Cravates, réseaux triangulaires et invariants de noeuds

Florian Spinnler - ULB/UCL

The only true BSSM : Brussels Summer School of Mathematics
(Bethel School of Supernatural Ministry - British Society for Strain Measurement ?)
ULB

7 août 2013

Plan

1. Introduction et références.
2. La cravate sous toutes ses coutures.
3. Quelques résultats et observations.
4. Comment les distinguer?

Plan

1. **Introduction et références.**
2. La cravate sous toutes ses coutures.
3. Quelques résultats et observations.
4. Comment les distinguer?

Introduction et références.

Etymologie (Centre national de ressources textuelles et lexicales - CNRS):
1. Avant 1648. " soldat [croate, à l'origine] de la cavalerie légère "
compagnie de cravates;

Introduction et références.

Etymologie (Centre national de ressources textuelles et lexicales - CNRS):
1. Avant 1648. " soldat [croate, à l'origine] de la cavalerie légère " compagnie de cravates;
2. 1649-52 " bande de tissu portée autour du cou [comme en portaient les cavaliers croates] " (L. Richer, L'Ovide bouffon, 1, 4, p. 57, 58 ds Quem.).

Introduction et références.

Etymologie (Centre national de ressources textuelles et lexicales - CNRS):
1. Avant 1648. " soldat [croate, à l'origine] de la cavalerie légère " compagnie de cravates;
2. 1649-52 " bande de tissu portée autour du cou [comme en portaient les cavaliers croates] " (L. Richer, L'Ovide bouffon, 1, 4, p. 57, 58 ds Quem.).
Caveat 1: L'auteur français Eustache Deschamps († 1406) aurait utilisé le mot "cravate" dans une de ses ballades.

Introduction et références.

Etymologie (Centre national de ressources textuelles et lexicales - CNRS):
1. Avant 1648. " soldat [croate, à l'origine] de la cavalerie légère " compagnie de cravates;
2. 1649-52 " bande de tissu portée autour du cou [comme en portaient les cavaliers croates] " (L. Richer, L'Ovide bouffon, 1, 4, p. 57, 58 ds Quem.).
Caveat 1: L'auteur français Eustache Deschamps († 1406) aurait utilisé le mot "cravate" dans une de ses ballades. (Il en a écrit >1175)

Introduction et références.

Etymologie (Centre national de ressources textuelles et lexicales - CNRS):
1. Avant 1648. " soldat [croate, à l'origine] de la cavalerie légère " compagnie de cravates;
2. 1649-52 " bande de tissu portée autour du cou [comme en portaient les cavaliers croates] " (L. Richer, L'Ovide bouffon, 1, 4, p. 57, 58 ds Quem.).
Caveat 1: L'auteur français Eustache Deschamps († 1406) aurait utilisé le mot "cravate" dans une de ses ballades. (Il en a écrit >1175)
Caveat 2: le Caveat 1 est supporté par un réseau flou de références qui se citent les unes les autres sur internet (et je n'ai pas lu les 1175 ballades).

Introduction et références.

Aperçu de l'évolution de la cravate.

Introduction et références.

Quelques cravates célèbres - James Clerk Maxwell.

Introduction et références.

Quelques cravates célèbres - Oscar Wilde.

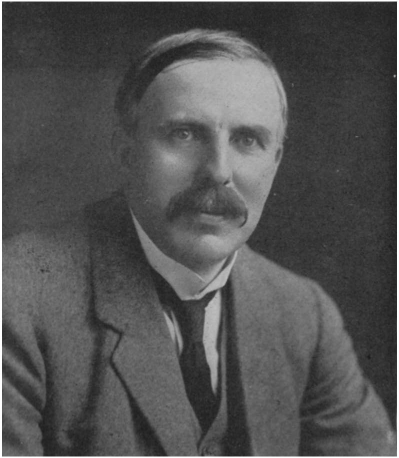
Introduction et références.

Quelques cravates célèbres - Oscar Wilde.

"A well-tied tie is the first serious step in life".

Introduction et références.

Quelques cravates célèbres - Ernest Rutherford.



Première rencontre avec la cravate simple ("noeud régate").

Introduction et références.

Quelques cravates célèbres -

Introduction et références.

Quelques cravates célèbres - Mark Zuckerberg.

Introduction et références.

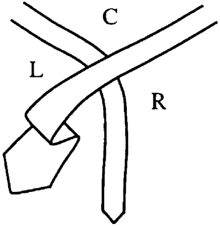
Quelques cravates célèbres - Elio Di Rupo.

Plan

1. Introduction et références.
2. **La cravate sous toutes ses coutures**.
3. Quelques résultats et observations.
4. Comment les distinguer?

La cravate sous toutes ses coutures

En face du miroir, deux positions initiales possibles:

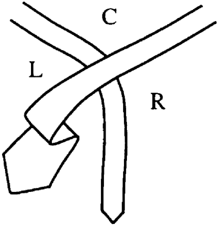


$L_\otimes \ldots$

ou

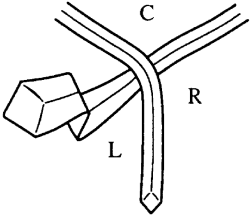
La cravate sous toutes ses coutures

En face du miroir, deux positions initiales possibles:



$L\otimes\ldots$

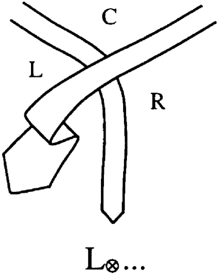
ou



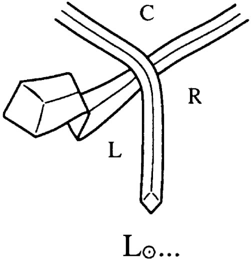
$L\odot\ldots$

La cravate sous toutes ses coutures

En face du miroir, deux positions initiales possibles:



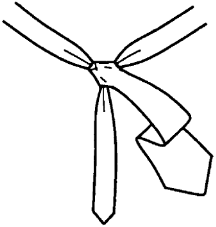
ou



Ceci divise le plan en trois régions : C,L,R.
La partie mobile va se déplacer dans ces trois régions.

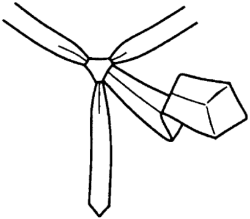
La cravate sous toutes ses coutures

A droite:



$\ldots R_{\otimes}\ldots$

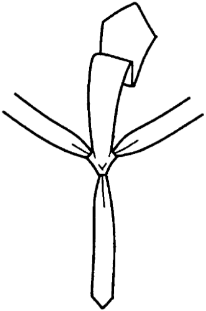
ou



$\ldots R_{\odot}\ldots$

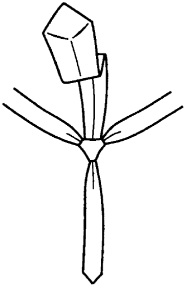
La cravate sous toutes ses coutures

Au centre:



$\ldots C_{\otimes} \ldots$

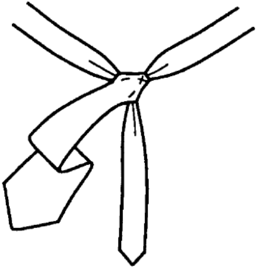
ou



$\ldots C_{\odot} \ldots$

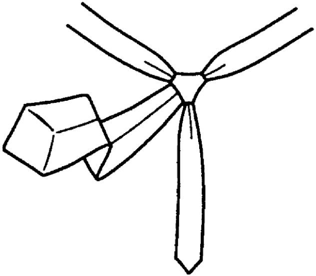
La cravate sous toutes ses coutures

A gauche:



$\ldots L_{\otimes}\ldots$

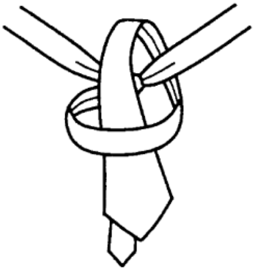
ou



$\ldots L_{\odot}\ldots$

La cravate sous toutes ses coutures

Pour terminer le noeud de cravate:

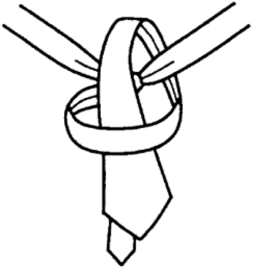


$\ldots(L_{\odot} R_{\otimes} C_{\odot})T$

ou

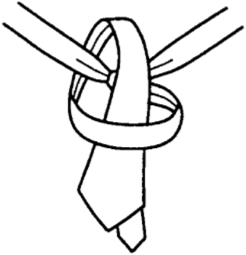
La cravate sous toutes ses coutures

Pour terminer le noeud de cravate:



$\ldots(L_{\odot}R_{\otimes}C_{\odot})T$

ou

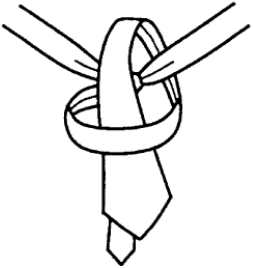


$\ldots(R_{\odot}L_{\otimes}C_{\odot})T$

,

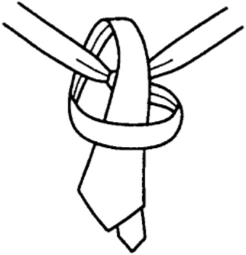
La cravate sous toutes ses coutures

Pour terminer le noeud de cravate:



$\ldots(L_{\odot} R_{\otimes} C_{\odot})T$

ou

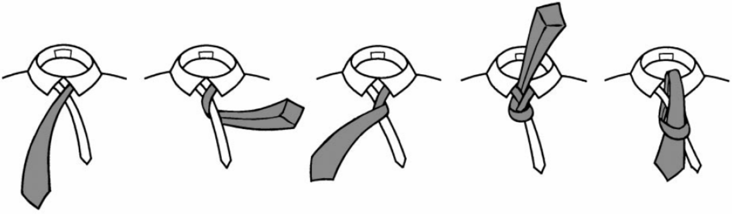


$\ldots(R_{\odot} L_{\otimes} C_{\odot})T$,

où "T" signifie "passer dans la boucle".

La cravate sous toutes ses coutures

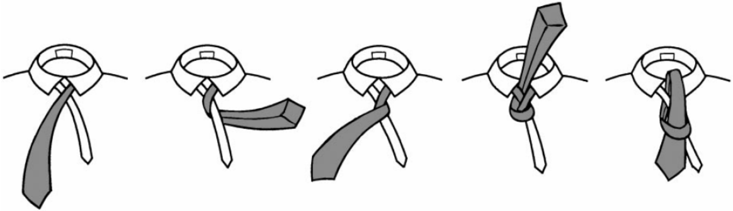
Exemple 1: le noeud simple (four-in-hand).



Symbole:

La cravate sous toutes ses coutures

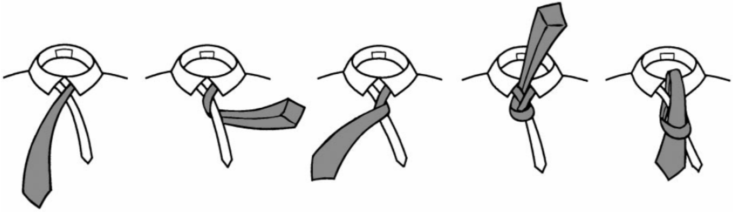
Exemple 1: le noeud simple (four-in-hand).



Symbole: $L_{\otimes}$

La cravate sous toutes ses coutures

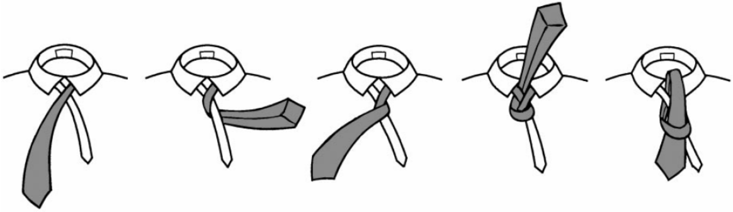
Exemple 1: le noeud simple (four-in-hand).



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}$

La cravate sous toutes ses coutures

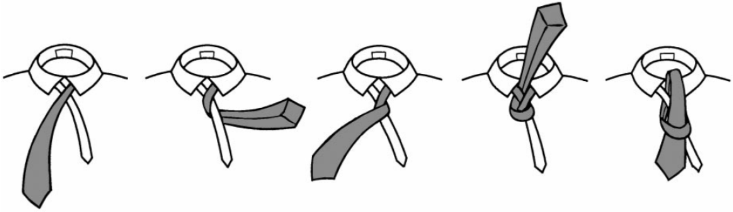
Exemple 1: le noeud simple (four-in-hand).



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ L_{\otimes}$

La cravate sous toutes ses coutures

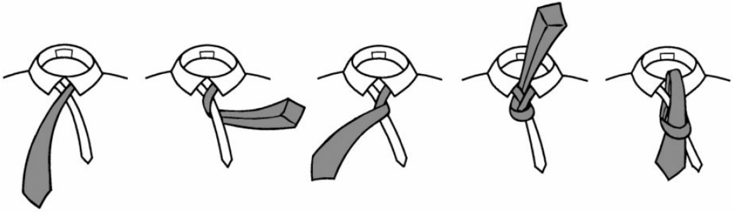
Exemple 1: le noeud simple (four-in-hand).



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ L_{\otimes} C_{\odot}$

La cravate sous toutes ses coutures

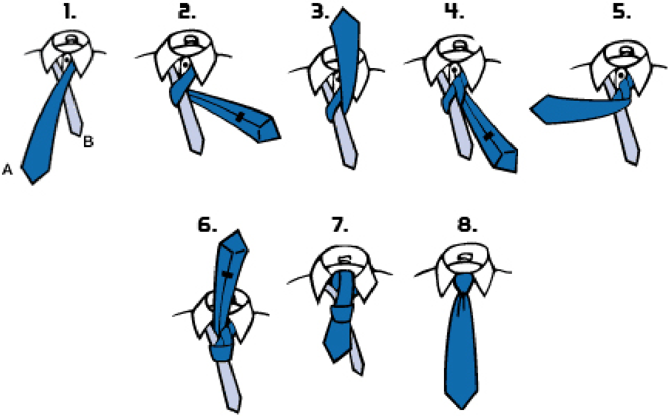
Exemple 1: le noeud simple (four-in-hand).



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ L_{\otimes} C_{\odot} T$.

La cravate sous toutes ses coutures

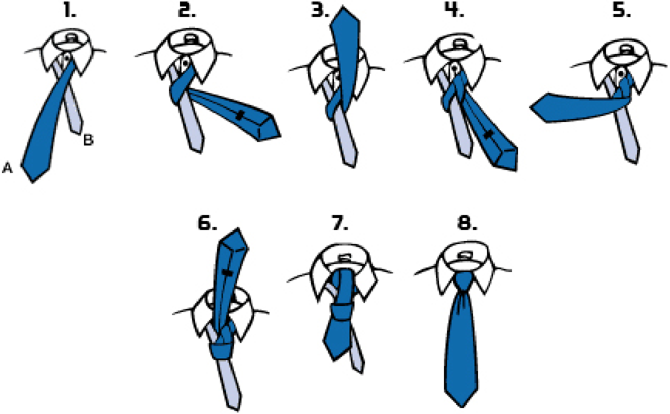
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole:

La cravate sous toutes ses coutures

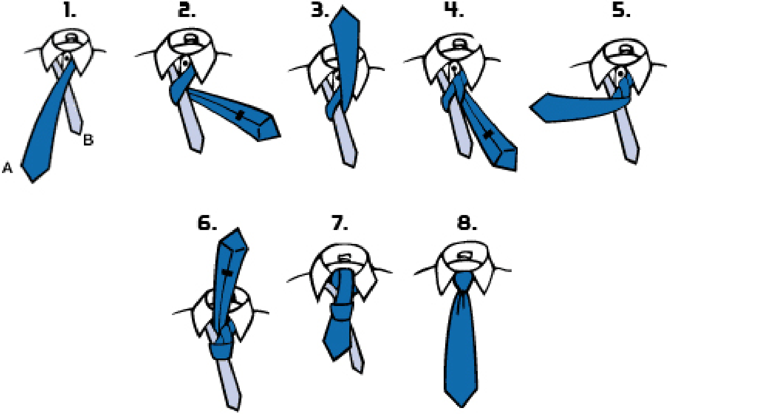
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole: $L_{\otimes}$

La cravate sous toutes ses coutures

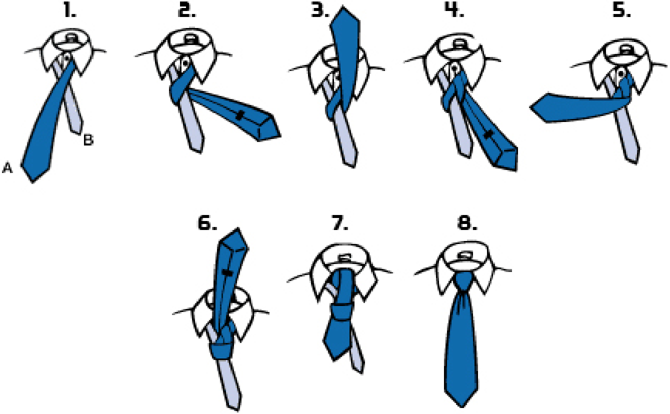
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}$

La cravate sous toutes ses coutures

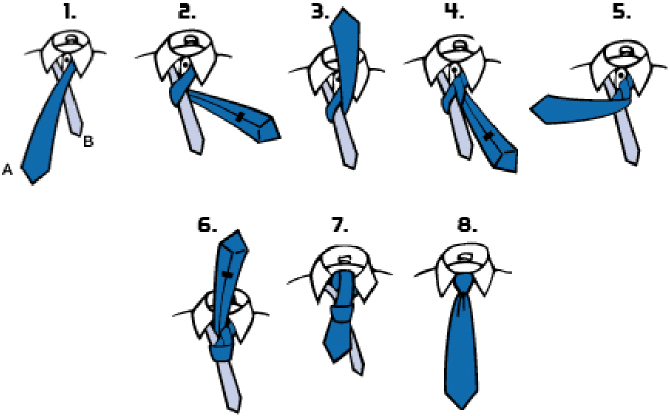
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ C_{\otimes}$

La cravate sous toutes ses coutures

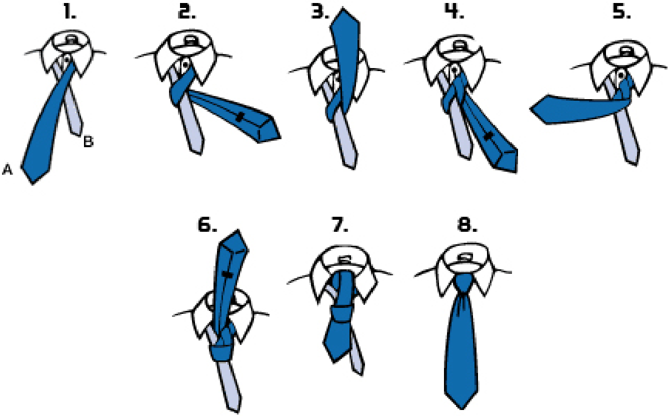
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ C_{\otimes} R_{\odot}$

La cravate sous toutes ses coutures

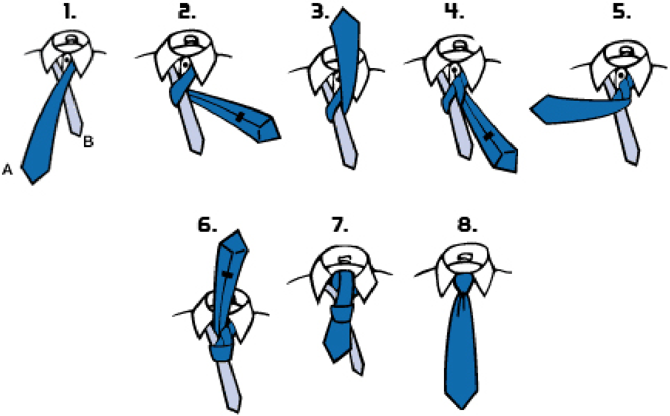
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ C_{\otimes} R_{\odot} L_{\otimes}$

La cravate sous toutes ses coutures

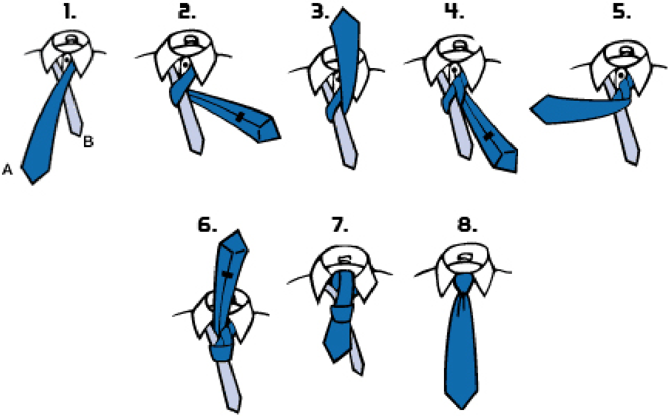
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ C_{\otimes} R_{\odot} L_{\otimes} C_{\odot}$

La cravate sous toutes ses coutures

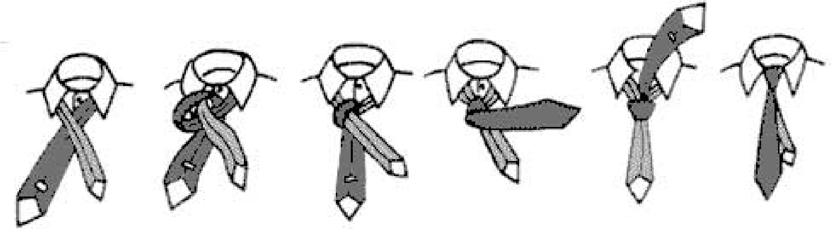
Exemple 2: le demi-Windsor.



Symbole: $L_{\otimes}\ R_{\odot}\ C_{\otimes} R_{\odot} L_{\otimes} C_{\odot}\ T$.

La cravate sous toutes ses coutures

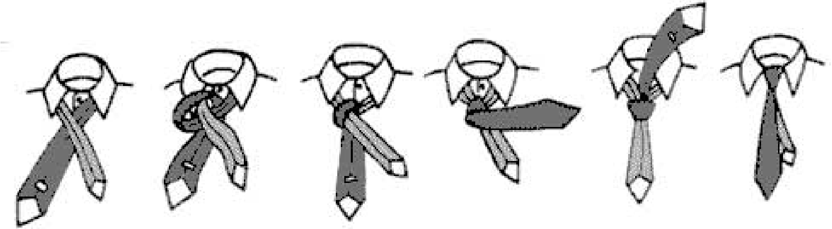
Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole:

La cravate sous toutes ses coutures

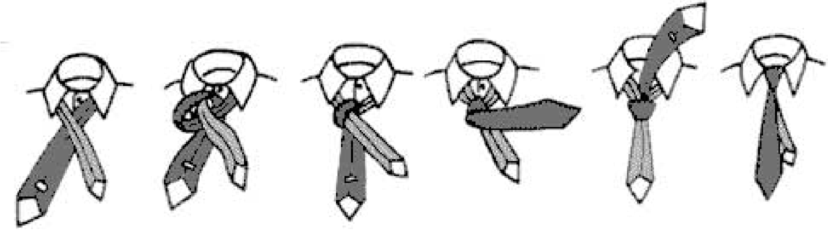
Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole: $L_{\odot}$

La cravate sous toutes ses coutures

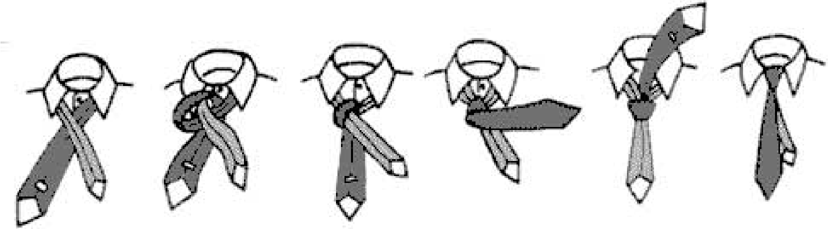
Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole: $L_{\odot}\ C_{\otimes}$

La cravate sous toutes ses coutures

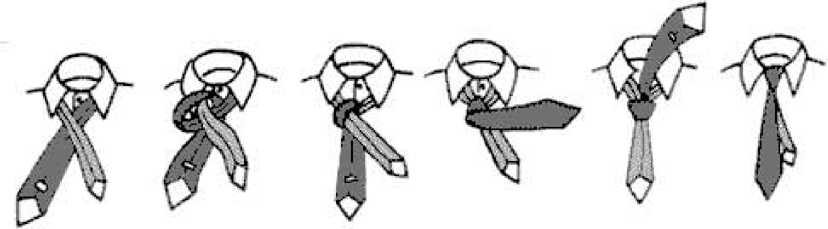
Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole: $L_{\odot}\ C_{\otimes}\ L_{\odot}$

La cravate sous toutes ses coutures

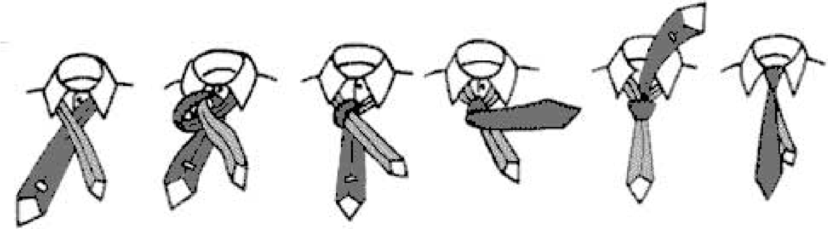
Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole: $L_{\odot}\ C_{\otimes}\ L_{\odot} R_{\otimes}$

La cravate sous toutes ses coutures

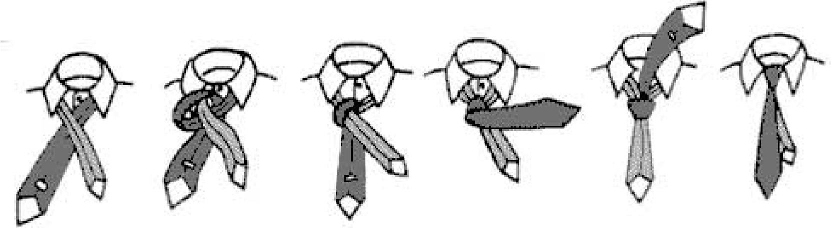
Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole: $L_\odot\ C_\otimes\ L_\odot R_\otimes C_\odot$

La cravate sous toutes ses coutures

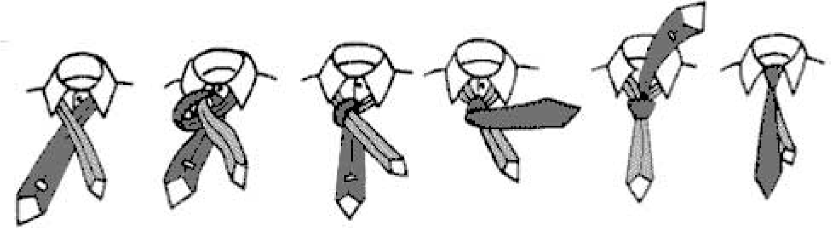
Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole: $L_{\odot}\ C_{\otimes}\ L_{\odot} R_{\otimes} C_{\odot} T$.

La cravate sous toutes ses coutures

Exemple 3: le noeud Pratt*; il commence à l'envers.



Symbole: $L_{\odot}\ C_{\otimes}\ L_{\odot}R_{\otimes}C_{\odot}T$.
Pratt standard: $L_{\odot}\ C_{\otimes}\ R_{\odot}\ L_{\otimes}\ C_{\odot}\ T$.

La cravate sous toutes ses coutures

Observations :

- Commence par $L_\otimes$ ou $L_\odot$, finit par $C_\odot$,
- Alternance de $\otimes$ et $\odot$,
- Pas de lettre répétée : RR, LL,CC.

La cravate sous toutes ses coutures

Observations :

- Commence par $L_\otimes$ ou $L_\odot$, finit par $C_\odot$,
- Alternance de $\otimes$ et $\odot$,
- Pas de lettre répétée : $\cancel{RR}$, $\cancel{LL}$, $\cancel{CC}$.

La cravate sous toutes ses coutures

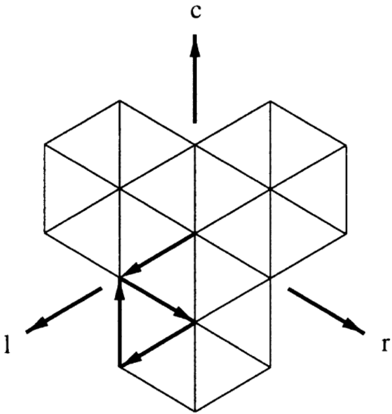
Observations :

- Commence par $L_\otimes$ ou $L_\odot$, finit par $C_\odot$,
- Alternance de $\otimes$ et $\odot$,
- Pas de lettre répétée : $\cancel{RR}$, $\cancel{LL}$, $\cancel{CC}$.

$\Rightarrow$ on oublie $\otimes$ et $\odot$.
Nombre pair de mouvements $\rightarrow L_\otimes \cdots$, sinon $L_\odot \cdots$.

La cravate sous toutes ses coutures

On considère le réseau triangulaire L suivant:



La cravate sous toutes ses coutures

Ceci mène à la définition suivante:

Définition

Une cravate est une marche aléatoire sur le réseau triangulaire L :

- *commençant par la valeur* **l***,*
- *terminant par la combinaison* **rlc** *ou la combinaison* **lrc***, telle que*
- *seuls les déplacements le long des directions positives sont effectués, et*
- *deux déplacements consécutifs sont toujours différents.*

La cravate sous toutes ses coutures

Ceci mène à la définition suivante:

Définition

Une cravate est une marche aléatoire sur le réseau triangulaire L :

- *commençant par la valeur* **l***,*
- *terminant par la combinaison* **rlc** *ou la combinaison* **lrc***, telle que*
- *seuls les déplacements le long des directions positives sont effectués, et*
- *deux déplacements consécutifs sont toujours différents.*

Dans l'exemple ci-dessus, le noeud de cravate simple est représenté : c'est la marche aléatoire **lrlc**.

Plan

1. Introduction et références.
2. La cravate sous toutes ses coutures.
3. **Quelques résultats et observations**.
4. Comment les distinguer?

Plan

Définition

La taille du noeud de cravate est le nombre d'étapes de la marche aléatoire correspondante.

Question: Combien y a-t-il de noeuds de cravates de taille h fixée?
Réponse: autant que de marches aléatoires comprenant h étapes et satisfaisant aux conditions requises...

Quelques résultats et observations

Plusieurs étapes:

1. Nombre de marches aléatoires de longueur n commençant par **l**, puis
2. Nombre de marches aléatoires de longueur n commençant par **l** <u>et</u> terminant par **rlc** ou **lrc**.

Soit $F_{\mathbf{r}}(n)$, $F_{\mathbf{l}}(n)$, $F_{\mathbf{c}}(n)$ le nombre de marches aléatoires de n étapes, commençant par **l** et terminant respectivement par **r**, **l** ou **c**. On a:

$$F_{\mathbf{r}}(n) + F_{\mathbf{l}}(n) + F_{\mathbf{c}}(n) = 2^{n-1}.$$

En effet, il y a deux fois plus de marches aléatoires admissibles de longueur n que de marches aléatoires de longueur $n-1 \Rightarrow x2$ à chaque incrément de n.

Quelques résultats et observations

Etant donné que deux pas successifs ne peuvent être identiques, on a la relation suivante:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{l}}(n+2) &= F_{\mathbf{r}}(n+1) + F_{\mathbf{c}}(n+1) \\ &= F_{\mathbf{l}}(n) + F_{\mathbf{c}}(n) + F_{\mathbf{r}}(n) + F_{\mathbf{l}}(n). \end{aligned}$$

Quelques résultats et observations

Etant donné que deux pas successifs ne peuvent être identiques, on a la relation suivante:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{l}}(n+2) &= F_{\mathbf{r}}(n+1) + F_{\mathbf{c}}(n+1) \\ &= F_{\mathbf{l}}(n) + F_{\mathbf{c}}(n) + F_{\mathbf{r}}(n) + F_{\mathbf{l}}(n). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $F_{\mathbf{r}}(n) + F_{\mathbf{l}}(n) + F_{\mathbf{c}}(n) = 2^{n-1}$. Par conséquent, la relation de récurrence suivante est vraie:

$$\boxed{F_{\mathbf{l}}(n+2) = F_{\mathbf{l}}(n) + 2^{n-1}} (\star)$$

La relation de récurrence pour $F_{\mathbf{r}}(n)$ est identique:

$$F_{\mathbf{r}}(n+2) = F_{\mathbf{r}}(n) + 2^{n-1}$$

Quelques résultats et observations

Les conditions initiales différencient $F_{\mathbf{l}}$ et $F_{\mathbf{r}}$.
Pour $F_{\mathbf{l}}$:

- $F_{\mathbf{l}}(1) = 1$, et
- $F_{\mathbf{l}}(2) = 0$

Pour $F_{\mathbf{r}}$:

- $F_{\mathbf{r}}(1) = 0$, et
- $F_{\mathbf{r}}(2) = 1$.

Quelques résultats et observations

Comment résoudre ($\star$)? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène

Quelques résultats et observations

Comment résoudre ($\star$)? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH!)$+$

Quelques résultats et observations

Comment résoudre $(\star)$? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH!)$+$
2. Solution particulière de l'équation générale.

Quelques résultats et observations

Comment résoudre $(\star)$? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH!)$+$
2. Solution particulière de l'équation générale.(SPEG!) - très beaux acronymes.

Quelques résultats et observations

Comment résoudre ($\star$)? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH!)$+$
2. Solution particulière de l'équation générale.(SPEG!) - très beaux acronymes.

(Pour ceux que cela intéresse: l'acronyme le plus long du monde est russe, c'est: Нииомтплабопармбетзелбетрабсбомонимонконотдтехстромонт)

Quelques résultats et observations

Comment résoudre $(\star)$? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH!)$+$
2. Solution particulière de l'équation générale.(SPEG!) - très beaux acronymes.

(Pour ceux que cela intéresse: l'acronyme le plus long du monde est russe, c'est:
Нииомтплабопармбетзелбетрабсбомонимонконотдтехстромонт)
Solution générale de

$$F_{\mathsf{l}}(n+2) = F_{\mathsf{l}}(n)?$$

Polynôme caractéristique de l'équation: injecter r^n dans l'équation $(\mathbf{H})$.

Quelques résultats et observations

Comment résoudre ($\star$)? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH!)+
2. Solution particulière de l'équation générale.(SPEG!) - très beaux acronymes.

(Pour ceux que cela intéresse: l'acronyme le plus long du monde est russe, c'est:
Нииомтплабопармбетзелбетрабсбомонимонконотдтехстромонт)
Solution générale de

$$F_{\mathbf{I}}(n+2) = F_{\mathbf{I}}(n)?$$

Polynôme caractéristique de l'équation: injecter r^n dans l'équation (**H**).
$\rightarrow$ résoudre $r^2 = 1$, $r \in \mathbb{R}$.

Quelques résultats et observations

Comment résoudre $(\star)$? Copier les méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires.

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH!)+
2. Solution particulière de l'équation générale.(SPEG!) - très beaux acronymes.

(Pour ceux que cela intéresse: l'acronyme le plus long du monde est russe, c'est:
Нииомтплабопармбетзелбетрабсбомонимонконотдтехстромонт)
Solution générale de

$$F_{\mathsf{I}}(n+2) = F_{\mathsf{I}}(n)?$$

Polynôme caractéristique de l'équation: injecter r^n dans l'équation (**H**).
$\rightarrow$ résoudre $r^2 = 1$, $r \in \mathbb{R}$. Solution générale de l'équation homogène:

$$F_{\mathsf{I}}^{H}(n) = A1^n + B(-1)^n,$$

où A et B sont des constantes à déterminer.

Quelques résultats et observations

Solution particulière? Chercher une solution de la forme $f(n) = k2^{n-1}$ (forme du terme inhomogène). Il faut résoudre:

$$f(n+2) = f(n) + 2^{n-1},$$

avec $f(n) = k2^{n-1}$, où k est une constante indépendante de n, à déterminer.

Quelques résultats et observations

Solution particulière? Chercher une solution de la forme $f(n) = k2^{n-1}$ (forme du terme inhomogène). Il faut résoudre:

$$f(n+2) = f(n) + 2^{n-1},$$

avec $f(n) = k2^{n-1}$, où k est une constante indépendante de n, à déterminer.
$\rightarrow$ on trouve $k = \frac{1}{3}$.
Il reste à déterminer A et B en imposant les conditions initiales à:

$$F_{\mathsf{I}}(n) = A1^n + B(-1)^n + \frac{1}{3}2^{n-1};$$

on trouve $A = 0$ et $B = \frac{-2}{3}$.

Quelques résultats et observations

On a montré l'observation suivante:

Observation

Il y a $\frac{2}{3}(2^{n-2} + (-1)^{n-1})$ marches aléatoires de n étapes, commençant et terminant par $\mathbf{l}$*.*

En procédant exactement de la même façon que pour $F_{\mathbf{l}}$ mais en imposant les conditions initiales de $F_{\mathbf{r}}(n)$, on parvient à la conclusion suivante:

Observation

Il y a $\frac{1}{3}(2^{n-1} - (-1)^{n-1})$ marches aléatoires de n étapes, commençant par $\mathbf{l}$ *et terminant par* $\mathbf{r}$*.*

Quelques résultats et observations

On a montré l'observation suivante:

Observation

Il y a $\frac{2}{3}(2^{n-2} + (-1)^{n-1})$ *marches aléatoires de* n *étapes, commençant et terminant par* $\mathbf{l}$*.*

En procédant exactement de la même façon que pour $F_{\mathbf{l}}$ mais en imposant les conditions initiales de $F_{\mathbf{r}}(n)$, on parvient à la conclusion suivante:

Observation

Il y a $\frac{1}{3}(2^{n-1} - (-1)^{n-1})$ *marches aléatoires de* n *étapes, commençant par* $\mathbf{l}$ *et terminant par* $\mathbf{r}$*. (Attention erreur de signe dans l'article original)*

Quelques résultats et observations

On remarque enfin le fait suivant:

Observation

- *si l'antépénultième étape est* **r**, *la terminaison est* **lc**,
- *si l'antépénultième étape est* **l**, *la terminaison est* **rc**.

Par conséquent, si $K(h)$ *représente le nombre de cravates de taille* h, *on a*

$$K(h) = F_{\mathbf{r}}(h-2) + F_{\mathbf{l}}(h-2).$$

On peut maintenant répondre à la question: Combien y a-t-il de noeuds de cravate de taille h donnée?

Proposition

$$\boxed{K(h) = \frac{1}{3}(2^{h-2} - (-1)^{h-2})}.$$

Plan

1. Introduction et références.
2. La cravate sous toutes ses coutures.
3. Quelques résultats et observations.
4. **Comment les distinguer?**

Comment les distinguer?

Question cruciale : Quand dira-t-on que deux noeuds (de cravate ou non) sont équivalents? Si vous faites un concours de cravate avec un ami, comment comparer vos noeuds? (on répond aux questions importantes ici).

Comment les distinguer?

Question cruciale : Quand dira-t-on que deux noeuds (de cravate ou non) sont équivalents? Si vous faites un concours de cravate avec un ami, comment comparer vos noeuds? (on répond aux questions importantes ici).

Réponse :

Comment les distinguer?

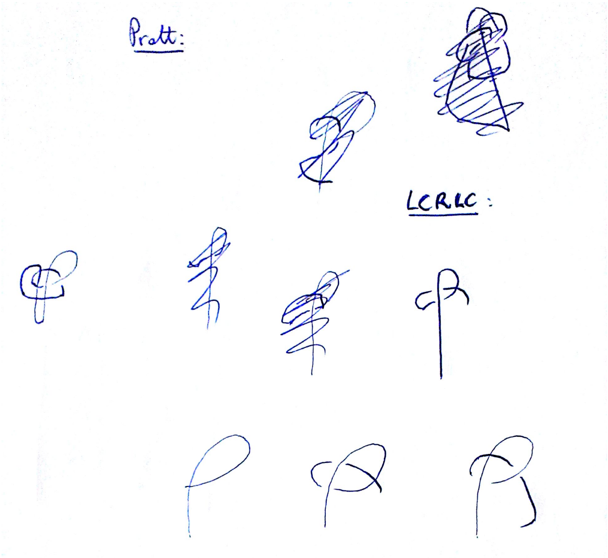
Question cruciale : Quand dira-t-on que deux noeuds (de cravate ou non) sont équivalents? Si vous faites un concours de cravate avec un ami, comment comparer vos noeuds? (on répond aux questions importantes ici).
Réponse :
Difficile.
Mais..

Comment les distinguer?

On peut essayer de faire un dessin ou l'autre...

Comment les distinguer?

On peut essayer de faire un dessin ou l'autre...



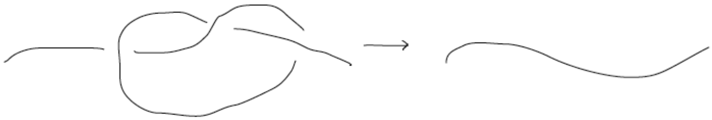
Comment les distinguer?

Après quelques tentatives:

Comment les distinguer?

Remarque

Il faut attacher les deux extrémités de la cravate, sinon, intuitivement, tous les noeuds seraient triviaux:



Comment les distinguer?

Si quelqu'un a des doutes:

Comment les distinguer?

Observation : Le noeud Pratt standard est le non-noeud ou noeud trivial.
Preuve: à la main.

Comment les distinguer?

Observation : Le noeud Pratt standard est le non-noeud ou noeud trivial.
Preuve: à la main.
$\Rightarrow$ théoriquement, on peut refaire ce noeud à partir d'une boucle, en tenant les deux extrémités! (5EUR à celui qui arrive à faire quelque chose de correct).

Comment les distinguer?

Observation : Le noeud Pratt standard est le non-noeud ou noeud trivial.
Preuve: à la main.
$\Rightarrow$ théoriquement, on peut refaire ce noeud à partir d'une boucle, en tenant les deux extrémités! (5EUR à celui qui arrive à faire quelque chose de correct).

On peut se dire: en manipulant un peu le diagramme de , on aurait pu arriver à la même conclusion (cf. vraie cravate).

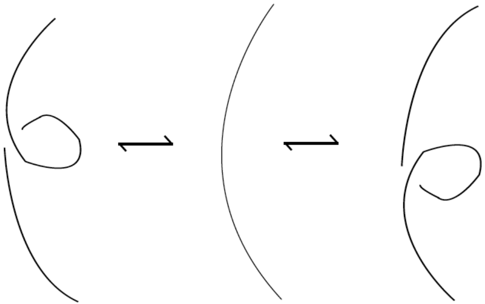
Comment les distinguer?

Manipuler comment?

Comment les distinguer?

Manipuler comment? On utilise 3 mouvements, dits de Reidemeister:

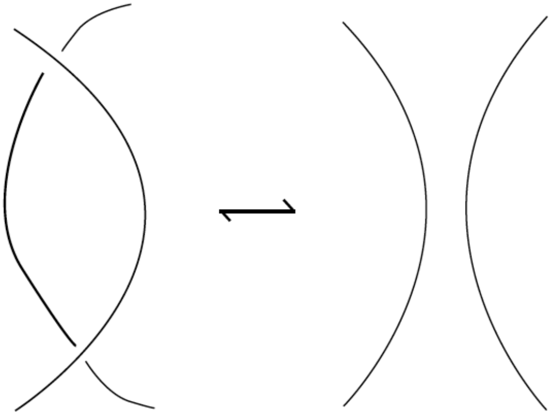
Définition



R1

Comment les distinguer?

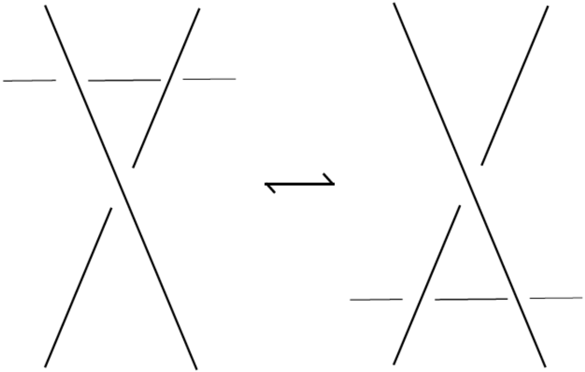
Définition



R2

Comment les distinguer?

Définition



R3

Comment les distinguer?

Notion précise de déformation dans $\mathbb{R}^3$:

Définition

Une isotopie de $\mathbb{R}^3$ *est une famille d'homéomorphismes* h_t, $t \in [0, 1]$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

- h_0 *est l'identité*

Comment les distinguer?

Notion précise de déformation dans $\mathbb{R}^3$:

Définition

Une isotopie de $\mathbb{R}^3$ *est une famille d'homéomorphismes* h_t, $t \in [0,1]$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

- h_0 *est l'identité*
- $H : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (t,p) \mapsto h_t(p)$ *est continue.*

$\to$ notion d'équivalence de noeuds:

Définition

Deux noeuds K *et* K' *sont dits équivalents s'il existe une isotopie* h_t *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

- $h_0 K = K$ *et*
- $h_1 K = K'$.

Comment les distinguer?

On a un théorème très fort:

Théorème (Reidemeister)

Deux noeuds K et K' sont équivalents si et seulement si tout diagramme de l'un peut être transformé en un diagramme de l'autre par une succession finie des trois mouvements de Reidemeister R_1, R_2 et R_3.

Comment les distinguer?

On a un théorème très fort:

Théorème (Reidemeister)

Deux noeuds K et K' sont équivalents si et seulement si tout diagramme de l'un peut être transformé en un diagramme de l'autre par une succession finie des trois mouvements de Reidemeister R_1, R_2 et R_3.

Remarque : Parfois, ces manipulations peuvent être ardues.

Comment les distinguer?

On introduit un objet très visuel relativement facile à manipuler, qui répond au critère suivant:

- Objet(K) $\neq$ Objet(K') $\Rightarrow K \neq K'$.

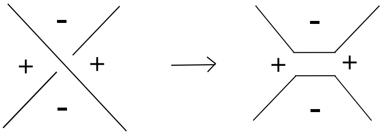
Cet objet est un polynôme, que l'on construit en plusieurs étapes.

Comment les distinguer?

A chaque zone d'un croisement du diagramme on associe un signe (cf. tableau).

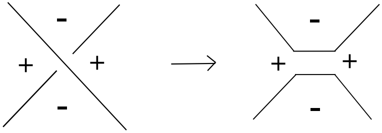
Comment les distinguer?

A chaque zone d'un croisement du diagramme on associe un signe (cf. tableau).On définit ensuite deux opérations sur les croisements:
Op_1 (relie les zones $+$)

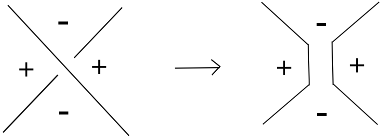


Comment les distinguer?

A chaque zone d'un croisement du diagramme on associe un signe (cf. tableau).On définit ensuite deux opérations sur les croisements:
Op_1 (relie les zones $+$)



et Op_2 (relie les zones $-$)



Définition

Un <u>*état*</u> *s d'un noeud K représenté par un diagramme à n croisements est un diagramme obtenu en effectuant l'opération 1 ou l'opération 2 sur chacun des n croisements du noeud K (*$\rightarrow$ *il y a* 2^n *états pour K).*

Comment les distinguer?

Définition

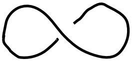
Etant donné un noeud K et un état s de K, on définit le monôme en A suivant:

$$\langle K \mid s \rangle := A^{n_1} A^{-n_2},$$

où, pour obtenir s, on a divisé n_1 croisements avec l'opération 1 et n_2 croisements avec l'opération 2.

Comment les distinguer?

Considérons l'exemple suivant (qui est le noeud trivial):

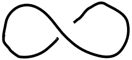


Il a deux états. (cf. tableau).
D'après la définition de $\langle K \mid s \rangle$, on a:

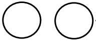
 $=$

Comment les distinguer?

Considérons l'exemple suivant (qui est le noeud trivial):



Il a deux états. (cf. tableau).
D'après la définition de $\langle K \mid s \rangle$, on a:

$\langle$  $\mid$  $\rangle = A^{-1}$

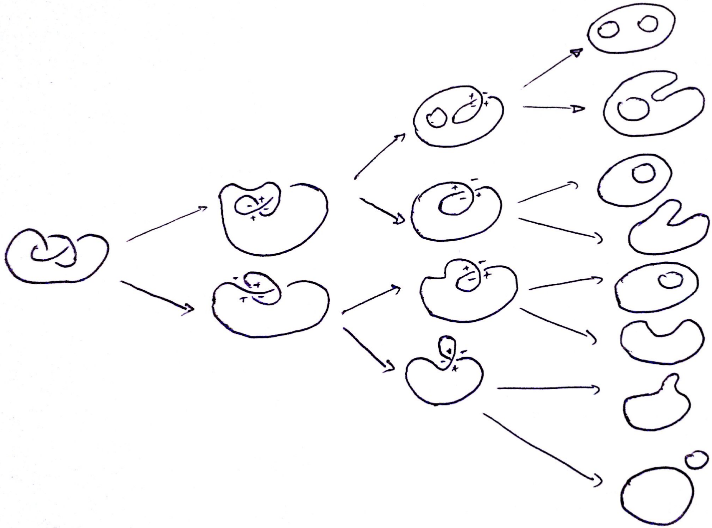
Définition (Polynôme des états)

$$\langle K \rangle = \sum_{s \in S_K} \langle K \mid s \rangle d^{\|s\|},$$

où S_K est l'ensemble des états de K et $\|s\|$ représente le nombre de composantes de s auquel on soustrait 1 (c'est-à-dire dire le nombre de courbes fermées différentes dans s, moins 1)

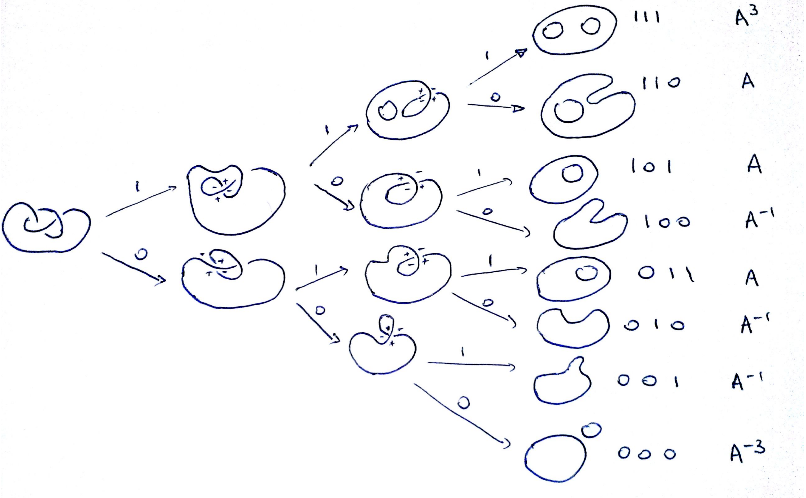
Comment les distinguer?

Etats du noeud simple (LRLC):



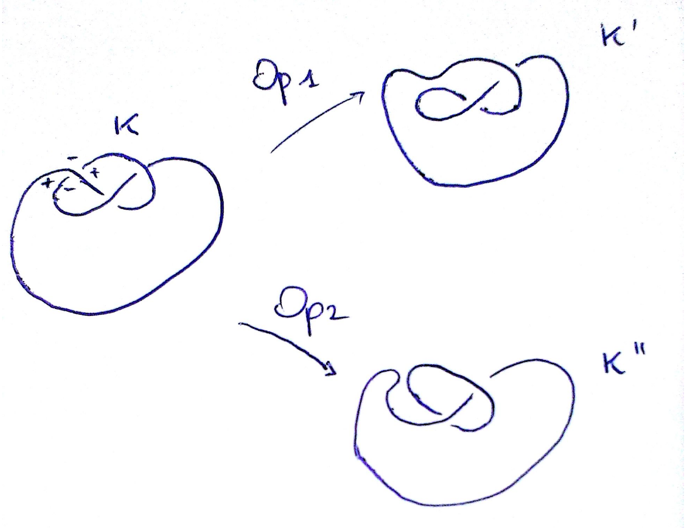
Comment les distinguer?

Etats du noeud simple (LRLC) et $\langle K \mid s \rangle$:



Comment les distinguer?

Soit K un noeud possédant $n \geq 1$ croisement(s). On numérote les croisements et on fixe le premier, C. Soit $K' = Op_1(K)$ (en C) et $K'' = Op_2(K)$ (en C). Par exemple:



Comment les distinguer?

Proposition

$\langle K \rangle = A \langle K' \rangle + A^{-1} \langle K'' \rangle$

Preuve

On a : $S_{K'} \cup S_{K''} = S_K$*. Un état de* $K \in 2^{\{n\}}$*, p.ex.* $(0, 1, 0, \cdots)$*. Un état de* K' *ou* $K'' \in 2^{\{n-1\}}$*. Etant donné un état de* K' *(reps.* K''*), on récupère un état de* K *en rajoutant* 1 *(resp.* 0*) en première (resp. deuxième) position :* $s \mapsto \tilde{s}$ *est cette opération.*

- $\tilde{s} \in S_K$: n_1"1" *et* n_2"0" *correspond à* $s \in S_{K'}$ *ou* $s \in S_{K''}$*:*
- *si* $s \in S_{K'}$: $(n_1 - 1)$"1" *et* n_2"0"
- *si* $s \in S_{K''}$: n_1"1" *et* $(n_2 - 1)$"0"

Soit $s \in S_{K'}$*.*
$\langle K' \mid s \rangle = A^{n_1 - 1} A^{-n_2} = A^{-1} \langle K \mid \tilde{s} \rangle \Leftrightarrow \langle K \mid \tilde{s} \rangle = A \langle K' \mid s \rangle$*. De façon analogue:*
$\langle K'' \mid s \rangle = A^{n_1} A^{-n_2 + 1} = A \langle K \mid \tilde{s} \rangle \Leftrightarrow \langle K \mid \tilde{s} \rangle = A^{-1} \langle K'' \mid s \rangle$*.*

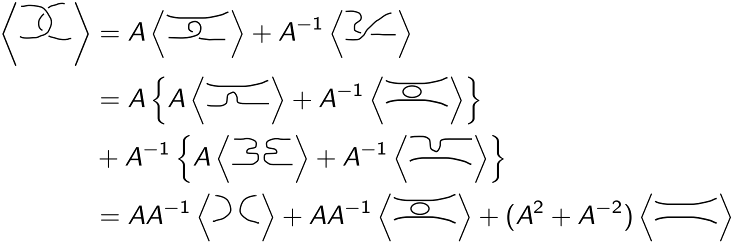
Comment les distinguer?

On a par conséquent:

$$\begin{aligned}
\langle K \rangle &= \sum_{s \in S_K} \langle K \mid s \rangle d^{\|s\|} \\
&= \sum_{s \in S_{K'}} \langle K \mid \tilde{s} \rangle d^{\|s\|} + \sum_{s \in S_{K''}} \langle K \mid \tilde{s} \rangle d^{\|s\|} \\
&= A \sum_{s \in S_{K'}} \langle K' \mid s \rangle d^{\|s\|} + A^{-1} \sum_{s \in S_{K''}} \langle K'' \mid s \rangle d^{\|s\|} \\
&= A \langle K' \rangle + A^{-1} \langle K'' \rangle .
\end{aligned}$$

Comment les distinguer?

Comme application de cette proposition, on trouve un critère pour l'invariance sous R_2:



Comment les distinguer?

A ce stade on remarque le fait suivant:

Remarque

Soit K un noeud et K' le noeud obtenu en ajoutant à K une boucle non nouée (par exemple, comme dans  *). Alors,*

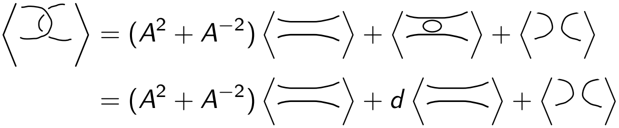
$$\langle K' \rangle = d\langle K \rangle.$$

Preuve

Par définition de $\langle K \rangle = \sum_{s \in S_K} \langle K \mid s \rangle d^{\|s\|}$.

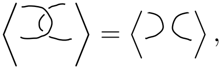
Comment les distinguer?

Par conséquent, on a



Proposition

Si $d = -(A^2 + A^{-2})$, alors:

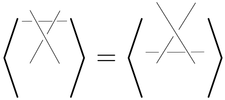


i.e. le polynôme des états est invariant sous R_2

Sans condition supplémentaire, on a directement:

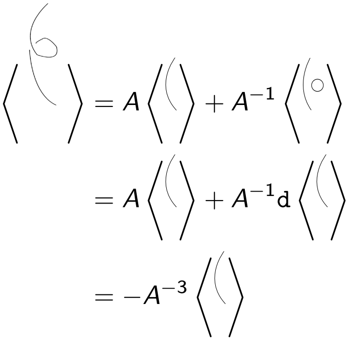
Proposition

Le polynôme des états est invariant sous R_3:



Comment les distinguer?

Petit problème pour R_1:



Comment les distinguer?

De manière analogue:

$\Bigg\langle$  $\Bigg\rangle = -A^3 \Big\langle$  $\Big\rangle$

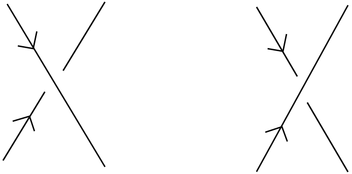
$\rightarrow$ on <u>répare</u> le polynôme des états $\langle K \rangle$ en un polynôme invariant. Prix à payer: on passe de "noeuds" à "noeuds orientés".

Comment les distinguer?

Définition

Soit un noeud orienté K. La quantité $w(K)$ est la somme du signe de tous les croisements:

$$w(k) = \sum_{C \in C(K)} sign(C) \tag{1}$$



$\longrightarrow$ + 1 $\qquad$ $\longrightarrow$ -1

où C(K) représente l'ensemble des croisements de K.

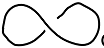
Comment les distinguer?

Théorème

$f(K) := (-A)^{-3w(k)}\langle K\rangle$ *est invariant sous isotopie de* $\mathbb{R}^3$*.*

Définition

$f(K)(t^{-\frac{1}{4}})$ *est appelé polynôme de Jones de* K*.*

$\rightarrow$ si l'on munit notre notre noeud "jouet"  de l'orientation suivante:

on trouve

$$f(K) = 1.$$

Comment les distinguer?

Un petit exercice facile: montrer que

$f($  $) = 1.$

(7 croisements $\rightarrow$ 128 termes dans le calcul de $\langle K \rangle$ mais : calcul mécanique).

Merci pour votre attention.

Références

[*FM*] Thomas M.A. Fink Yong Mao. Tie knots, random walks and topology. Physica A 276(2000)109 – 121
[*K*] Louis H. Kaufmann. State models and the Jones polynomial.Topology Vol. 26, *No*.3, *pp*.395 – 407, 1987