Introduction aux ensembles ordonnés et à leurs applications

Selim Rexhep

Université Libre de Bruxelles

BSSM 2013

Buts de mon exposé

1. Présenter une jolie théorie mathématique, ayant de plus des applications intéressantes.
2. Vous parler de certains sujets sur lesquels des chercheurs de l'ULB ont travaillé.

Ensembles ordonnés

Première partie

Introduction

Ensembles ordonnés

Un ensemble ordonné est un couple (X, R) où R est une "relation d'ordre" sur les éléments de l'ensemble X.

Ensembles ordonnés

La théorie des ensembles ordonnés peut se diviser en deux parties :

- Si X est fini : Sujet de mathématiques discrètes.
- Si X est infini : Sujet de théorie des ensembles.

Axiomes

Propriétés de $\leq$ sur l'ensemble $\mathbb{N}$:

- **Réflexivité** : $n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- **Transitivité** : $n \leq m$ et $m \leq p$ implique $n \leq p$ pour tout $m, n, p \in \mathbb{N}$,
- **Antisymétrie** : $n \leq m$ et $m \leq n$ implique que $n = m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

Axiomes

Une relation R sur X réflexive, transitive et antisymétrique est une **relation d'ordre** sur X. On la note souvent $\leq$ par analogie avec l'ordre habituel sur $\mathbb{N}$.

Si deux éléments de X sont toujours en relation ($x \leq y$ ou $y \leq x$ pour tout $x, y \in X$), l'ordre $\leq$ est dit **total**.

Axiomes

La théorie ainsi obtenue :

1. Généralise de nombreux exemples : algèbre, géométrie, théorie des ensembles, ...

2. Possède de nombreuses applications (informatique théorique, psychologie, ...).

Repères historiques

- XIX ième siècle : les prémices de la théorie apparaissent dans les travaux de G.Cantor, R.Dedekind, E. Schröder, G.Boole et C.S.Pierce.
- Années 1930 : début de la théorie générale des ensembles ordonnés grâce notamment aux travaux de G.Birkhoff.

Ensembles ordonnés

Deuxième partie

Exemples, diagrammes de Hasse

Exemples

Quelques exemples d'ensembles ordonnés :

Exemple 1 : $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$. Ces ordres sont totaux.

Exemples

Exemple 2 : Pour un ensemble X quelconque, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ avec $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$. Cet ordre n'est pas total dès que X possède au moins 2 éléments.

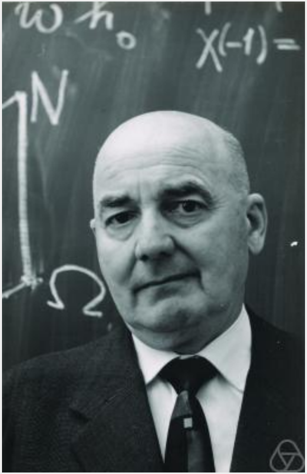
Exemples

Exemple 3 : $(\mathbb{N}, |)$ avec $|$ la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$. Cet ordre n'est pas total.

Diagrammes

En exploitant les propriétés de la relation d'ordre $\leq$, il est possible de représenter les ensembles ordonnés finis $(X, \leq)$ au moyen de diagrammes, appelés **diagrammes de Hasse**.

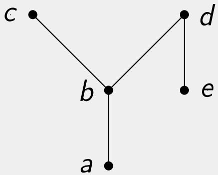
Diagrammes



Helmut Hasse, 1898 - 1979, théoricien des nombres allemand.

Diagrammes

Exemple 4 :



La relation d'ordre associée est $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (e, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$.

Diagrammes

Le diagramme de Hasse de $(X, \leq)$ est construit ainsi :

1. Chaque $x \in X$ est représenté par un point p_x,
2. Si $x < y$ alors p_x est situé "plus bas" que p_y,
3. p_x et p_y sont reliés par un segment de droite si et seulement si $x < y$ et il n'existe aucun z tel que $x < z < y$.

Diagrammes

Avec ces conventions, $x < y$ dans $(X, \leq)$ si et seulement si il existe un chemin ascendant de x à y dans son diagramme de Hasse.

Diagrammes

Exemple 5 :

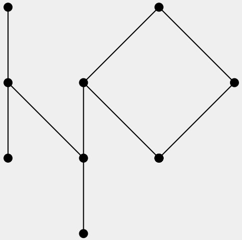


Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné à 9 éléments.

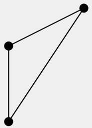
Diagrammes

Exemple 6 :

Un ensemble fini est totalement ordonné si et seulement si son diagramme est linéaire. Les ensembles totalement ordonnés sont aussi appelés des **chaînes**.

Diagrammes

Question non résolue : Caractériser les graphes apparaissant comme diagramme de Hasse d'ensembles ordonnés finis. Par exemple, un triangle ne peut être un diagramme de Hasse :



Ordres

Problème non résolu : Calculer le nombre total o_n de relations d'ordre sur un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments. Bien sûr :

$$n! \leq o_n \leq 2^{n^2}$$

Ensembles ordonnés

Troisième partie

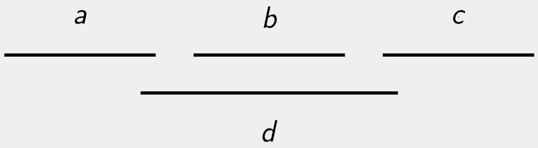
Ordres d'intervalles - Semi-ordres

Ordres d'intervalles

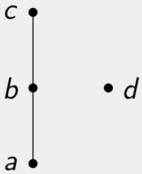
Les **ensembles ordonnés d'intervalles** constituent une classe importante d'ensembles ordonnés (notamment pour les applications).

Ordres d'intervalles

Intervalles de la droite réelle :



Ordre d'intervalles associé :



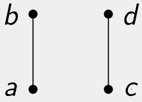
Ordres d'intervalles

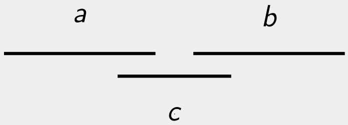
Un ensemble ordonné fini $(X, \leq)$ est dit **d'intervalles** s'il existe une application assignant à chaque élément $x \in X$ un intervalle $[a_x, b_x]$ de la droite réelle tel que

$$x < y \text{ ssi } b_x < a_y.$$

Ordres d'intervalles

Exemple : L'ensemble ordonné $\underline{2} + \underline{2}$ n'est pas d'intervalles :





Et pour d ?

Ordres d'intervalles

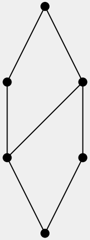
On peut démontrer :

Theorem (Fishburn, 1970)

Un ensemble ordonné fini $(X, \leq)$ est d'intervalles si et seulement si il ne contient pas $\underline{2} + \underline{2}$ comme sous-ensemble ordonné.

Ordres d'intervalles

Exemple : Voici un ensemble ordonné d'intervalles :

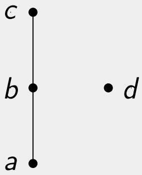


Semi-ordres

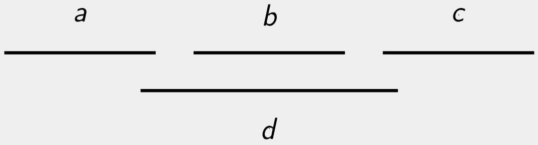
Si un ensemble ordonné d'intervalles $(X, \leq)$ peut-être représenté de telle sorte que chaque intervalle possède la même longueur, alors $(X, \leq)$ est dit **semi-ordonné**.

Semi-ordres

L'ensemble ordonné $\underline{3} + \underline{1}$ n'est pas semi-ordonné :



En effet :



Semi-ordres

De même que pour les ordres d'intervalles, on peut montrer que :

Theorem (Luce, Scott-Supes)

Un ensemble ordonné fini $(X, \leq)$ *est semi-ordonné si et seulement si il ne contient ni* $\underline{2} + \underline{2}$ *ni* $\underline{3} + \underline{1}$ *comme sous-ensemble ordonné.*

Semi-ordres

Origine de la terminologie "semi-ordre" ?

Semi-ordres

Dans certains domaines d'application (aide à la décision, psychologie, ...), la situation suivante se présente :

Un choix doit être fait parmi un ensemble de possibilités, soit A. Pour ce faire, une valeur numérique $f(a) \in \mathbb{R}$ est associée à chaque $a \in A$ et on convient que a est meilleure que b si et seulement si $f(a) > f(b)$.

Semi-ordres

Problème : Les valeurs $f(a)$ sont des mesures expérimentales, donc imprécises. Si $f(a) > f(b)$ mais que $f(a) - f(b) \leq t$ (pour un certain $t \in \mathbb{R}$ bien choisi), on aimerait pouvoir considérer que les choix sont équivalents.

Semi-ordres

Solution : On dira que le choix a est préférable au choix b si et seulement si $f(a) > f(b) + t$. A chaque choix a est associé l'intervalle $I_a = [f(a), f(a) + t]$.

Semi-ordres

Ainsi, a est préféré à b si et seulement si :

Historiquement, les semi-ordres sont apparus comme ceci, notamment sous l'influence de psychologues (Fechner 1860, Luce 1956).

Semi-ordres

Quelques personnalités de l'ULB ayant travaillé sur les semi-ordres :

1. Jean-Paul Doignon (Département de mathématiques),
2. Samuel Fiorini (Département de mathématiques),
3. Marc Pirlot (UMons),
4. Philippe Vincke (Ecole polytechnique).

Ensembles ordonnés

Quatrième partie

Espaces de connaissance

Espaces de connaissance

Théorie des espaces de connaissance : Créée par Jean-Paul Doignon (ULB) et Jean-Claude Falmagne (University of California, ULB) dans les années 1980.

Leur but : Mettre au point une théorie mathématique permettant d'évaluer au mieux les connaissances d'un étudiant suivant un certain cursus.

Espaces de connaissance

Principe de la théorie :

On dispose d'un ensemble X de questions portant sur la matière du cours. Les étudiants sont susceptibles de savoir y répondre ou non. L'ensemble $Q \subseteq X$ des questions auxquelles un étudiant peut répondre représente son **état de connaissance**. Par exemple, l'étudiant ne connaît rien si $Q = \varnothing$. Il connaît tout le cours lorsque $Q = X$.

Espaces de connaissance

L'idée est que les états de connaissance ainsi définis représentent mieux les connaissances des étudiants que des notes obtenues lors d'examens.

Espaces de connaissance

L'ensemble des états de connaissance possibles qu'un étudiant peut atteindre constitue un sous-ensemble $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Le couple $(X, \mathcal{K})$ est appelé **structure de connaissance**.

Espaces de connaissance

A une structure de connaissance $(X, \mathcal{K})$ est associé l'ensemble ordonné $(\mathcal{K}, \subseteq)$.

$$\Rightarrow$$

Les résultats de la théorie des ensembles ordonnés sont utiles dans le cadre de l'étude des structures de connaissance.

Un théorème de Birkhoff

Une relation R sur un ensemble X est un **préordre** si R est réflexive et transitive (mais pas forcément antisymétrique). Les relations d'ordre sont les préordres antisymétriques.

Un théorème de Birkhoff

Une famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de sous-ensembles de X est appelée $\cap$-stable et $\cup$-stable lorsque :

Pour toute sous-famille $\{F_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$ il vient :

$$\bigcap_i F_i \in \mathcal{F}$$

ainsi que

$$\bigcup_i F_i \in \mathcal{F}.$$

Un théorème de Birkhoff

Voici un célèbre théorème :

Theorem (Birkhoff, 1937)

L'ensemble des préordres définis sur X est en bijection avec l'ensemble des familles $\cap$-stable et $\cup$-stable sur X.

Un théorème de Birkhoff

Moralité : Travailler avec une famille $\cap$-stable et $\cup$-stable sur X ou un préordre sur X est équivalent.

Un théorème de Birkhoff

Conclusion : Lorsque l'ensemble $\mathcal{K}$ des états de connaissance sur X est $\cap$-stable et $\cup$-stable, travailler avec $\mathcal{K}$ revient à travailler avec un préordre sur X.

Citations

"It seemed to us that in many scientific areas, from chemistry to biology and especially the behavioral sciences, theories must often be built on a very different footing than that of classical physics (...)"

Jean-Paul Doignon, Jean-Claude Falmagne, Préface de l'ouvrage *"Learning Spaces"*, Springer, 2010.

Citations

"I often say that when you can measure what you are speaking about and express it in numbers you know something about it ; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind (...)"

Lord Kelvin, 1889.

Citations

Finalement, les ensembles ordonnés, cela sert à quoi ?

Citations

Réponse numéro 1 : *"La question de savoir 'à quoi cela sert' est omniprésente, mais n'est pas la bonne."*

Pierre Wolper, professeur à l'Université de Liège.

Réponse numéro 2 : *"C'est réellement utile, puisque c'est joli."*

Antoine de Saint-Exupéry, *"Le Petit Prince"*.

Pour aller plus loin ...

Pour terminer, signalons que de nombreux ouvrages approfondissant les concepts abordés durant cette introduction existent.

Pour aller plus loin ...

Merci pour votre attention !