Physique et géométrie :

Du groupe de Lorentz à la sphère céleste

Blagoje Oblak

Brussels Summer School of Mathematics

8 août 2014

INTRODUCTION

Relativité restreinte

INTRODUCTION

Relativité restreinte

- Groupe de Lorentz

Introduction

Relativité restreinte

- Groupe de Lorentz (agit sur $\mathbb{R}^4$)

INTRODUCTION

Relativité restreinte

- Groupe de Lorentz (agit sur $\mathbb{R}^4$)
  $\cong$ Groupe des tsf. conformes de la sphère

INTRODUCTION

Relativité restreinte

- Groupe de Lorentz (agit sur $\mathbb{R}^4$)
  $\cong$ Groupe des tsf. conformes de la sphère S^2

INTRODUCTION

Relativité restreinte

- Groupe de Lorentz (agit sur $\mathbb{R}^4$)
  $\cong$ Groupe des tsf. conformes de la sphère S^2
- Sens géométrique ?

INTRODUCTION

Relativité restreinte

- Groupe de Lorentz (agit sur $\mathbb{R}^4$)
  $\cong$ Groupe des tsf. conformes de la sphère S^2
- Sens géométrique :
  action du groupe de Lorentz sur la **sphère céleste**.

PLAN DE L'EXPOSÉ

Plan de l'exposé

1. **Le groupe de Lorentz** L
2. L'isomorphisme $L_{\mathrm{co}} \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$
3. Transformations conformes de la sphère
4. Groupe de Lorentz et sphère céleste
5. Pour aller plus loin...

Plan de l'exposé

1. Le groupe de Lorentz L
2. **L'isomorphisme** $L_{\mathbf{co}} \cong \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{C}\right) / \mathbb{Z}_2$
3. Transformations conformes de la sphère
4. Groupe de Lorentz et sphère céleste
5. Pour aller plus loin...

PLAN DE L'EXPOSÉ

1. Le groupe de Lorentz L
2. **L'isomorphisme** $L_{\mathbf{co}} \cong \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{C}\right) / \mathbb{Z}_2$ $(*)$
3. Transformations conformes de la sphère
4. Groupe de Lorentz et sphère céleste
5. Pour aller plus loin...

PLAN DE L'EXPOSÉ

1. Le groupe de Lorentz L
2. L'isomorphisme $L_{\text{co}} \cong \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{C})\,/\mathbb{Z}_2$ $(*)$
3. **Transformations conformes de la sphère**
4. Groupe de Lorentz et sphère céleste
5. Pour aller plus loin...

Plan de l'exposé

1. Le groupe de Lorentz L
2. L'isomorphisme $L_{\text{co}} \cong \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{C}\right) / \mathbb{Z}_2$ $(*)$
3. Transformations conformes de la sphère
4. **Groupe de Lorentz et sphère céleste**
5. Pour aller plus loin...

Plan de l'exposé

1. Le groupe de Lorentz L
2. L'isomorphisme $L_{\text{co}} \cong \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{C})\,/\mathbb{Z}_2$ $(*)$
3. Transformations conformes de la sphère
4. Groupe de Lorentz et sphère céleste
5. **Pour aller plus loin...**

1. Le groupe de Lorentz

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$

PRINCIPES DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$
- Coord. de temps : horloge t

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$
- Coord. de temps : horloge $ct = x^0 \qquad (c = 3 \times 10^8 \text{ km/s})$

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$
- Coord. de temps : horloge $ct = x^0 \qquad (c = 3 \times 10^8 \text{ km/s})$

Un événement est repéré par 4 coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3)

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$
- Coord. de temps : horloge $ct = x^0 \qquad (c = 3 \times 10^8 \text{ km/s})$

Un événement est repéré par 4 coordonnées
$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu)$

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$
- Coord. de temps : horloge $ct = x^0 \qquad (c = 3 \times 10^8 \text{ km/s})$

Un événement est repéré par 4 coordonnées
$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu)$

- Dépend de l'observateur !

PRINCIPES DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, "**référentiels**"
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$
- Coord. de temps : horloge $ct = x^0$ $\quad (c = 3 \times 10^8 \text{ km/s})$

Un événement est repéré par 4 coordonnées
$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu)$

- Dépend de l'observateur !
- Coordonnées (x'^μ)

Principes de la relativité restreinte

Espace-temps

- Evénements
- Observateurs $\rightsquigarrow$ systèmes de coordonnées, “**référentiels**”
- Coord. d'espace : repère orthonormé $x, y, z = x^1, x^2, x^3$
- Coord. de temps : horloge $ct = x^0 \qquad (c = 3 \times 10^8 \text{ km/s})$

Un événement est repéré par 4 coordonnées
$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu)$

- Dépend de l'observateur !
- Coordonnées (x'^μ)
- Relation entre (x'^μ) et (x^μ) ?

Principes de la relativité restreinte

Principes de la relativité restreinte

Principe d'inertie :

Principes de la relativité restreinte

Principe d'inertie :
"En l'absence de forces, un corps se meut en M.R.U."

Principes de la relativité restreinte

Principe d'inertie :
"En l'absence de forces, un corps se meut en M.R.U."

- Pas vrai dans tous les référentiels !

Principes de la relativité restreinte

Principe d'inertie :
"En l'absence de forces, un corps se meut en M.R.U."

- Pas vrai dans tous les référentiels !
- Définition : les **référentiels inertiels** sont ceux où le principe d'inertie est vrai.

Principes de la relativité restreinte

Principe d'inertie :
"En l'absence de forces, un corps se meut en M.R.U."

- Pas vrai dans tous les référentiels !
- Définition : les **référentiels inertiels** sont ceux où le principe d'inertie est vrai.

1. Principe de **relativité** :

PRINCIPES DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Principe d'inertie :
"En l'absence de forces, un corps se meut en M.R.U."

- Pas vrai dans tous les référentiels !
- Définition : les **référentiels inertiels** sont ceux où le principe d'inertie est vrai.

1. Principe de **relativité** :
"Les lois de la physique prennent la même forme dans tout référentiel inertiel."

Principes de la relativité restreinte

Principe d'inertie :
"En l'absence de forces, un corps se meut en M.R.U."

- Pas vrai dans tous les référentiels !
- Définition : les **référentiels inertiels** sont ceux où le principe d'inertie est vrai.

1. Principe de **relativité** :
"Les lois de la physique prennent la même forme dans tout référentiel inertiel."

2. Invariance de la **vitesse de la lumière** :

Principes de la relativité restreinte

Principe d'inertie :
"En l'absence de forces, un corps se meut en M.R.U."

- Pas vrai dans tous les référentiels !
- Définition : les **référentiels inertiels** sont ceux où le principe d'inertie est vrai.

1. Principe de **relativité** :
"Les lois de la physique prennent la même forme dans tout référentiel inertiel."

2. Invariance de la **vitesse de la lumière** :
"La vitesse de la lumière dans le vide est isotrope et prend la même valeur c dans tout référentiel inertiel."

Définition du groupe de Lorentz

A et B référentiels inertiels

Définition du groupe de Lorentz

A et B référentiels inertiels $\Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

Définition du groupe de Lorentz

A et B référentiels inertiels $\Rightarrow \quad x' = \Lambda \cdot x \quad + a$

Définition du groupe de Lorentz

A et B référentiels inertiels $\Rightarrow \quad x' = \Lambda \cdot x \quad + a$

$+$ Invariance de la vitesse de la lumière
$\rightsquigarrow$ Conditions sur Λ ?

Définition du groupe de Lorentz

A et B référentiels inertiels $\Rightarrow \quad x' = \Lambda \cdot x \quad + a$

$+$ Invariance de la vitesse de la lumière
$\rightsquigarrow$ Conditions sur Λ ?

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition du groupe de Lorentz

A et B référentiels inertiels $\Rightarrow \quad x' = \Lambda \cdot x \quad + a$

$+$ Invariance de la vitesse de la lumière
$\rightsquigarrow$ Conditions sur Λ ?

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Condition : $\Lambda^t \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta$

DÉFINITION DU GROUPE DE LORENTZ

A et B référentiels inertiels $\Rightarrow \quad x' = \Lambda \cdot x \quad + a$

$+$ Invariance de la vitesse de la lumière
$\rightsquigarrow$ Conditions sur Λ ?

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Condition : $\Lambda^t \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta$
- Définition : Le **Groupe de Lorentz** est

$$\boxed{L \equiv \left\{\Lambda \in \mathrm{M}(4, \mathbb{R}) \,\middle|\, \Lambda^t \eta \Lambda = \eta \right\}}$$

Exemples de transformations de Lorentz

1. Rotation

Exemples de transformations de Lorentz

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

Exemples de transformations de Lorentz

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ct' & = & ct \\ & & \\ & & \\ z' & = & z \end{array} \right.$$

Exemples de transformations de Lorentz

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$\begin{cases} ct' &= ct \\ x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{cases}$$

Exemples de transformations de Lorentz

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$\begin{cases} ct' &= ct \\ x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{cases}$$

- Forme matricielle :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

2. Boost

Exemples de transformations de Lorentz

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

Exemples de transformations de Lorentz

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$v/c \equiv \tanh\chi$$

Exemples de transformations de Lorentz

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \end{cases} \qquad v/c \equiv \tanh \chi$$

Exemples de transformations de Lorentz

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -ct\sinh\chi + z\cosh\chi \end{cases} \qquad v/c \equiv \tanh\chi$$

Exemples de transformations de Lorentz

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ct' & = & ct \cosh \chi - z \sinh \chi \\ x' & = & x \\ y' & = & y \\ z' & = & -ct \sinh \chi + z \cosh \chi \end{array} \right. \qquad v/c \equiv \tanh \chi$$

EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ct' & = & ct\cosh\chi - z\sinh\chi \\ x' & = & x \\ y' & = & y \\ z' & = & -ct\sinh\chi + z\cosh\chi \end{array} \right. \qquad v/c \equiv \tanh\chi$$

- Forme matricielle :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix}$$

2. L’isomorphisme $(*)$:

$$L_{\text{co}} \cong \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{C}\right) / \mathbb{Z}_2$$

Rappel de théorie des groupes

$G \qquad H$

Rappel de théorie des groupes

$f : G \to H$ homomorphisme $\qquad f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g')$

Rappel de théorie des groupes

$f : G \to H$ homomorphisme $\qquad f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g')$

- Lemme : $\mathrm{Im}(f) \cong G/\mathrm{Ker}(f)$

Rappel de théorie des groupes

$f : G \to H$ homomorphisme $\qquad f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g')$

- Lemme : $\mathrm{Im}(f) \cong G/\mathrm{Ker}(f)$

  Preuve : L'application

  $$\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f) : [g] \mapsto f(g)$$

  est un isomorphisme. ∎

Rappel de théorie des groupes

$f : G \to H$ homomorphisme $\qquad f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g')$

- Lemme : $\mathrm{Im}(f) \cong G/\mathrm{Ker}(f)$

  Preuve : L'application

  $$\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f) : [g] \mapsto f(g)$$

  est un isomorphisme. ■

- Application : $L_{\mathrm{co}} \cong \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{C})\,/\mathbb{Z}_2$.

Rappel de théorie des groupes

$f : G \to H$ homomorphisme $\qquad f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g')$

- Lemme : $\mathrm{Im}(f) \cong G/\mathrm{Ker}(f)$

  Preuve : L'application

  $$\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f) : [g] \mapsto f(g)$$

  est un isomorphisme. $\blacksquare$

- Application : $L_{\text{co}} \cong \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{C}\right) / \mathbb{Z}_2$.

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \left\{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \middle| \left(X^t\right)^* = X\right\}$$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \left\{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \middle| \quad X^\dagger \quad = X\right\}$$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \left\{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \middle| \quad X^\dagger \quad = X\right\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \left\{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \middle| \quad X^\dagger \quad = X\right\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$
- Espace vectoriel réel de dimension 4

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) | \quad X^\dagger \quad = X\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$
- Espace vectoriel réel de dimension 4 $\cong$ $\mathbb{R}^4$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) | \quad X^\dagger \quad = X\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \equiv x^\mu \sigma_\mu$
- Espace vectoriel réel de dimension 4 $\cong$ $\mathbb{R}^4$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) | \quad X^\dagger \quad = X\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \equiv x^\mu \sigma_\mu$
- Espace vectoriel réel de dimension 4 $\cong$ $\mathbb{R}^4$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) | \quad X^\dagger \quad = X\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \equiv x^\mu \sigma_\mu$
- Espace vectoriel réel de dimension 4 $\cong$ $\mathbb{R}^4$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Observation :

$$\det(X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) | \quad X^\dagger \quad = X\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \equiv x^\mu \sigma_\mu$
- Espace vectoriel réel de dimension 4 $\cong \mathbb{R}^4$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Observation :

$$\det(X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \; - x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{H}(2,\mathbb{C}) \equiv \{X \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) | \quad X^\dagger \quad = X\}$$

- $X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \equiv x^\mu \sigma_\mu$
- Espace vectoriel réel de dimension 4 $\cong$ $\mathbb{R}^4$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Observation :

$$\det(X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \; - x^t \cdot \eta \cdot x$$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$X \mapsto X' = SXS^{\dagger}$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire**

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^{\dagger}$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^{\dagger} = SXS^{\dagger} + SYS^{\dagger}$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$f : \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S),$$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu}$$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu}$$

- f est un **homomorphisme**

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu}$$

- f est un **homomorphisme** :
$(ST)X(ST)^\dagger = S\left(TXT^\dagger\right)S^\dagger \quad \Rightarrow \quad f(S\cdot T) = f(S)\cdot f(T)$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu\sigma_\mu}$$

- f est un **homomorphisme** :
  $(ST)X(ST)^\dagger = S\left(TXT^\dagger\right)S^\dagger \quad \Rightarrow \quad f(S\cdot T) = f(S)\cdot f(T)$
- Observation : $\det(X') = \det\left(SXS^\dagger\right)$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu}$$

- f est un **homomorphisme** :
  $(ST)X(ST)^\dagger = S\left(TXT^\dagger\right)S^\dagger \quad \Rightarrow \quad f(S\cdot T) = f(S)\cdot f(T)$
- Observation : $\det(X') = \det\left(SXS^\dagger\right) = \det(X)$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu}$$

- f est un **homomorphisme** :
  $(ST)X(ST)^\dagger = S\left(TXT^\dagger\right)S^\dagger \quad \Rightarrow \quad f(S\cdot T) = f(S)\cdot f(T)$
- Observation : $\det(X') = \det\left(SXS^\dagger\right) = \det(X) = -x^t\cdot\eta\cdot x$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) : S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu}$$

- f est un **homomorphisme** :
  $(ST)X(ST)^\dagger = S\left(TXT^\dagger\right)S^\dagger \quad \Rightarrow \quad f(S\cdot T) = f(S)\cdot f(T)$
- Observation : $\det(X') = \det\left(SXS^\dagger\right) = \det(X) = -x^t\cdot\eta\cdot x$
  $\Rightarrow \quad f(S) \in L\,!$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \equiv \{S \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})\,|\det(S) = 1\}$
Action de $S \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})$ sur $\mathrm{H}(2,\mathbb{C})$:

$$X \mapsto X' = SXS^\dagger$$

- La tsf. $X \mapsto X'$ est **linéaire** : $S(X+Y)S^\dagger = SXS^\dagger + SYS^\dagger$
- On définit

$$\boxed{f : \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \longrightarrow L \quad : \; S \mapsto f(S), \quad Sx^\mu \sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu}$$

- f est un **homomorphisme** :
  $(ST)X(ST)^\dagger = S\left(TXT^\dagger\right)S^\dagger \quad \Rightarrow \quad f(S\cdot T) = f(S)\cdot f(T)$
- Observation : $\det(X') = \det\left(SXS^\dagger\right) = \det(X) = -x^t\cdot\eta\cdot x$
  $\Rightarrow \quad f(S) \in L\,!$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) / \mathrm{Ker}(f)$$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right) \to L$

$$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right)/\mathrm{Ker}(f)$$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right)/\mathrm{Ker}(f)$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout X

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,/\mathrm{Ker}(f)$$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{Ker}(f)$$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ∎

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \iff SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ■

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ■

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})\,/\mathbb{Z}_2$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ■

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

  Preuve :
  f continue

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ■

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

  Preuve :
  f continue $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq$ Groupe de Lorentz connexe

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ■

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

  Preuve :
  f continue $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq$ Groupe de Lorentz connexe $= L_{\mathrm{co}}$.

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ■

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

  Preuve :
  f continue $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq$ Groupe de Lorentz connexe $= L_{\mathrm{co}}$.
  Surjectivité de f sur L_{co} :

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^{\dagger} = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ∎

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

  Preuve :
  f continue $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq$ Groupe de Lorentz connexe $= L_{\mathrm{co}}$.
  Surjectivité de f sur L_{co} : subtil...

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; SXS^\dagger = X$ pour tout $X \;\Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ■

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

  Preuve :
  f continue $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq$ Groupe de Lorentz connexe $= L_{\mathrm{co}}$.
  Surjectivité de f sur L_{co} : subtil... ■

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$L_{\mathrm{co}} \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

- Lemme 1 : $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}_2$

  Preuve :
  $S \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow SXS^\dagger = X$ pour tout $X \quad \Rightarrow S = \pm\mathbb{I}$ ∎

- Lemme 2 : $\mathrm{Im}(f) = L_{\mathrm{co}}$

  Preuve :
  f continue $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq$ Groupe de Lorentz connexe $= L_{\mathrm{co}}$.
  Surjectivité de f sur L_{co} : subtil... ∎

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right) \to L$

$$S\sigma_\mu S^\dagger \equiv \left[f(S)\right]^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to L$

$$S\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

- L'homomorphisme f explicite :

Un homomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$S\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

- L'homomorphisme f explicite :

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$$

UN HOMOMORPHISME $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$

$$S\sigma_\mu S^\dagger \equiv [f(S)]^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

- L'homomorphisme f explicite :

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}
\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right) & -\mathrm{Re}\left\{a\bar{b}+c\bar{d}\right\} & \mathrm{Im}\left\{a\bar{b}+c\bar{d}\right\} & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2+|c|^2-|d|^2\right) \\
-\mathrm{Re}\left\{\bar{a}c+\bar{b}d\right\} & \mathrm{Re}\left\{\bar{a}d+\bar{b}c\right\} & -\mathrm{Im}\left\{a\bar{d}-b\bar{c}\right\} & -\mathrm{Re}\left\{\bar{a}c-\bar{b}d\right\} \\
\mathrm{Im}\left\{\bar{a}c+\bar{b}d\right\} & -\mathrm{Im}\left\{\bar{a}d+\bar{b}c\right\} & \mathrm{Re}\left\{a\bar{d}-b\bar{c}\right\} & \mathrm{Im}\left\{\bar{a}c-\bar{b}d\right\} \\
\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2\right) & -\mathrm{Re}\left\{a\bar{b}-c\bar{d}\right\} & \mathrm{Im}\left\{a\bar{b}-c\bar{d}\right\} & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2\right)
\end{array}\right)$$

Deux exemples

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

DEUX EXEMPLES

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deux exemples

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \; S = \pm \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

DEUX EXEMPLES

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad S = \pm \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

Deux exemples

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad S = \pm \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix}$$

DEUX EXEMPLES

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad S = \pm \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix}$$

$(\chi \equiv \operatorname{argtanh}(v/c))$

Deux exemples

1. Rotation (d'angle θ autour de l'axe $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad S = \pm \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

2. Boost (de vitesse v dans la direction $x^3 = z$) :

$$f(S) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad S = \pm \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}$$

$(\chi \equiv \operatorname{argtanh}(v/c))$

3. Transformations conformes de la sphère

3. Transformations conformes de la sphère

A. Préliminaires géométriques

3. Transformations conformes de la sphère

A. Préliminaires géométriques

B. Transformations conformes du plan

3. Transformations conformes de la sphère

A. Préliminaires géométriques

B. Transformations conformes du plan

C. Transformations conformes de la sphère

Préliminaires géométriques

Variété $\mathcal{M}$

Préliminaires géométriques

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, sphère S^n

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, sphère S^n
- Tout point p sur $\mathcal{M}$ admet un espace de **vecteurs tangents**.

Préliminaires géométriques

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, sphère S^n
- Tout point p sur $\mathcal{M}$ admet un espace de **vecteurs tangents**.

Métrique g sur une variété $\mathcal{M}$

Préliminaires géométriques

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, sphère S^n
- Tout point p sur $\mathcal{M}$ admet un espace de **vecteurs tangents**.

Métrique g sur une variété $\mathcal{M}$ = produit scalaire sur l'espace tangent en tout point.

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, sphère S^n
- Tout point p sur $\mathcal{M}$ admet un espace de **vecteurs tangents**.

Métrique g sur une variété $\mathcal{M}$ = produit scalaire sur l'espace tangent en tout point.

- Application $g : (p$

point de $\mathcal{M}$

Préliminaires géométriques

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, sphère S^n
- Tout point p sur $\mathcal{M}$ admet un espace de **vecteurs tangents**.

Métrique g sur une variété $\mathcal{M}$ = produit scalaire sur l'espace tangent en tout point.

- Application $g : (p, v, w)$

$$\underset{\text{point de } \mathcal{M}}{\swarrow} \qquad \underset{\text{vecteurs en } p}{\downarrow}$$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Variété $\mathcal{M}$ = espace localement $\simeq \mathbb{R}^n$

- Exemples : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, sphère S^n
- Tout point p sur $\mathcal{M}$ admet un espace de **vecteurs tangents**.

Métrique g sur une variété $\mathcal{M}$ = produit scalaire sur l'espace tangent en tout point.

- Application $g : (p, v, w) \mapsto g_p(v, w) \in \mathbb{R}$

point de $\mathcal{M}$ vecteurs en p p.s. de v et w

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées x, y

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne :

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$

  $v = (v_x, v_y), \;\; w = (w_x, w_y)$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$

  $v = (v_x, v_y), \;\; w = (w_x, w_y)$

  $$\rightsquigarrow \quad g_{(x,y)}(v, w)$$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$

  $v = (v_x, v_y), \ \ w = (w_x, w_y)$

  $$\rightsquigarrow \quad g_{(x,y)}(v, w) \quad = \quad \left(dx^2 + dy^2\right)\left[(v_x, v_y), (w_x, w_y)\right]$$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$

$v = (v_x, v_y), \;\; w = (w_x, w_y)$

$$\rightsquigarrow \quad g_{(x,y)}(v, w) = \left(dx^2 + dy^2\right)\left[(v_x, v_y), (w_x, w_y)\right] = v_x w_x + v_y w_y$$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$
- Métrique non-euclidienne :

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$
- Métrique non-euclidienne : $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$
- Métrique non-euclidienne : $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

$v = (v_x, v_y), \;\; w = (w_x, w_y)$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$
- Métrique non-euclidienne : $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

$v = (v_x, v_y), \;\; w = (w_x, w_y)$

$$\rightsquigarrow \quad g_{(x,y)}(v, w)$$

Préliminaires géométriques

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $$g = dx^2 + dy^2$$
- Métrique non-euclidienne : $$g = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$v = (v_x, v_y), \;\; w = (w_x, w_y)$

$$\rightsquigarrow \quad g_{(x,y)}(v, w) \quad = \quad \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\left[(v_x, v_y), (w_x, w_y)\right]$$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$
- Métrique non-euclidienne : $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

$v = (v_x, v_y), \; w = (w_x, w_y)$

$$\rightsquigarrow \quad g_{(x,y)}(v, w) = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\left[(v_x, v_y), (w_x, w_y)\right] = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Exemples de métriques sur $\mathbb{R}^2$ (coordonnées $x, y \rightsquigarrow p = (x, y)$) :

- Métrique euclidienne : $g = dx^2 + dy^2$
- Métrique non-euclidienne : $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

Préliminaires géométriques

Métrique g sur $\mathcal{M}$

Préliminaires géométriques

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p :

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v, v)$

Préliminaires géométriques

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v,v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v, v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Préliminaires géométriques

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v, v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Observation : métrique 1 $\propto$ métrique 2

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v, v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Observation : métrique 1 $\propto$ métrique 2 $\Rightarrow$ mêmes angles.

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v, v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Observation : métrique 1 $\propto$ métrique 2 $\Rightarrow$ mêmes angles.

Preuve :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Préliminaires géométriques

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v,v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Observation : métrique 1 $\propto$ métrique 2 $\Rightarrow$ mêmes angles.

Preuve :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v,w)}{\sqrt{g_p(v,v)g_p(w,w)}}$$

Préliminaires géométriques

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v, v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Observation : métrique 1 $\propto$ métrique 2 $\Rightarrow$ mêmes angles.

Preuve : $\forall$ fonction $\Omega > 0$ sur $\mathcal{M}$,

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{g_p(v, v) g_p(w, w)}}$$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v,v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Observation : métrique 1 $\propto$ métrique 2 $\Rightarrow$ mêmes angles.

Preuve : $\forall$ fonction $\Omega > 0$ sur $\mathcal{M}$,

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v,w)}{\sqrt{g_p(v,v)g_p(w,w)}} = \frac{\Omega(p)g_p(v,w)}{\sqrt{\Omega(p)g_p(v,v)\Omega(p)g_p(w,w)}}$$

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Métrique g sur $\mathcal{M}$

- Norme (au carré) d'un vecteur v en p : $\|v\|^2 \equiv g_p(v,v)$
- **Angle** θ entre deux vecteurs v, w en p :

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Observation : métrique 1 $\propto$ métrique 2 $\Rightarrow$ mêmes angles.

Preuve : $\forall$ fonction $\Omega > 0$ sur $\mathcal{M}$,

$$\cos\theta \equiv \frac{g_p(v,w)}{\sqrt{g_p(v,v)g_p(w,w)}} = \frac{\Omega(p)g_p(v,w)}{\sqrt{\Omega(p)g_p(v,v)\Omega(p)g_p(w,w)}} \qquad \blacksquare$$

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique !

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! $(g \xmapsto{\phi} g')$

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! ($g \overset{\phi}{\longmapsto} g'$)
- Définition : Une **transformation conforme** de $(\mathcal{M}, g)$

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! $(g \xmapsto{\phi} g')$
- Définition : Une **transformation conforme** de $(\mathcal{M}, g)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{M}$ qui préserve les angles.

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! $(g \xrightarrow{\phi} g')$
- Définition : Une **transformation conforme** de $(\mathcal{M}, g)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{M}$ qui préserve les **angles**.

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! $(g \overset{\phi}{\longmapsto} g')$
- Définition : Une **transformation conforme** de $(\mathcal{M}, g)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{M}$ qui préserve les **angles**.
- Métrique transformée $\propto$ métrique d'origine :

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! $(g \stackrel{\phi}{\longmapsto} g')$
- Définition : Une **transformation conforme** de $(\mathcal{M}, g)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{M}$ qui préserve les **angles**.
- Métrique transformée $\propto$ métrique d'origine :

$$\boxed{g' = \Omega \quad \cdot g}$$

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! ($g \xmapsto{\phi} g'$)
- Définition : Une **transformation conforme** de $(\mathcal{M}, g)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{M}$ qui préserve les **angles**.
- Métrique transformée $\propto$ métrique d'origine :

$$\boxed{{g'}_p = \Omega(p) \cdot g_p}$$

Préliminaires géométriques

Difféomorphismes de $\mathcal{M}$

- Bijections lisses $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, mais affectent la métrique ! $(g \overset{\phi}{\longmapsto} g')$
- Définition : Une **transformation conforme** de $(\mathcal{M}, g)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{M}$ qui préserve les **angles**.
- Métrique transformée $\propto$ métrique d'origine :

$$\boxed{g'_p = \Omega(p) \cdot g_p} \quad \forall\, p \in \mathcal{M}$$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dz d\bar{z}$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

- Tsf. conforme

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dz d\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

- Tsf. conforme ($g' \propto g$)

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

- Tsf. conforme ($g' \propto g$) $\rightsquigarrow$ Conditions sur Z ?

TRANSFORMATIONS CONFORMES DU PLAN

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

- Tsf. conforme ($g' \propto g$) $\rightsquigarrow$ Conditions sur Z ?

Métrique transformée g' ?

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

- Tsf. conforme ($g' \propto g$) $\rightsquigarrow$ Conditions sur Z ?

Métrique transformée g' ?

$$z \xmapsto{\phi} Z$$

Transformations conformes du plan

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

- Tsf. conforme ($g' \propto g$) $\rightsquigarrow$ Conditions sur Z ?

Métrique transformée g' ?

$$z \xmapsto{\phi} Z \quad \Rightarrow \quad g_z = dzd\bar{z}$$

TRANSFORMATIONS CONFORMES DU PLAN

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

- Coordonnée complexe $z = x + iy$
- Métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$

Difféo. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto Z(z, \bar{z})$

- Tsf. conforme ($g' \propto g$) $\rightsquigarrow$ Conditions sur Z ?

Métrique transformée g' ?

$$z \xmapsto{\phi} Z \quad \Rightarrow \quad g_z = dzd\bar{z} \xmapsto{\phi} g'_z = dZd\bar{Z}\big|_z$$

Transformations conformes du plan

$$dZd\bar{Z}$$

Transformations conformes du plan

$$dZd\bar{Z} = \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)$$

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2
\end{aligned}
$$

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2
\end{aligned}
$$

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

Transformations conformes du plan

$$\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z} \\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}$$

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right] dzd\bar{z} \\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

- $\dfrac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$

TRANSFORMATIONS CONFORMES DU PLAN

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right] dzd\bar{z} \\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

- $\dfrac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0$

TRANSFORMATIONS CONFORMES DU PLAN

$$\begin{aligned} dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\ &= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z} \\ &\overset{!}{\propto} dzd\bar{z} \end{aligned}$$

- $\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$ ou $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z,\bar{z}) = Z(z)$

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z} \\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

- $\dfrac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$ ou $\dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z, \bar{z}) = Z(z)$

Mais $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$!

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z} \\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

- $\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$ ou $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z, \bar{z}) = Z(z)$

Mais $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$!

- $Z(z)$ doit être régulière

Transformations conformes du plan

$$\begin{aligned} dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\ &= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z} \\ &\overset{!}{\propto} dzd\bar{z} \end{aligned}$$

- $\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$ ou $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z, \bar{z}) = Z(z)$

Mais $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$!

- $Z(z)$ doit être régulière $\Longrightarrow Z(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z} \\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

- $\dfrac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z, \bar{z}) = Z(z)$

Mais $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$!

- $Z(z)$ doit être régulière $\Longrightarrow Z(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$
- $Z(z)$ doit être injective

Transformations conformes du plan

$$\begin{aligned} dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\ &= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right] dzd\bar{z} \\ &\overset{!}{\propto} dzd\bar{z} \end{aligned}$$

- $\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$ ou $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z, \bar{z}) = Z(z)$

Mais $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$!

- $Z(z)$ doit être régulière $\Longrightarrow Z(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$
- $Z(z)$ doit être injective $\Longrightarrow Z(z) = az + b$

TRANSFORMATIONS CONFORMES DU PLAN

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z}\\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

- $\dfrac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z,\bar{z}) = Z(z)$

Mais $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$!

- $Z(z)$ doit être régulière $\Longrightarrow Z(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$
- $Z(z)$ doit être injective $\Longrightarrow Z(z) = az + b$
- $Z(z)$ doit être surjective

Transformations conformes du plan

$$
\begin{aligned}
dZd\bar{Z} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z}dz + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z}\right]dzd\bar{z} \\
&\overset{!}{\propto} dzd\bar{z}
\end{aligned}
$$

- $\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$ ou $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$
- $Z(z,\bar{z}) = Z(z)$

Mais $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$!

- $Z(z)$ doit être régulière $\Longrightarrow Z(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$
- $Z(z)$ doit être injective $\Longrightarrow Z(z) = az + b \qquad (a \neq 0)$
- $Z(z)$ doit être surjective

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$,

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec métrique $g = dzd\bar{z}$:

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec métrique $g = dzd\bar{z}$:

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = az + b} \qquad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec métrique $g = dzd\bar{z}$:

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = az + b} \qquad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

- Translations $\quad z \mapsto z + b$

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec métrique $g = dz d\bar{z}$:

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = az + b} \qquad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

- Translations $\quad z \mapsto z + b$
- Rotations $\quad z \mapsto e^{i\theta} z$

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec métrique $g = dzd\bar{z}$:

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = az + b} \qquad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

- Translations $\quad z \mapsto z + b$
- Rotations $\quad z \mapsto e^{i\theta} z$
- Dilatations $\quad z \mapsto e^{-\chi} z$

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec métrique $g = dzd\bar{z}$:

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = az + b} \qquad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

- Translations $z \mapsto z + b$
- Rotations $z \mapsto e^{i\theta} z$
- Dilatations $z \mapsto e^{-\chi} z$

Remarque : métrique non-euclidienne $g = \Omega(z, \bar{z}) dzd\bar{z}$

Transformations conformes du plan

Conclusion :

Transformations conformes de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec métrique $g = dzd\bar{z}$:

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = az + b} \qquad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

- Translations $z \mapsto z + b$
- Rotations $z \mapsto e^{i\theta} z$
- Dilatations $z \mapsto e^{-\chi} z$

Remarque : métrique non-euclidienne $g = \Omega(z, \bar{z}) dzd\bar{z}$

- Mêmes transformations conformes !

Transformations conformes de la sphère

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

Transformations conformes de la sphère

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

On aimerait utiliser ce qu'on connaît sur le plan...

Transformations conformes de la sphère

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

On aimerait utiliser ce qu'on connaît sur le plan...

- **Coordonnées stéréographiques** sur la sphère :

Transformations conformes de la sphère

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

On aimerait utiliser ce qu'on connaît sur le plan...

- **Coordonnées stéréographiques** sur la sphère :

$$\boxed{z \equiv \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}}$$

(Projection depuis le pôle Sud)

Transformations conformes de la sphère

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

On aimerait utiliser ce qu'on connaît sur le plan...

- **Coordonnées stéréographiques** sur la sphère :

$$\boxed{z \equiv \frac{x_1 + i x_2}{1 + x_3}}$$

(Projection depuis le pôle Sud)

- Sphère $\cong$ Plan $\cup$ {point}

TRANSFORMATIONS CONFORMES DE LA SPHÈRE

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

On aimerait utiliser ce qu'on connaît sur le plan...

- **Coordonnées stéréographiques** sur la sphère :

$$\boxed{z \equiv \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}}$$

(Projection depuis le pôle Sud)

- $S^2 \quad \cong \quad \mathbb{C} \quad \cup \{\text{point}\}$

Transformations conformes de la sphère

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

On aimerait utiliser ce qu'on connaît sur le plan...

- **Coordonnées stéréographiques** sur la sphère :

$$\boxed{z \equiv \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}}$$

(Projection depuis le pôle Sud)

- $$S^2 \quad \cong \quad \mathbb{C} \quad \cup \{\text{point}\}$$

$$\downarrow$$

$$\text{“}z = \infty\text{”} \qquad \text{(pôle Sud)}$$

Transformations conformes de la sphère

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

On aimerait utiliser ce qu'on connaît sur le plan...

- **Coordonnées stéréographiques** sur la sphère :

$$\boxed{z \equiv \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}}$$

(Projection depuis le pôle Sud)

- $$\begin{array}{ccccc} S^2 & \cong & \mathbb{C} & \cup & \{\text{point}\} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \text{“}z = \infty\text{”} \quad (\text{pôle Sud}) \end{array}$$

- Métrique sur S^2 en termes de la métrique sur $\mathbb{C}$?

Transformations conformes de la sphère

Métrique sur S^2

Transformations conformes de la sphère

Métrique sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

Transformations conformes de la sphère

Métrique sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

TRANSFORMATIONS CONFORMES DE LA SPHÈRE

Métrique sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$g = \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)\Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

Transformations conformes de la sphère

Métrique sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$g = \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) \Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

$$z \equiv \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}$$

TRANSFORMATIONS CONFORMES DE LA SPHÈRE

Métrique sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$g = \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)\Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

$$z \equiv \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}$$

- Observation :

$$dzd\bar{z} = \frac{1}{(1+x_3)^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)\Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

Transformations conformes de la sphère

Métrique sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$g = \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)\Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

$z \equiv \dfrac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}$

- Observation :

$$dzd\bar{z} = \frac{1}{(1+x_3)^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)\Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

- $g = (1 + x_3)^2\, dzd\bar{z}$

Transformations conformes de la sphère

Métrique sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$g = \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)\Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

$$z \equiv \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}$$

- Observation :

$$dzd\bar{z} = \frac{1}{(1+x_3)^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)\Big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}$$

- $g = (1+x_3)^2\, dzd\bar{z} \propto \mathbf{dzd\bar{z}}$ **!!!**

Transformations conformes de la sphère

$$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$$

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

TRANSFORMATIONS CONFORMES DE LA SPHÈRE

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C}$

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dzd\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dzd\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- $Z(z)$ doit être régulière sur la sphère

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- $Z(z)$ doit être régulière sur la sphère
  $\Longrightarrow Z(z) = \dfrac{A + Bz + Cz^2 + \cdots}{A' + B'z + C'z^2 + \cdots}$

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- $Z(z)$ doit être régulière sur la sphère
  $$\Longrightarrow Z(z) = \frac{A + Bz + Cz^2 + \cdots}{A' + B'z + C'z^2 + \cdots}$$
- $Z(z)$ doit être injective sur la sphère

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- $Z(z)$ doit être régulière sur la sphère
  $\Longrightarrow Z(z) = \dfrac{A + Bz + Cz^2 + \cdots}{A' + B'z + C'z^2 + \cdots}$
- $Z(z)$ doit être injective sur la sphère
  $\Longrightarrow Z(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- $Z(z)$ doit être régulière sur la sphère
  $\Longrightarrow Z(z) = \dfrac{A + Bz + Cz^2 + \cdots}{A' + B'z + C'z^2 + \cdots}$
- $Z(z)$ doit être injective sur la sphère
  $\Longrightarrow Z(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$
- $Z(z)$ doit être surjective sur la sphère

Transformations conformes de la sphère

$g_{\text{sphère}} \propto dz d\bar{z}$

- Même traitement que pour le plan... ou presque.
- Toute application $z \mapsto Z(z)$ est, localement, une tsf. conforme de S^2 !

La fct $z \mapsto Z(z)$ doit être un difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- $Z(z)$ doit être régulière sur la sphère
  $\Longrightarrow Z(z) = \dfrac{A + Bz + Cz^2 + \cdots}{A' + B'z + C'z^2 + \cdots}$
- $Z(z)$ doit être injective sur la sphère
  $\Longrightarrow Z(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$
- $Z(z)$ doit être surjective sur la sphère
  $\Longrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$

Transformations conformes de la sphère

Conclusion : Toute tsf. conforme de la sphère peut s'écrire

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = \frac{az+b}{cz+d}}$$

Transformations conformes de la sphère

Conclusion : Toute tsf. conforme de la sphère peut s'écrire

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = \frac{az+b}{cz+d}} \qquad \text{avec} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Transformations conformes de la sphère

Conclusion : Toute tsf. conforme de la sphère peut s'écrire

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = \frac{az+b}{cz+d}} \qquad \text{avec} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque :

Transformations conformes de la sphère

Conclusion : Toute tsf. conforme de la sphère peut s'écrire

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = \frac{az+b}{cz+d}} \qquad \text{avec} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ mêmes transformations

Transformations conformes de la sphère

Conclusion : Toute tsf. conforme de la sphère peut s'écrire

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = \frac{az+b}{cz+d}} \qquad \text{avec} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque :

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ mêmes transformations

- On peut supposer (S.P.D.G.) $\quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$

Transformations conformes de la sphère

Conclusion : Toute tsf. conforme de la sphère peut s'écrire

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = \frac{az+b}{cz+d}} \qquad \text{avec} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ mêmes transformations

- On peut supposer (S.P.D.G.) $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$

  et le signe ne joue pas.

Transformations conformes de la sphère

Conclusion : Toute tsf. conforme de la sphère peut s'écrire

$$\boxed{z \mapsto Z(z) = \frac{az+b}{cz+d}} \qquad \text{avec} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ mêmes transformations

- On peut supposer (S.P.D.G.) $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ et le signe ne joue pas.
- Le groupe des transformations conformes de S^2 est

$$\boxed{\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})\,/\mathbb{Z}_2}$$

4. Groupe de Lorentz et sphère céleste

4. Groupe de Lorentz et sphère céleste

L_{co}

4. Groupe de Lorentz et sphère céleste

$$\underbrace{x \mapsto \Lambda \cdot x \text{ dans } \mathbb{R}^4}_{L_{\mathrm{co}}}$$

4. Groupe de Lorentz et sphère céleste

$$L_{\text{co}} \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$$

$$\swarrow$$

$$x \mapsto \Lambda \cdot x \text{ dans } \mathbb{R}^4$$

4. Groupe de Lorentz et sphère céleste

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& L_{\mathrm{co}} \cong \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{C}\right)/\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \mapsto \Lambda \cdot x \text{ dans } \mathbb{R}^4 & & \text{Tsf. conformes de } S^2
\end{tikzcd}
$$

4. Groupe de Lorentz et sphère céleste

$$
\begin{tikzcd}
 & L_{\text{co}} \cong \mathrm{SL}\left(2, \mathbb{C}\right)/\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \mapsto \Lambda \cdot x \text{ dans } \mathbb{R}^4 \arrow[rr, leftrightarrow, "?"] & & \text{Tsf. conformes de } S^2
\end{tikzcd}
$$

Notion de sphère céleste

Espace-temps $= \mathbb{R}^4$

Notion de sphère céleste

Espace-temps $= \mathbb{R}^4$

- Coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3

Notion de sphère céleste

Espace-temps $= \mathbb{R}^4$

- Coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3
- Passage en coordonnées stéréographiques :

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

Notion de sphère céleste

Espace-temps $= \mathbb{R}^4$

- Coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3
- Passage en coordonnées stéréographiques :

$$\begin{aligned} r &\equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ z &\equiv \frac{x^1 + ix^2}{r + x^3} \end{aligned}$$

Notion de sphère céleste

Espace-temps $= \mathbb{R}^4$

- Coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3
- Passage en coordonnées stéréographiques :

$$\begin{aligned} r &\equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ z &\equiv \frac{x^1 + ix^2}{r + x^3} \end{aligned}$$

- Nouvelles coordonnées spatiales r, z

Notion de sphère céleste

Espace-temps $= \mathbb{R}^4$

- Coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3
- Passage en coordonnées stéréographiques :

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$
$$z \equiv \frac{x^1 + ix^2}{r + x^3}$$

- Nouvelles coordonnées spatiales r, z

Mais jusque-là on n'a pas touché au temps...

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" :

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct$,

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct, z = \mathrm{cst}$

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct$, $z = \mathrm{cst}$
- On définit le "temps avancé"

$$\boxed{u \equiv ct + r}$$

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct$, $z = \text{cst}$
- On définit le "temps avancé"

$$\boxed{u \equiv ct + r}$$

- Coordonnées de **Bondi** : $\boxed{u,\ r,\ z}$

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct$, $z = \text{cst}$
- On définit le "temps avancé"

$$\boxed{u \equiv ct + r}$$

- Coordonnées de **Bondi** : $\boxed{u,\ r,\ z}$
- Un rayon radial arrivant vers l'origine satisfait $u = \text{cst}$

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct$, $z = \text{cst}$
- On définit le "temps avancé"

$$\boxed{u \equiv ct + r}$$

- Coordonnées de **Bondi** : $\boxed{u,\ r,\ z}$
- Un rayon radial arrivant vers l'origine satisfait $u = \text{cst}$

Définition : La **sphère céleste** au temps u est la sphère située en $r \to +\infty$, $u = \text{cst}$.

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct$, $z = \text{cst}$
- On définit le "temps avancé"

$$\boxed{u \equiv ct + r}$$

- Coordonnées de **Bondi** : $\boxed{u,\ r,\ z}$
- Un rayon radial arrivant vers l'origine satisfait $u = \text{cst}$

Définition : La **sphère céleste** au temps u est la sphère située en $r \to +\infty$, $u = \text{cst}$.

- C'est la "sphère des directions vers lesquelles on regarde".

Notion de sphère céleste

Rayon lumineux $\rightsquigarrow$ se propage à vitesse c

- Rayon "radial" : $r = r_0 \pm ct$, $z = \text{cst}$
- On définit le "temps avancé"

$$\boxed{u \equiv ct + r}$$

- Coordonnées de **Bondi** : $\boxed{u,\ r,\ z}$
- Un rayon radial arrivant vers l'origine satisfait $u = \text{cst}$

Définition : La **sphère céleste** au temps u est la sphère située en $r \to +\infty$, $u = \text{cst}$.

- C'est la "sphère des directions vers lesquelles on regarde".
- Action du groupe de Lorentz sur ces directions ?

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z)

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z) :

$$(r')^2 = (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z) :

$$\begin{aligned} (r')^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ u' &= ct' + r' \end{aligned}$$

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z) :

$$\begin{aligned} (r')^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ u' &= ct' + r' \\ z' &= \frac{x'^1 + ix'^2}{r' + x'^3} \end{aligned}$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z) :

$$\begin{aligned} (r')^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ u' &= ct' + r' \\ z' &= \frac{x'^1 + ix'^2}{r' + x'^3} \end{aligned}$$

- Relations non-linéaires

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z) :

$$\begin{aligned} (r')^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ u' &= ct' + r' \\ z' &= \frac{x'^1 + ix'^2}{r' + x'^3} \end{aligned}$$

- Relations non-linéaires $\rightsquigarrow$ Compliqué...

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z) :

$$\begin{aligned} (r')^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ u' &= ct' + r' \\ z' &= \frac{x'^1 + ix'^2}{r' + x'^3} \end{aligned}$$

- Relations non-linéaires $\rightsquigarrow$ Compliqué...
- Mais on veut la limite $r \to +\infty$, $u =$cst

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Tsf. de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda \cdot x$ (référentiels inertiels)

- Comment traduire $x' = \Lambda \cdot x$ en coordonnées (u, r, z) ?
- Relation entre (u', r', z') et (u, r, z) :

$$\begin{aligned} (r')^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ u' &= ct' + r' \\ z' &= \frac{x'^1 + ix'^2}{r' + x'^3} \end{aligned}$$

- Relations non-linéaires $\rightsquigarrow$ Compliqué...
- Mais on veut la limite $r \to +\infty$, $u =$cst $\rightsquigarrow$ Simplifications !

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$r'^2 = (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2$$

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned} r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ &= \left(\Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3\right)^2 \end{aligned}$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned} r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ &= \left(\Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\Lambda^2{}_0 x^0 + \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3\right)^2 \end{aligned}$$

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&= \quad \left(\Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3\right)^2 \\
&\quad + \left(\Lambda^2{}_0 x^0 + \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3\right)^2 \\
&\quad + \left(\Lambda^3{}_0 x^0 + \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3\right)^2
\end{aligned}$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned} r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ &= \left(\Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\Lambda^2{}_0 x^0 + \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\Lambda^3{}_0 x^0 + \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3\right)^2 \end{aligned}$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned} r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ &= \left(\Lambda^1{}_0(u-r) + \Lambda^1{}_1x^1 + \Lambda^1{}_2x^2 + \Lambda^1{}_3x^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\Lambda^2{}_0(u-r) + \Lambda^2{}_1x^1 + \Lambda^2{}_2x^2 + \Lambda^2{}_3x^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\Lambda^3{}_0(u-r) + \Lambda^3{}_1x^1 + \Lambda^3{}_2x^2 + \Lambda^3{}_3x^3\right)^2 \end{aligned}$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&= \left(\Lambda^1{}_0(u-r) + \Lambda^1{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3\right)^2 \\
&\quad + \left(\Lambda^2{}_0(u-r) + \Lambda^2{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3\right)^2 \\
&\quad + \left(\Lambda^3{}_0(u-r) + \Lambda^3{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3\right)^2
\end{aligned}$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&= \left(\Lambda^1{}_0(u-r) + \Lambda^1{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_2\frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_3 x^3\right)^2 \\
&+ \left(\Lambda^2{}_0(u-r) + \Lambda^2{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_2\frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_3 x^3\right)^2 \\
&+ \left(\Lambda^3{}_0(u-r) + \Lambda^3{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_2\frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_3 x^3\right)^2
\end{aligned}$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$
\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&= \left(\Lambda^1{}_0(u-r) + \Lambda^1{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_3 r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \\
&+ \left(\Lambda^2{}_0(u-r) + \Lambda^2{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_3 r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \\
&+ \left(\Lambda^3{}_0(u-r) + \Lambda^3{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_3 r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2
\end{aligned}
$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$
\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&= \left(\Lambda^1{}_0(u-r) + \Lambda^1{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_3 r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \\
&+ \left(\Lambda^2{}_0(u-r) + \Lambda^2{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_3 r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \\
&+ \left(\Lambda^3{}_0(u-r) + \Lambda^3{}_1 r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_3 r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2
\end{aligned}
$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z
- On prend la limite $r \to +\infty$

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&\simeq \left(-\Lambda^1{}_0 r + \Lambda^1{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^2{}_0 r + \Lambda^2{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^3{}_0 r + \Lambda^3{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2
\end{aligned}$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z
- On prend la limite $r \to +\infty$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$
\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&\simeq \left(-\Lambda^1{}_0 r + \Lambda^1{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^2{}_0 r + \Lambda^2{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^3{}_0 r + \Lambda^3{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2
\end{aligned}
$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z
- On prend la limite $r \to +\infty \rightsquigarrow$ pas de dépendance en u !

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$
\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&\simeq \left(-\Lambda^1{}_0 r + \Lambda^1{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^1{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^2{}_0 r + \Lambda^2{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^2{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^3{}_0 r + \Lambda^3{}_1 r \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_2 \frac{r}{i} \frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} + \Lambda^3{}_3 r \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2
\end{aligned}
$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z
- On prend la limite $r \to +\infty \rightsquigarrow$ pas de dépendance en u !
- On prend $\Lambda \in L_{\mathrm{co}}$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

Exemple : calcul de r' en fct de r

$$\begin{aligned}
r'^2 &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&\simeq \left(-\Lambda^1{}_0 r + \Lambda^1{}_1 r \frac{z+\bar z}{1+z\bar z} + \Lambda^1{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar z}{1+z\bar z} + \Lambda^1{}_3 r \frac{1-z\bar z}{1+z\bar z} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^2{}_0 r + \Lambda^2{}_1 r \frac{z+\bar z}{1+z\bar z} + \Lambda^2{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar z}{1+z\bar z} + \Lambda^2{}_3 r \frac{1-z\bar z}{1+z\bar z} \right)^2 \\
&+ \left(-\Lambda^3{}_0 r + \Lambda^3{}_1 r \frac{z+\bar z}{1+z\bar z} + \Lambda^3{}_2 \frac{r}{i}\frac{z-\bar z}{1+z\bar z} + \Lambda^3{}_3 r \frac{1-z\bar z}{1+z\bar z} \right)^2
\end{aligned}$$

- On exprime les x^μ en termes de u, r, z
- On prend la limite $r \to +\infty \rightsquigarrow$ pas de dépendance en u !
- On prend $\Lambda \in L_{\mathrm{co}}$ et on récrit tout en termes de a, b, c, d

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

$$
\begin{aligned}
r' \quad \simeq \quad & \frac{1}{2}\frac{r}{1+z\bar{z}}\Big[\Big((\bar{a}c+\bar{b}d+a\bar{c}+b\bar{d}) \\
& -(\bar{a}d+\bar{b}c+a\bar{d}+b\bar{c})(z+\bar{z})-(a\bar{d}-b\bar{c}-\bar{a}d+\bar{b}c)(z-\bar{z}) \\
& +(\bar{a}c-\bar{b}d+\bar{a}c-b\bar{d})(1-z\bar{z})\Big)^2 \\
& -\Big((\bar{a}c+\bar{b}d-a\bar{c}-b\bar{d})-(\bar{a}d+\bar{b}c-a\bar{d}-b\bar{c})(z+\bar{z}) \\
& +(a\bar{d}-b\bar{c}+\bar{a}d-\bar{b}c)(z-\bar{z}) \\
& +(\bar{a}c-\bar{b}d-a\bar{c}+b\bar{d})(1-z\bar{z})\Big)^2 \\
& +\Big((|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2)(1+z\bar{z}) \\
& -(a\bar{b}-c\bar{d}+\bar{a}b-\bar{c}d)(z+\bar{z}) \\
& -(a\bar{b}-c\bar{d}-\bar{a}b+\bar{c}d)(z-\bar{z}) \\
& +(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2)(1-z\bar{z})\Big)^2\Big]^{1/2}
\end{aligned}
$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$
\begin{aligned}
r' \quad = \quad & \frac{1}{2}\frac{r}{1+z\bar{z}}\Big[\big((\bar{a}c+\bar{b}d+a\bar{c}+b\bar{d}) \\
& -(\bar{a}d+\bar{b}c+a\bar{d}+b\bar{c})(z+\bar{z})-(a\bar{d}-b\bar{c}-\bar{a}d+\bar{b}c)(z-\bar{z}) \\
& +(\bar{a}c-\bar{b}d+\bar{a}c-b\bar{d})(1-z\bar{z})\big)^2 \\
& -\big((\bar{a}c+\bar{b}d-a\bar{c}-b\bar{d})-(\bar{a}d+\bar{b}c-a\bar{d}-b\bar{c})(z+\bar{z}) \\
& +(a\bar{d}-b\bar{c}+\bar{a}d-\bar{b}c)(z-\bar{z}) \\
& +(\bar{a}c-\bar{b}d-a\bar{c}+b\bar{d})(1-z\bar{z})\big)^2 \\
& +\big((|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2)(1+z\bar{z}) \\
& -(a\bar{b}-c\bar{d}+\bar{a}b-\bar{c}d)(z+\bar{z}) \\
& -(a\bar{b}-c\bar{d}-\bar{a}b+\bar{c}d)(z-\bar{z}) \\
& +(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2)(1-z\bar{z})\big)^2\Big]^{1/2}+\mathcal{O}(1)
\end{aligned}
$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$r' = r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1)$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$\begin{aligned} r' &= r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \\ z' &= \frac{az+b}{cz+d} + \mathcal{O}(1/r) \end{aligned}$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$\begin{aligned} r' &= r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \\ z' &= \frac{az+b}{cz+d} + \mathcal{O}(1/r) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Tsf. de Lorentz = Tsf. conformes sur la sphère céleste !}}$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$\begin{aligned} r' &= r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \\ z' &= \frac{az+b}{cz+d} + \mathcal{O}(1/r) \end{aligned}$$

- Tsf. de Lorentz = Tsf. conformes sur la sphère céleste !

Exemples

- Rotation (autour de l'axe x^3) :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$\begin{aligned} r' &= r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \\ z' &= \frac{az+b}{cz+d} + \mathcal{O}(1/r) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Tsf. de Lorentz = Tsf. conformes sur la sphère céleste !}}$

Exemples

- Rotation (autour de l'axe x^3) :
  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad z' = e^{i\theta} z$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$
\begin{aligned}
r' &= r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \\
z' &= \frac{az+b}{cz+d} + \mathcal{O}(1/r)
\end{aligned}
$$

- $\boxed{\text{Tsf. de Lorentz = Tsf. conformes sur la sphère céleste !}}$

Exemples

- Rotation (autour de l'axe x^3) :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad z' = e^{i\theta} z$$
- Boost (de vitesse $v = c\tanh(\chi)$ dans la direction x^3) :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

$$\begin{aligned} r' &= r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \\ z' &= \frac{az+b}{cz+d} + \mathcal{O}(1/r) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Tsf. de Lorentz = Tsf. conformes sur la sphère céleste !}}$

Exemples

- Rotation (autour de l'axe x^3) :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad z' = e^{i\theta} z$$
- Boost (de vitesse $v = c\tanh(\chi)$ dans la direction x^3) :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad z' = e^{-\chi} z$$

Tsf. de Lorentz sur la sphère céleste

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

TSF. DE LORENTZ SUR LA SPHÈRE CÉLESTE

5. Pour aller plus loin...

Symétrie conforme et gravitation quantique

Théorie des champs

Symétrie conforme et gravitation quantique

Théorie des champs

- Champ = application $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{V}$

Symétrie conforme et gravitation quantique

Théorie des champs

- Champ = application $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{V}$
- Exemple : champ électromagnétique

SYMÉTRIE CONFORME ET GRAVITATION QUANTIQUE

Théorie des champs

- Champ = application $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{V}$
- Exemple : champ électromagnétique (éq. de Maxwell)

Symétrie conforme et gravitation quantique

Théorie des champs

- Champ = application $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{V}$
- Exemple : champ électromagnétique (éq. de Maxwell)

Symétries

- Exemple : symétrie de Lorentz en électromagnétisme

Symétrie conforme et gravitation quantique

Théorie des champs

- Champ = application $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{V}$
- Exemple : champ électromagnétique (éq. de Maxwell)

Symétries

- Exemple : symétrie de Lorentz en électromagnétisme
- Définition : une **théorie conforme des champs** sur $\mathcal{M}$ est une théorie des champs invariante sous transformations conformes de $\mathcal{M}$

Symétrie conforme et gravitation quantique

Théorie des champs

- Champ = application $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{V}$
- Exemple : champ électromagnétique (éq. de Maxwell)

Symétries

- Exemple : symétrie de Lorentz en électromagnétisme
- Définition : une **théorie conforme des champs** (CFT) sur $\mathcal{M}$ est une théorie des champs invariante sous transformations conformes de $\mathcal{M}$

SYMÉTRIE CONFORME ET GRAVITATION QUANTIQUE

Problème de la physique théorique : "Quantifier la gravitation"

Symétrie conforme et gravitation quantique

Problème de la physique théorique : "Quantifier la gravitation"

- Espace-temps (dimension 4)

SYMÉTRIE CONFORME ET GRAVITATION QUANTIQUE

Problème de la physique théorique : “Quantifier la gravitation”

- Espace-temps (dimension d)

Symétrie conforme et gravitation quantique

Problème de la physique théorique : “Quantifier la gravitation”

- Espace-temps (dimension d)
- **Holographie** :

$$\text{Gravitation en dimension } d$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{CFT en dimension } d-1 \text{ ou } d-2$$

Symétrie conforme et gravitation quantique

Problème de la physique théorique : "Quantifier la gravitation"

- Espace-temps (dimension d)
- **Holographie** :

$$\text{Gravitation en dimension } d$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{CFT en dimension } d-1 \text{ ou } d-2$$

- Ce que nous avons vu aujourd'hui :

Symétrie conforme et gravitation quantique

Problème de la physique théorique : “Quantifier la gravitation”

- Espace-temps (dimension d)
- **Holographie** :

$$\begin{gathered}\text{Gravitation en dimension } d\\ \Updownarrow\\ \text{CFT en dimension } d-1 \text{ ou } d-2\end{gathered}$$

- Ce que nous avons vu aujourd'hui :

$$\begin{gathered}\text{Groupe de Lorentz en } d=4\\ \Updownarrow\\ \text{Groupe conforme de } S^2\end{gathered}$$

Symétrie conforme et gravitation quantique

Problème de la physique théorique : "Quantifier la gravitation"

- Espace-temps (dimension d)
- **Holographie** :

$$\text{Gravitation en dimension } d \quad \Updownarrow \quad \text{CFT en dimension } d-1 \text{ ou } d-2$$

- Ce que nous avons vu aujourd'hui :

$$\text{Gravitation en } d = 4 \quad \Updownarrow \quad \text{CFT en } d = 2\,?$$

Symétrie conforme et gravitation quantique

Problème de la physique théorique : "Quantifier la gravitation"

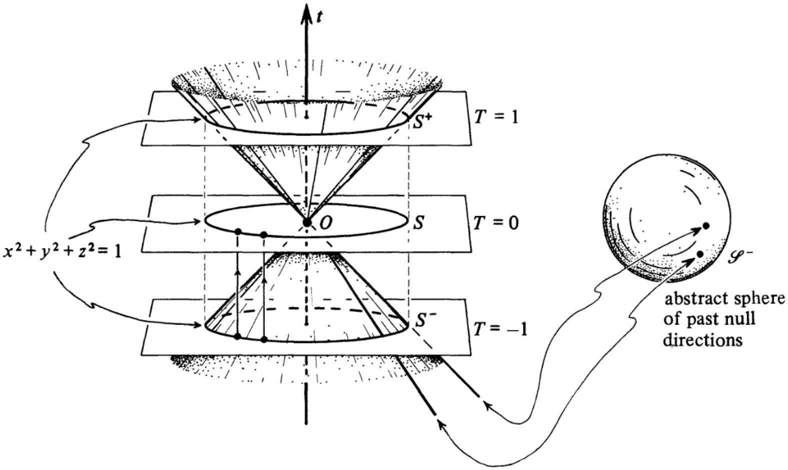
- Espace-temps (dimension d)
- **Holographie** :

$$\text{Gravitation en dimension } d \\ \Updownarrow \\ \text{CFT en dimension } d-1 \text{ ou } d-2$$

- Ce que nous avons vu aujourd'hui :

$$\text{Gravitation en } d = 4 \\ \Updownarrow \\ \text{CFT en } d = 2\,?$$

- A suivre...



(Penrose, Rindler : “Spinors and space-time”, C.U.P., 1984)