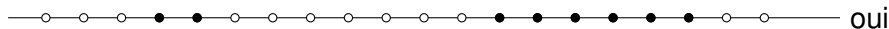
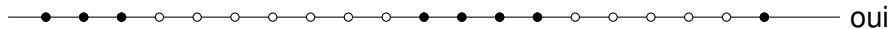
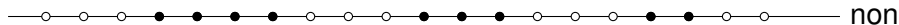
*entre deux sommets quelconques de $A \setminus S$,
il y a un nombre pair de sommets de S ,*

est dû à Gale (1963).

Illustrations pour $d = 8$ et $n = 20$ (avec $S = \{\bullet\}$ et $A \setminus S = \{\circ\}$).



Les huit sommets noirs sont-ils les sommets d'une facette ?



Nous venons de travailler en dimension 8, **waouw !**

Pour la culture générale, voici un résultat dû à **McMULLEN** (1970), suite à une conjecture de **MOTZKIN** (1957).

Théorème

Soit un naturel k tel que $-1 \leq k \leq d$.

Parmi tous les polytopes de dimension d ayant n sommets, les polytopes cycliques $C_d(n)$ maximisent le nombre de faces de dimension k .

Pour $k = d - 1$ (facettes), le maximum en question vaut

$$f_{d-1} = \binom{n - \lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} + \binom{n - 1 - \lceil \frac{d-1}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}.$$

D'après GRÜNBAUM (2003), CARATHÉODORY a découvert les “polytopes cycliques”.



CONSTANTIN CARATHÉODORY (Berlin 1873 – Munich 1950)

CONSTANTIN CARATHÉODORY (Berlin 1873 – Munich 1950)

(sélection dans MacTutor)

- ◇ 1875 arrivée à Bruxelles, où son père est ambassadeur de l'empire ottoman;
- ◇ 1885 installation à Bruxelles;
- ◇ 1886–1891 études à l'Athénée (Royal) d'Ixelles;
(2 fois) prix du meilleur élève en mathématiques en Belgique;
- ◇ 1893–1896 études d'ingénieur à l'Ecole (Royale) Militaire;
- ◇ 1897–1900 ingénieur en Egypte;
- ◇ 1900–1902 université de Berlin;
- ◇ 1902–1908 université de Göttingen;
thèse en 1904;
habilitation en 1905;
- ◇ été 1907 : séjour à Bruxelles;
- ◇ 1906 soumission du papier CARATHÉODORY (1907)
- ◇ 1911 soumission du papier CARATHÉODORY (1911)

Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen.

Von

C. CARATHÉODORY in Göttingen.

Einleitung.

Ist eine analytische Funktion y der komplexen Veränderlichen z gegeben, die für $z = 0$ den Wert $y = A_0$ annimmt und in der Umgebung dieses Punktes regulär ist, im Inneren des Kreises $|z| < \varrho$ aber gewissen Beschränkungen unterworfen wird, so entsteht die Frage, ob nicht auch dadurch zugleich für die Koeffizienten des Funktionselements

$$y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k,$$

das die Funktion darstellt, Beschränkungen entstehen, welche bestimmt werden können.

Ein spezieller Fall dieser Art von Fragen kommt bei der bekannten

hängend ist.

Man kann ferner die Theorie, wie ich es in meiner Comptes Rendus Note (26. Dezember 1905) angedeutet habe, auch auf solche Fälle erstrecken, bei welchen der Punkt $u = M_0$ des Gebietes T singulär ist, die Funktion $u(r)$ aber auf T eindeutig bleibt; dann besitzt die Funktion $u(z)$ zwar auch eine Singularität für $z = 0$, aber die Potenzreihe (41) ist trotzdem regulär in diesem Punkte und dieses genügt, um auch hier den Körper K_n aufzustellen.

Brüssel, den 14. September 1906.

Mathematische Annalen 64(1907), 95–115

ÜBER DEN VARIABILITÄTSBEREICH DER FOURIER'SCHEN KONSTANTEN VON POSITIVEN HARMONISCHEN FUNKTIONEN.

Von **C. Carathéodory** (Breslau).

Adunanza del 26 marzo 1911.

EINLEITUNG.

1. Die folgende Arbeit schliesst sich Untersuchungen an, die ich im Zusammenhange mit dem PICARD'schen Satz im Band LXIV der Mathematischen Annalen ¹⁾ verfolgt habe. Seit dieser Publikation habe ich nicht nur neue Resultate gewonnen sondern auch die Darstellung des Ganzen in eine übersichtlichere Form gebracht. Deshalb schien es mir zweckmässig die vorliegende Arbeit unabhängig von dem Früheren zu gestalten.

besitzt; ihr $(n+p)^{\text{ter}}$ geometrischer Representant wird auf der Begrenzung von $K_{2(n+p)}$ liegen und als Schwerpunkt von n diskreten Massen auf der Normkurve dargestellt sein. Es sind also die Koeffizienten a_{n+p} , $\bar{a}_{n+p}$ durch die $a_1, \bar{a}_1, \dots, a_n, \bar{a}_n$ *eindeutig* bestimmt. Es gibt daher nur eine Funktion, die unseren Bedingungen genügt und sie muss mit der von uns aufgestellten zusammenfallen.

Breslau, März 1911.

C. CARATHÉODORY.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32(1911), 193–217

Les polytopes cycliques
ont-ils été découverts/inventés
par CARATHÉODORY à Bruxelles ?

Sans doute, mais ... il y a (au moins) deux objections possibles :

CARATHÉODORY était-il vraiment à Bruxelles ?

CARATHÉODORY (1907) concerne-t-il des polytopes ?

CARATHÉODORY (1907) considère la courbe C de paramétrisation

$$\delta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{2k} : t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t & \cos 2t & \cos 3t & \dots & \cos kt \\ \sin t & \sin 2t & \sin 3t & \dots & \sin kt \end{pmatrix}$$

et étudie son enveloppe convexe (contenue dans $B(o, \sqrt{k})$)

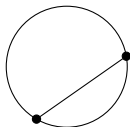
$$G = \text{conv } \delta([0, 2\pi]).$$

Lemme (2, coupé/collé)

Dans $\mathbb{R}^{2k}$, tout ensemble de $2k$ points de la courbe C est contenu dans un unique hyperplan,

???? traversé par la courbe en chacun de ces $2k$ points.

Exemple pour $k = 1$:



Et pour $k = 2$?

CARATHÉODORY (1911) signale que la courbe des moments convient tout autant.

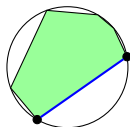
Proposition (CARATHÉODORY, 1907)

L'enveloppe convexe de k points quelconques de la courbe C est contenue dans la frontière de son enveloppe convexe G .

Il découle de ce qui précède :

Proposition

*Dans $\mathbb{R}^{2k}$, soit X un sous-ensemble fini de C .
Tout ensemble d'au plus k points de X est
l'ensemble des sommets d'une face du
polytope $\text{conv } X$.*



Je triche !

CARATHÉODORY (1911) montre encore que G est contenu dans une certaine surface algébrique.

Pour rappel, le point de départ de CARATHÉODORY (1907, 1911) est l'étude de certaines fonctions complexes régulières.

- 1.- La sphère qui se voulait plus grosse que le cube
- 2.- La boule de rayon 1 de plus grand volume
- 3.- La boule de rayon 1 de plus grande aire
- 4.- Polytopes à graphe complet
- 5.- Polytopes réguliers

Classification des polytopes réguliers

“Régulier” signifie que le groupe des isométries du polytope agit transitivement sur les drapeaux maximaux du polytope.

Cf. exposé de **NOÉ BERGER** : la classification à similitude près est :

dimension	nombre de polytopes réguliers	nombres de leurs facettes
1	1	2
2	∞	3, 4, 5, ...
3	$1 + 2 + 2$	4, 6, 8, 12, 20
4	$1 + 2 + 1 + 2$	5, 8, 16, 24, 120, 600
5	3	6, 10, 32
6	3	7, 12, 64
7	3	8, 14, 128
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
d	3	$d + 1, 2d, 2^d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

où $d \geq 5$.

Résumons pour les dimensions ≥ 3 :

Trois grandes familles :

- 1) les simplexes;
- 2) les cubes;
- 3) les octaèdres.

En dimension 3 s'ajoutent

- ▷ le dodécaèdre;
- ▷ l'icosaèdre.

En dimension 4 s'ajoutent

- ▷ le 24-cellule;
- ▷ le 120-cellule;
- ▷ le 600-cellule.

Certains polytopes réguliers sont ‘duaux’ l’un de l’autre :

le cube et l’octaèdre de même dimension ($d \geq 3$);

le dodécaèdre et l’icosaèdre ($d = 3$);

le 120-cellule et le 600-cellule ($d = 4$).

Et certains sont ‘autoduaux’ :

chaque polygone convexe ($d = 2$);

le tétraèdre en toute dimension ($d \geq 1$);

le 24-cellule ($d = 4$).

Définition

Deux polytope sont **duaux** si leurs treillis de faces sont ‘duaux’ ou ‘anti-isomorphiques’.

La ‘polarité’ délivre des paires de polytopes duaux, et même des autoduaux.

Utilisons le produit scalaire entre vecteurs de $\mathbb{R}^d$ localisés à l'origine :

$$(y_1, y_2, \dots, y_d) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_d) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_d x_d.$$

Définition

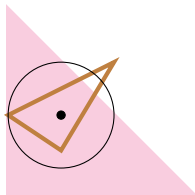
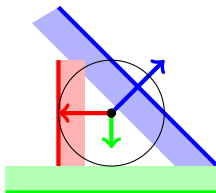
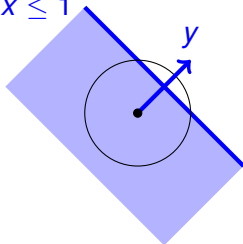
Pour $P \subset \mathbb{R}^d$, le **polaire** P^Δ de P est

$$P^\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall y \in P : y \cdot x \leq 1\}.$$

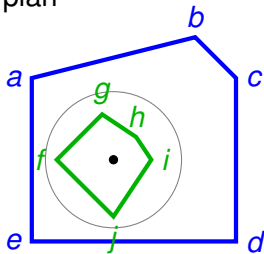
Pour un vecteur y , la formule $y \cdot x \leq 1$ décrit un demi-espace de bord orthogonal à y et contenant o ; la distance de son bord à o vaut $\frac{1}{\|y\|}$.

Pour $d = 2$:

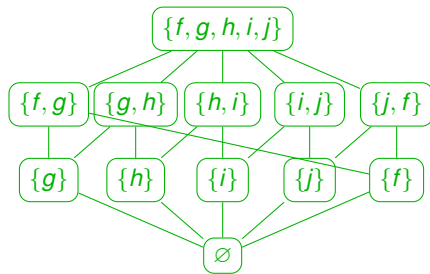
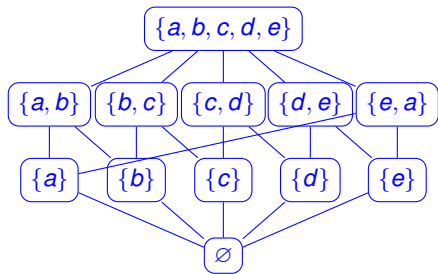
$$y \cdot x \leq 1$$



Voici encore un exemple plan



avec les treillis des faces des deux polytopes :



Les deux treillis sont anti-isomorphiques (ou duaux).

Proposition

Soit P un polytope de $\mathbb{R}^d$ contenant o dans son intérieur.

- ▷ *Le polaire P^Δ de P est aussi un polytope de $\mathbb{R}^d$ contenant o dans son intérieur.*
- ▷ *$(P^\Delta)^\Delta = P$.*
- ▷ *Le treillis des faces de P^Δ est anti-isomorphe au treillis des faces de P .*
- ▷ *Si P est régulier, alors P^Δ aussi.*

- 1.- La sphère qui se voulait plus grosse que le cube
- 2.- La boule de rayon 1 de plus grand volume
- 3.- La boule de rayon 1 de plus grande aire
- 4.- Polytopes à graphe complet
- 5.- Polytopes réguliers
- 6.- Nombres de faces d'un polytope

Nombres de faces d'un polytope

Pour un polytope P de dimension d , notons $f_k = f_k(P)$ le nombre de ses faces de dimension k ; ici, $-1 \leq k \leq d$.

Clairement, $f_{-1} = 1$ et $f_d = 1$. De plus,

f_0 est le nombre de sommets de P ,

f_{d-1} est le nombre de facettes de P .

Exemples en dimension 3 :

polyèdre	f_0	f_1	f_2
simplexe	4	6	4
cube	8	12	6
octaèdre	6	12	8
dodécaèdre	20	30	12
icosaèdre	12	30	20

En plus de $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, notons $f_0 \leq f_1 \geq f_2$.

Exemples en dimension 4 :

polyèdre	f_0	f_1	f_2	f_3
simplexe	5	10	10	5
cube	16	32	24	8
octaèdre	8	24	32	16
24-cellule	24	96	96	24
120-cellule	600	1200	720	120
600-cellule	120	720	1200	600

En plus de $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$, notons que le vecteur (f_0, f_1, f_2, f_3) est 'unimodal'.

Définition

Un vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ de réels est **unimodal** s'il existe un naturel k tel que $1 \leq k \leq d$ et

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \geq x_{k+1} \geq x_{k+2} \geq \dots \geq x_d.$$

Conjecture (MOTZKIN, ± 1957)

Pour tout polytope convexe, le vecteur $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{d-1}, f_d)$ de ses nombres de faces est unimodal.

ECKHOFF (1985) construit

▷ un contre-exemple en dimension 8, ayant 7 149 sommets :

$(1, 7\,149, 28\,800, 46\,800, 46\,400, 46\,400, 46\,800, 28\,800, 7\,149, 1)$;

▷ un autre en dimension 9 ayant 1 447 sommets :

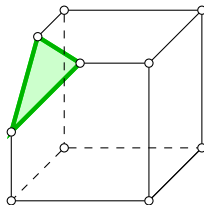
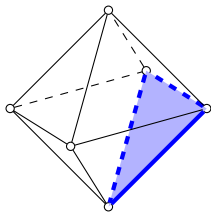
$(1, 1\,447, 6\,588, 12\,984, 15\,618, 15\,552, 15\,618, 12\,984, 6\,588, 1\,447, 1)$.

Idée de la construction : coller ensemble d'une 'certaine manière'

un polytope cyclique bien choisi et

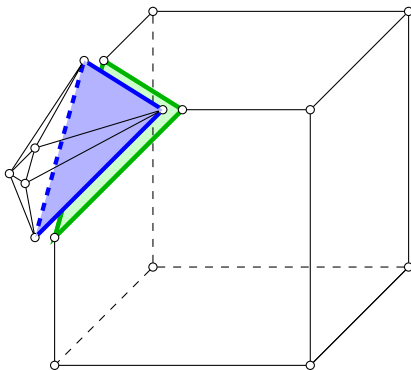
le dual une fois 'écorné' d'un polytope cyclique bien choisi.

Prenons l'exemple de $C_3(6)$ et du dual de $C_3(6)$,
combinatoirement un octaèdre et un cube. Nous écornons ce dernier
en un sommet.



Il faut d'abord “égaliser” les deux faces à coller,
par ex. grâce à une affinité bien choisie

et afin d'obtenir un polytope, “adapter” un des deux polytopes initiaux,
par ex. grâce à une projectivité.



(figure imparfaite)

nom	polytope	f_0	f_1	f_2
octaèdre	$C_3(6)$	6	12	8
cube	$(C_3(6))^\Delta$	8	12	6
résultat		$6 + 8 - 1$	$12 + 12$	$8 + 6 - 1$

Pour le premier exemple ci-dessus, dû à **ECKHOFF** (1985) :

on “colle” $C_8(25)$ et $(C_8(25))^\Delta$ écorné en un sommet :

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$C_8(25)$	25	300	2 300	12 650	33 750	44 500	28 500	7 125
$(C_8(25))^\Delta$	7 125	28 500	44 500	33 750	12 650	2 300	300	25
résultat	7 149	28 800	46 800	46 400	46 400	46 800	28 800	7 149

Le polytope obtenu ne satisfait pas l'unimodalité.

MAJOR (2013) établit l'unimodalité du nombre de faces du polytope cyclique $C_d(n)$,

en la déduisant de la **log-concavité** : pour $0 \leq i \leq d-2$,

$$f_{i-1} f_{i+1} \leq (f_i)^2.$$

Proposition (MOTZKIN, 1957; GRÜNBAUM, 1967; SHEPHARD, 1968)

Pour le polytope cyclique $C_d(n)$ et $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$,

$$f_k = \binom{n}{k+1};$$

plus généralement pour $0 \leq k \leq d-1$, si d est pair

$$f_k = \sum_{j=1}^{d/2} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} \binom{j}{k+1-j}$$

et si d est impair

$$f_k = \sum_{j=0}^{(d-1)/2} \frac{k+2}{j+1} \binom{n-j-1}{j} \binom{j+1}{k+1-j}.$$

Définition

Un polytope est **simplicial** si toutes ses faces propres sont des simplexes.

Remarque. Il suffit d'imposer que les facettes sont des simplexes.

Exemples.

- ▷ les polygones,
- ▷ les simplexes,
- ▷ les octaèdres (mais pas les cubes),
- ▷ l'icosaèdre (mais pas le dodécaèdre),
- ▷ le 24-cellule,
- ▷ le 600-cellule (mais pas le 120-cellule),
- ▷ les polytopes cycliques.

BJÖRNER (1981) et **ECKHOFF** (1985) établissent l'unimodalité du nombre de faces d'un polytope simplicial si la dimension est ≤ 19 ,

mais **BJÖRNER** (1981) et **LEE** (1985) fournissent un contre-exemple simplicial en dimension 20.

- 1.- La sphère qui se voulait plus grosse que le cube
- 2.- La boule de rayon 1 de plus grand volume
- 3.- La boule de rayon 1 de plus grande aire
- 4.- Polytopes à graphe complet
- 5.- Polytopes réguliers
- 6.- Non-unimodalité des nombres de faces
- 7.- Conjecture de Hirsch

Conjecture de Hirsch

Définition

Le **diamètre** δ d'un graphe est la plus grande des distances entre paires de sommets
(cette distance étant le nombre d'arêtes sur un plus court chemin joignant les deux sommets en question).

Conjecture (lettre de HIRSCH à DANTZIG, 1957)

Pour un polytope P de dimension d ayant $f = f_{d-1}$ facettes et un graphe de diamètre δ : $\delta \leq f - d$.

Exemples :

d	polytope	f	$f - d$	δ
2	polygone	f	$f - 2$	$\lfloor f/2 \rfloor$
3	cube	6	3	3
3	octaèdre	8	5	2
d	simplexe	$d + 1$	1	1
d	$C_d(n)$	grand(?)	grand(?)	1

Quelques-uns des résultats positifs successifs à propos de la conjecture de **HIRSCH**, $\delta \leq f - d$:

Proposition

Soit P un polytope de dimension d , ayant f facettes et dont le graphe est de diamètre δ . L'inégalité $\delta \leq f - d$ est satisfaite

- a) lorsque $d \leq 3$ (**KLEE**, 1964);
- b) lorsque $f \leq d + 5$ (**KLEE** et **WALKUP**, 1967);
- c) lorsque $f \leq d + 6$ (**BREMNER** et **SCHEWE**, 2011);
- d) si P est le dual d'un polytope cyclique (**KLEE**, 1966);
- e) si P est un polytope 0/1 (**NADDEF**, 1989).

*L'inégalité est toujours vraie dès qu'elle vraie pour les polytopes ayant $f = 2d$ (**KLEE** et **WALKUP**, 1967).*

La conjecture de Hirsch est ramenée à " $f = 2d \Rightarrow \delta \leq d$?".

Le d -cube donne l'égalité; pour $d = 3$:



Un coup de tonnerre en mai 2010, à l'annonce de

Proposition (SANTOS, 2012)

Il existe un polytope de dimension $d = 43$ ayant $f = 86$ facettes et de diamètre au moins 44.

Depuis, MATSCHKE, SANTOS et WEIBEL (2012+) ont obtenu un contre-exemple en dimension $d = 20$.

Note au bas de la première page de SANTOS (2012) :

I met Vic Klee only once, when I visited the University of Washington to give a seminar talk.

Although he was retired—he was already 76 years old²—he came to the Department of Mathematics to talk to me and we had a nice conversation during which he asked me

“Why don’t you try to disprove the Hirsch Conjecture?”

This work is the answer to that question.

Extrait de SANTOS (2013):

the polymath 3 project, a web-based collective effort trying to prove an upper bound of type $n \cdot d$ for the diameters of polyhedra and of more general objects

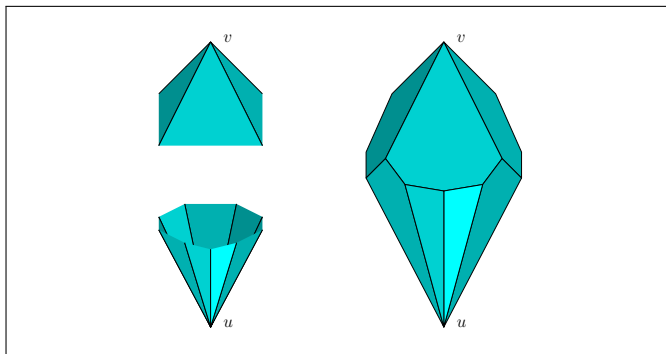
²donc en 2001 ou 2002

Etapes principales de la construction du contre-exemple de SANTOS (2012).

Définition

Un **fuseau** de **pointes** u et v est un polytope dont u et v sont deux sommets tels que chaque facette contient au moins un de ces deux sommets.

La **longueur** de ce fuseau est la distance entre u et v dans le graphe.



Proposition (SANTOS, 2012)

Il existe un fuseau de dimension $d = 5$ avec $f = 48$ facettes et une longueur $\ell = 6$.

Le fuseau en question a 48 sommets (on s'en fiche).

Proposition (SANTOS, 2012)

*L'existence d'un fuseau
de dimension d avec f facettes et une longueur ℓ
implique l'existence d'un fuseau
de dimension $f - d$ avec $2f - 2d$ facettes et une longueur
d'au moins $\ell + f - 2d$.*

Corollaire (SANTOS, 2012)

Il existe un fuseau de dimension $d = 43$ avec $f = 86$ facettes et une longueur $\ell \geq 44$.

Ce dernier fuseau contredit $\delta \leq f - d$. Il a 322 sommets.

Synthèse de la construction :

	dimension	n. de facettes	longueur
fuseau initial	d	f	ℓ
fuseau construit	$f - d$	$2f - 2d$	$\geq \ell + f - 2d$

La construction se fait en répétant $f - 2d$ fois le même pas :

	dimension	n. de facettes	longueur
fuseau initial	d	f	ℓ
fuseau suivant	$d + 1$	$f + 1$	$\geq \ell + 1$
fuseau suivant	$d + 2$	$f + 2$	$\geq \ell + 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
fuseau construit	$f - d$	$2f - 2d$	$\geq \ell + f - 2d$

Décrivons le pas de la construction en termes duaux.

Définition

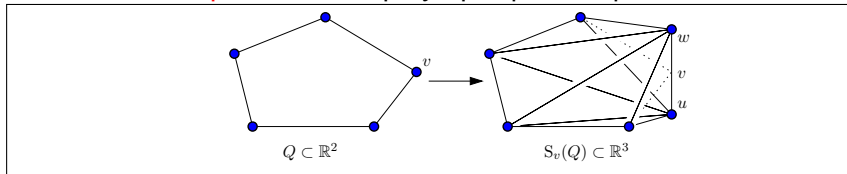
Un **prismatoïde** est un polytope dont tous les sommets sont dans l'union de deux facettes parallèles.

Exemples : cubes, prismes; octaèdres, “antiprismes”.

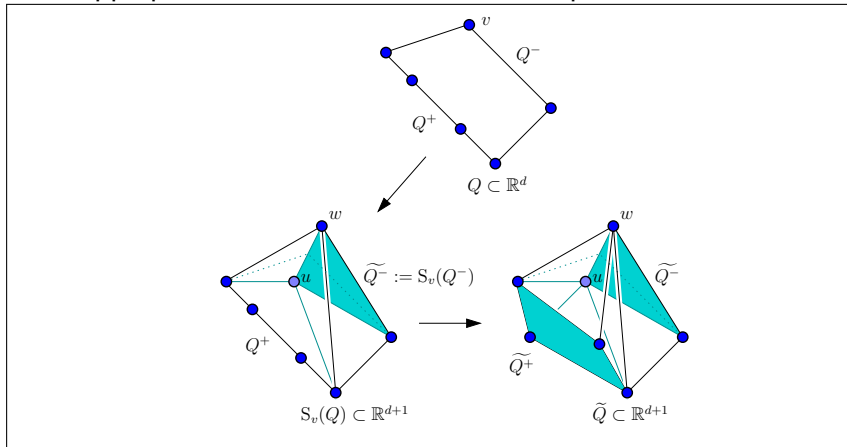
Le pas de construction vu dualement :

	dimension	n. de sommets	longueur duale
prismatoïde donné	d	n	ℓ'
prismatoïde déduit	$d + 1$	$n + 1$	$\geq \ell' + 1$

On utilise la **suspension** d'un polytope quelconque Q en un sommet v :



et on applique cela à un des sommets v du prismatoïde :



Bien des “réglages” sont encore nécessaires.

Voir les articles de SANTOS (et aussi le mémoire de DE WIT, 2011).

- 1.- La sphère qui se voulait plus grosse que le cube
- 2.- La boule de rayon 1 de plus grand volume
- 3.- La boule de rayon 1 de plus grande aire
- 4.- Polytopes à graphe complet
- 5.- Polytopes réguliers
- 6.- Unimodalité des nombres de faces
- 7.- Conjecture de Hirsch
- 8.- Echantillonnage

Echantillonnage dans le cube

Merci à Yvik Swan de m'avoir communiqué l'an passé

KÖPPEN, The Curse of Dimensionality (2000).

J'ai recouru aussi à wikipedia et quelques-uns des articles y référés.

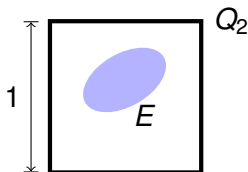
L'expression **curse of dimensionality** est due à
RICHARD BELLMAN (l'auteur de *Dynamic programming*, 1957).

Deux traductions parmi d'autres :
le **fléau de la dimension**,
la **malédiction de la dimension**.

“Cela désigne divers phénomènes qui ont lieu lorsque l'on cherche à analyser ou organiser des données dans des espaces de grande dimension alors qu'ils n'ont pas lieu dans des espaces de dimension moindre.” [wikipédia]

“L'idée générale est que lorsque le nombre de dimensions augmente, le volume de l'espace croît rapidement si bien que les données se retrouvent 'isolées' et deviennent éparses.” [wikipédia]

Soit Q_d le cube unité de côté 1.

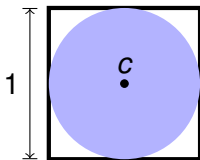


Tirons un point au hasard dans Q_d , uniformément, et désignons par X la variable aléatoire correspondante (voir exposé d'**YVIK SWAN** pour les définitions rigoureuses).

Donc, si E est un sous-ensemble 'mesurable' de Q_d ,

$$\text{Prob}(X \in E) = \text{vol}(E) = \int_E \mathbf{1}.$$

Quelle est la probabilité que X soit à distance plus petite ou égale à $\frac{1}{2}$ du centre c du cube ?



Elle vaut

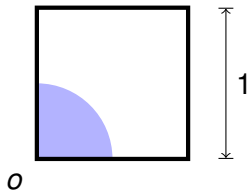
$$\text{vol}(B(c, 1/2)) = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2) \Gamma(d/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^d.$$

Lorsque $d \rightarrow \infty$, cette quantité tend très, très rapidement vers 0.

En grande dimension, le point échantillonné sera généralement “loin” du centre.

Fixons-nous un sommet du cube Q_d , par exemple l'origine.

Quelle est la probabilité que X soit à distance plus petite ou égale à $\frac{1}{2}$ du sommet o ?



Elle vaut

$$\frac{1}{2^d} \text{vol}(B(o, 1/2)) = \frac{1}{2^d} \frac{\pi^{d/2}}{(d/2) \Gamma(d/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^d.$$

A nouveau, lorsque $d \rightarrow \infty$, cette quantité tend très, très, très rapidement vers 0.

Ni proche de l'origine, ni proche d'un sommet, mais où donc est-il ?

(je parle du point uniformément aléatoire X dans le cube Q_d)

Mais tout simplement dans le cube, là où il y a beaucoup de place !

Rappelez-vous que la diagonale est de longueur $\sqrt{d}$.

Le point

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4} \right)$$

est à distance au moins $(\sqrt{d})/4$ de chaque sommet et du centre.

Voici l'évocation par KÖPPEN (2000) du cube de grande dimension :

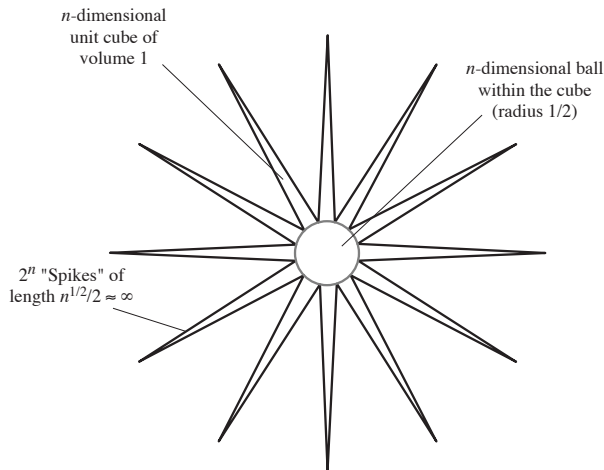


Figure 4: "Spiking Hypercube" [4].

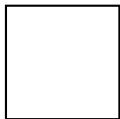
Comment se répartit la distance entre le point uniformément aléatoire X et le sommet origine du cube Q_d ?

Cette distance est une variable aléatoire; notons-la $D = |Xo|$.

En dimension 2, calculons explicitement sa fonction de répartition F , avec $F(r) = \text{Prob}(D \leq r)$.

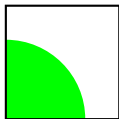
Il y a quatre cas :

$$r \leq 0$$



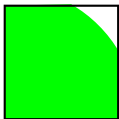
$$F(r) = 0$$

$$0 < r \leq 1$$



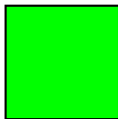
$$F(r) = \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$1 < r \leq \sqrt{2}$$



$$F(r) = ???$$

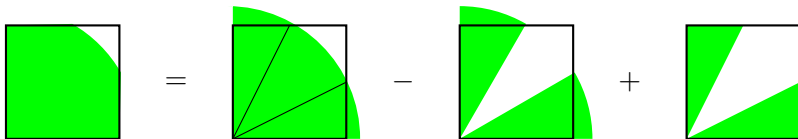
$$\sqrt{2} < r$$



$$F(r) = 1$$

Voyons de plus près le troisième cas.

Reprenons le cas où $1 < r \leq \sqrt{2}$:



Tous calculs faits,

$$F(r) = r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r} \right) + \sqrt{r^2 - 1}.$$

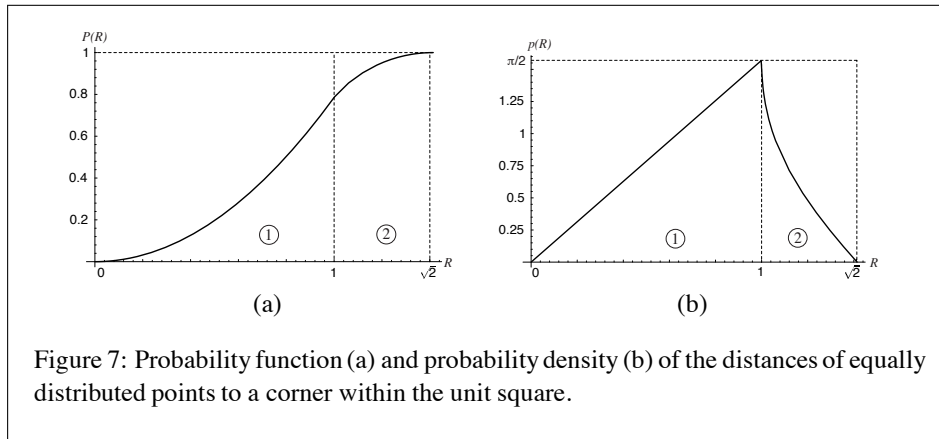
On obtient la fonction de répartition pour la distance d'un point aléatoire du cube à un sommet fixé (l'origine, par ex.) :

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0; \\ \frac{\pi}{4} r^2 & \text{si } 0 < r \leq 1; \\ r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r} \right) + \sqrt{r^2 - 1} & \text{si } 1 < r \leq \sqrt{2}; \\ 1 & \text{si } \sqrt{2} < r. \end{cases}$$

et, après dérivation, la fonction f de densité :

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0; \\ \frac{\pi}{2} r & \text{si } 0 < r \leq 1; \\ r \left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos \frac{1}{r} \right) & \text{si } 1 < r \leq \sqrt{2}; \\ 0 & \text{si } \sqrt{2} < r. \end{cases}$$

Voici les graphiques³ pour le carré (dimension 2) :



³les figures encadrées sont extraites de KÖPPEN (2000)

Voici les graphiques analogues pour le cube de dimension 3 :

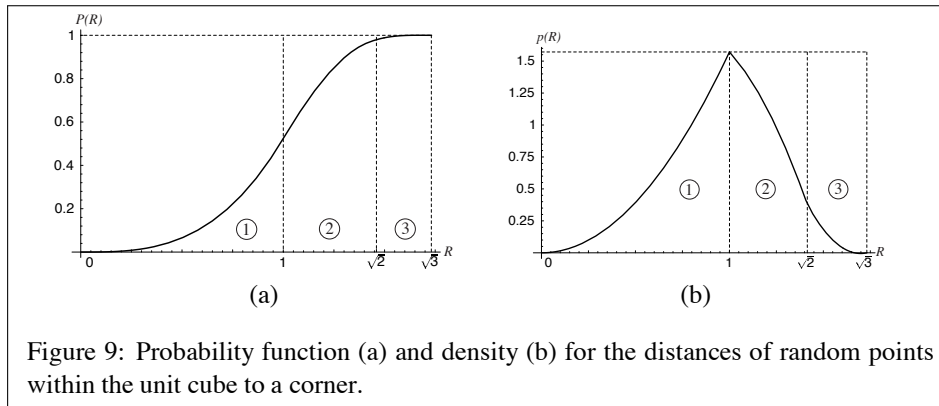


Figure 9: Probability function (a) and density (b) for the distances of random points within the unit cube to a corner.

Ils sont basés sur trois cas non triviaux :



Figure 8: Three cases for the intersection of eighth ball and unit cube.

Et voici, en fonction de d , des estimations de la moyenne et de la variance de la distance à l'origine (mais pour un cube de diagonale 1) :

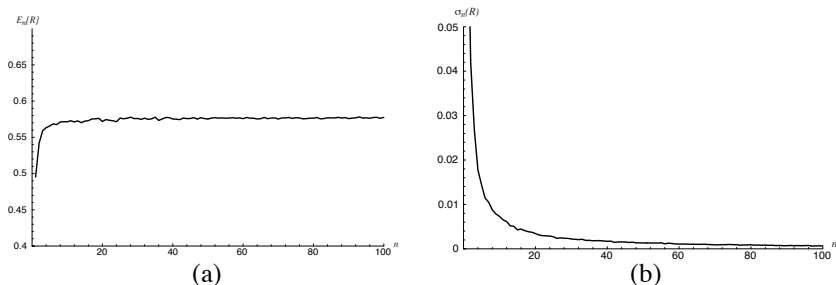


Figure 10: Expectation value and variance of the distance of a random point of hypercube with diagonal length 1 to one of its corners.