La croissance économique selon Solow et Ramsey

Benjamin Rausch

Université libre de Bruxelles
SBS-EM - ECARES

BSSM 2013

Plan

Introduction

Mesure de la croissance économique

L'indicateur économique le plus utilisé pour mesurer la croissance économique est le PIB (GDP).

PIB?

Produit Intérieur Brut = Valeur totale de l'ensemble des biens et services finaux produits sur le territoire pendant une période déterminée.

$$\boxed{\text{Croissance du PIB} = \frac{PIB_t - PIB_{t-1}}{PIB_{t-1}}}$$

Plan

Taux exogène

Exemple: 3% par an

2% ou 3%, la différence est-elle significative?

Pour doubler son PIB, un pays aura besoin de 35 ans s'il bénéficie d'une croissance de 2% par an tandis qu'un pays qui bénéficie d'une croissance de 3% par ne nécessitera que de 23 ans et 6 mois.

$$\boxed{n = \frac{ln(2)}{ln(1+x)}}$$

$n =$ le temps nécessaire pour doubler
$x =$ le taux de croissance

Plan

Robert Merton Solow

Economiste keynésien dont la principale contribution est la théorie de la croissance portant son nom (ainsi que celui de Swan qui développa un modèle similaire au même moment)

Né en 1924
Ph.D. en 1950
Médaille John Bates Clark en 1961
Prix Nobel en 1987
National Medal of Science en 1999

"You can see the computer age everywhere but in the productivity statistics." (Paradoxe de Solow)

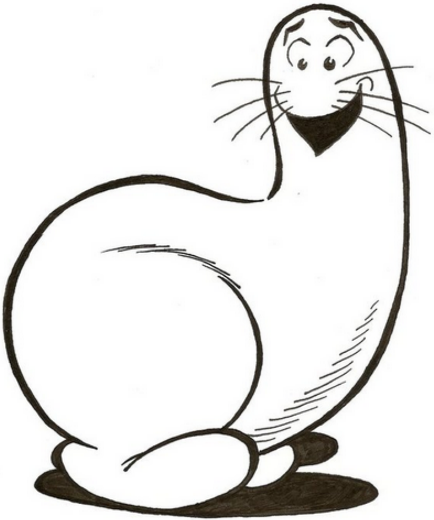
Modèle de Solow

Robinson Crusoé dans une économie Shmoo tel est le point de départ du modèle de Solow.

Robinson car nous allons nous intéresser à un seul agent (ménage) représentatif en économie fermée sans Etat.

Shmoo car nous allons considérer un bien homogène qui peut soit être consommé soit servir d'investissement (input) (un peu comme dans une ferme, le blé récolté peut servir soit à la consommation soit à la production de nouveaux épis).

Modèle de Solow



Modèle de Solow

L'agent répartit son revenu (Y_t) entre sa consommation (C_t) et son épargne (S_t)

$$Y_t = C_t + S_t$$

L'agent épargne une fraction constante de son revenu à chaque période.

$$S_t = sY_t$$

De plus, dans une économie fermée, la production est répartie entre consommation et investissement.

$$Y_t = C_t + I_t$$

Et donc par conséquent, l'investissement est égal à l'épargne.

$$S_t = I_t$$

Modèle de Solow : Fonction de production

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t)$$

$Y_t \rightarrow$ production
$K_t \rightarrow$ stock de capital
$A_t \rightarrow$ progrès technique
$L_t \rightarrow$ travail
$F(.) \rightarrow$ fonction de production

N.B. Pour cet exposé, je prends comme exemple un progrès technique neutre au sens de Harrod (affectant le facteur travail) dans l'optique de rester conforme aux fait stylisés et de pouvoir déterminer un équilibre (*steady state*) mais il en existe 2 autres types: le progrès technique neutre au sens de Solow (qui affecte le facteur capital) et le progrès technique neutre au sens de Hicks (qui affecte les 2 facteurs de production simultanément).

Modèle de Solow : : Fonction de production

Fonction de production néoclassique

- Rendements d'échelle constants
- Productivités marginales des facteurs de production positives et décroissantes

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \text{ and } \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \ \forall K > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0 \text{ and } \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \ \forall L > 0$$

- Conditions d'Inada

$$\lim_{K \to 0} F'_K = \lim_{L \to 0} F'_L = \infty$$

$$\lim_{K \to \infty} F'_K = \lim_{L \to \infty} F'_L = 0$$

- Condition d'essentialité

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

Modèle de Solow

Idée : Chaque période, les agents vont consommer une fraction constante de leur revenu et investiront la partie restante. Les investissements permettront de compenser la dépréciation du capital par travailleur et d'augmenter la quantité de ce dernier. La population et le progrès technique croissent à un taux constant (et exogène).

Equations du modèle

$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$ (Loi d'évolution du capital)

$Y_t = F(K_t, A_tL_t)$ (Fonction de production néoclassique)

$L_{t+1} = (1+n)L_t$ (Croissance de la population (au taux n))

$A_{t+1} = (1+g)A_t$ (Croissance du progrès technique (au taux g))

Modèle de Solow

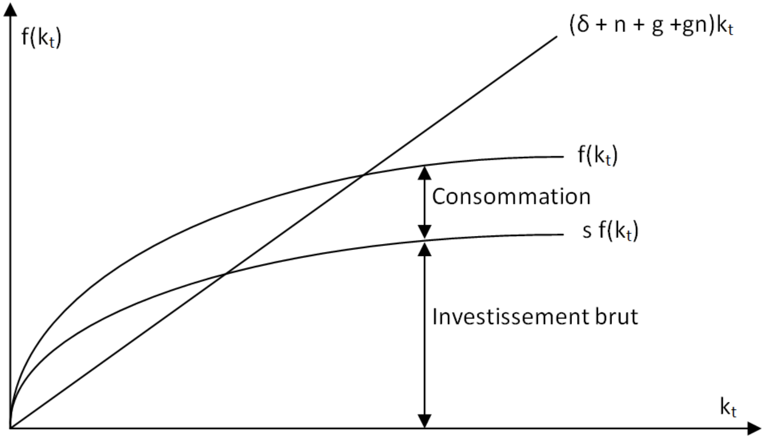
Exprimons la loi d'évolution du capital en travailleur effectif $(/A_t L_t)$

$$(1+g)(1+n)k_{t+1} = sf(k_t) + k_t - \delta k_t$$

A l'équilibre (état stationnaire), $k_{t+1} = k_t = k^*$ et donc nous pouvons en déduire que:

$$sf(k^*) = (\delta + g + n + gn)k^*$$

Modèle de Solow: Graphique



Modèle de Solow

A l'équilibre, la croissance (des variables par travailleur effectif) est nulle.

Conséquences:

- Convergence (conditionnelle)
- Rattrapage

Modèle de Solow: Règle d'or

Nous savons que:

$$c_t = f(k_t) - sf(k_t)$$

Or, en utilisant, le résultat d'équilibre:

$$sf(k_t) = (\delta + n + g + gn)k_t$$

et donc nous obtenons:

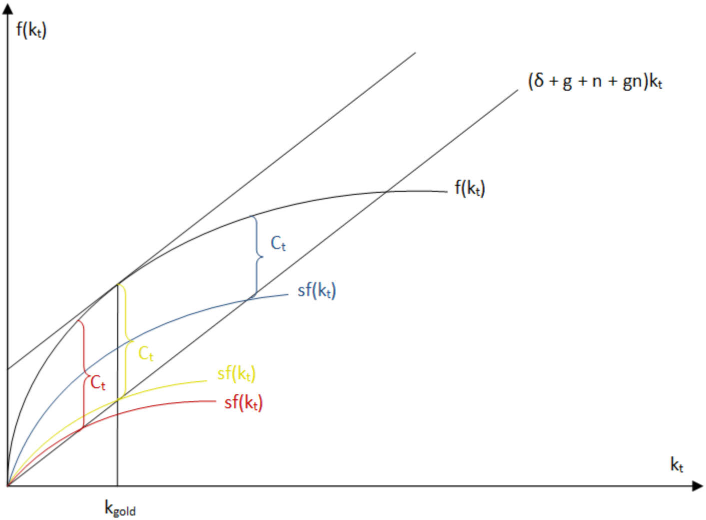
$$c_t = f(k_t) - (\delta + n + g + gn)k_t$$

Si nous prenons la dérivée de c_t par rapport à k_t nous trouvons:

$$f'(k_t) = (\delta + n + g + gn)$$

La règle d'or qui permet de déterminer le taux d'épargne qui maximisera la consommation à l'équilibre.

Modèle de Solow : Règle d'or et inefficience dynamique



Modèle de Solow : Exemple

Utilisons une fonction de production dite Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{(1-\alpha)}$$

Exprimée en travailleur effectif, elle devient:

$$y_t = k_t^{\alpha}$$

$$k^* = [\frac{s}{g+n+\delta+gn}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

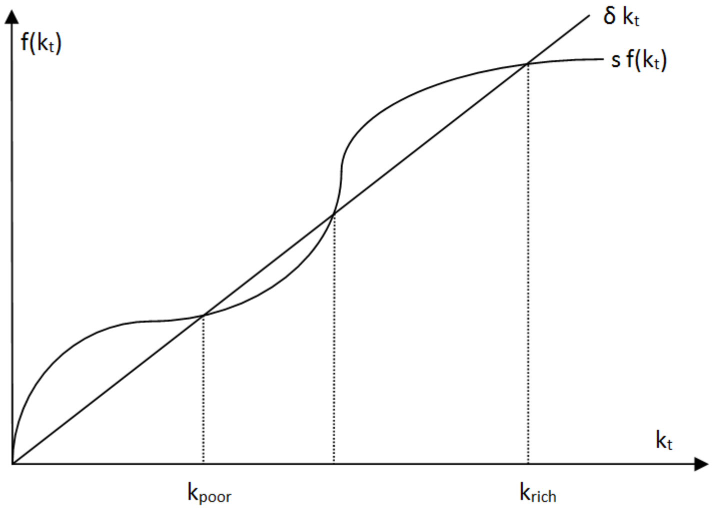
La règle d'or nous dit que:

$$k^{gr} = (\frac{\alpha}{n+\delta+g+ng})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

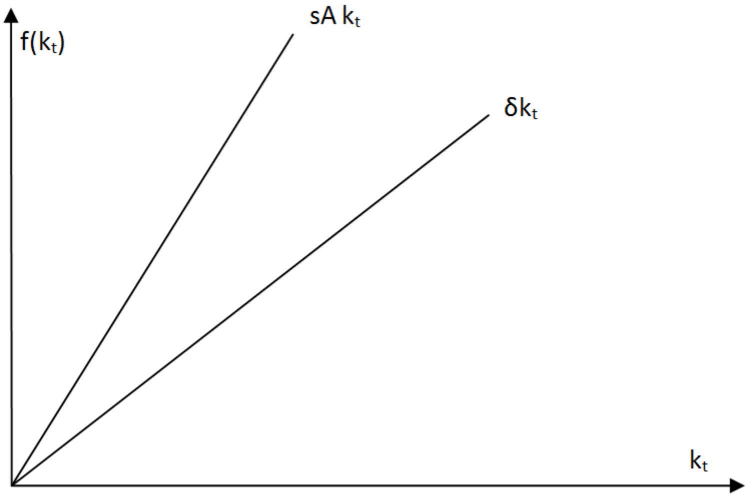
donc par conséquent le taux d'épargne qui maximise la consommation à l'équilibre est donné par:

$$s = \alpha$$

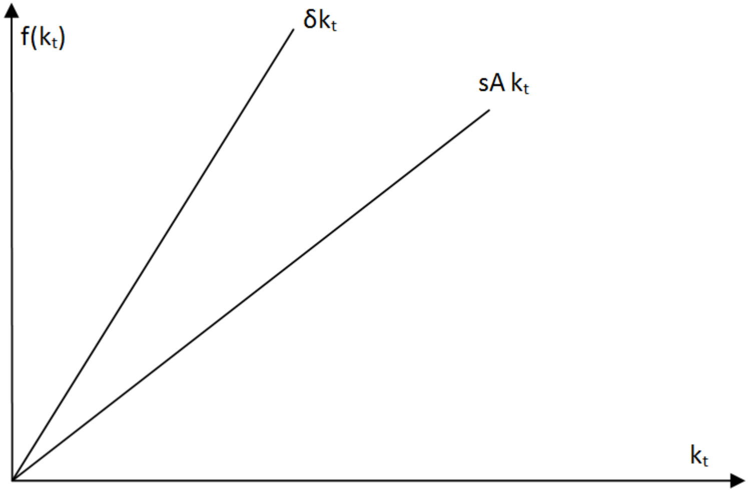
Modèle de Solow: Trappe à pauvreté



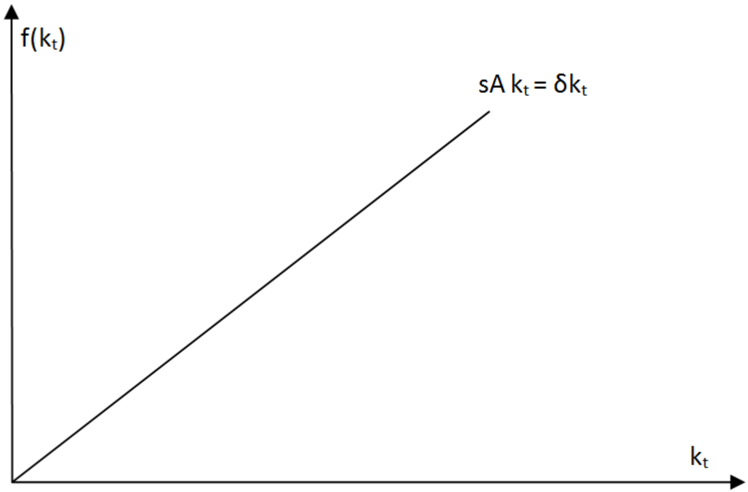
Modèle de Solow: Modèle Ak



Modèle de Solow: Modèle Ak



Modèle de Solow: Modèle Ak



Plan

Frank Plumpton Ramsey

Mathématicien, économiste et philosophe bénéficiant entre autres du soutien de Keynes

Né en 1903 et mort en 1930
Théorie de la croissance
Taxation optimale
Théorie de Ramsey en math
Philosophie: Redundancy theory of truth

"Science, history and politics are not suited for discussion except by experts. Others are simply in the position of requiring more information; and, till they have acquired all available information, cannot do anything but accept on authority the opinions of those better qualified."

Modèle de Ramsey

Avec Solow, le taux d'épargne est exogène, Ramsey va l'endogénéiser via la maximisation de l'utilité de l'individu. Pour ce faire, nous allons nous reposer sur une fonction d'utilité "nicely defined" (pourquoi faire compliqué quand on peut faire simple)

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t} ln c_t \, \mathrm{d}t$$

sous les contraintes que $\dot{k}_t = f(k_t) - (n+\delta)k_t - c_t$ (Loi d'évolution du capital) et que $k_t \geq 0$, $c_t \geq 0$ et que k_0 est donné.

Centralisé vs Décentralisé

Dans le slide précédent, nous considérions une économie centralisée mais nous aboutirions au même résultat en considérant une économie décentralisée.

$$\dot{A}_t = w_t L_t + r_t A_t - C_t$$

A_t représente les actifs (*assets*)
w_t représente le taux de salaire (*wage rate*)
r_t représente le taux d'intérêt réel (*real interest rate*)

A nouveau, nous pouvons exprimer cette expression en termes de paramètres par travailleur (en divisant le tout par L_t)

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - n a_t - c_t$$

Centralisé vs Décentralisé

Les entreprises sont en concurrence pure et parfaite (profit nul)

$$\Pi_t = f(k_t) - r_t k_t - w_t - \delta k_t$$

Par conséquent les prix des facteurs de production sont donnés par:

- $r_t = f'(k_t) - \delta$
- $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$

A l'équilibre:

$a_t = k_t$ (*Market clearing condition*)

Par substitution, nous obtenons:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t - c_t$$

Même résultat qu'avec une économie centralisée

Modèle de Ramsey

Retour au modèle de Ramsey:

$$max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} ln c_t \, \mathrm{d}t$$

sous les contraintes que $\dot{k}_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t - c_t$ (Loi d'évolution du capital) et que $k_t \geq 0$, $c_t \geq 0$ et que k_0 est donné.

Recette de cuisine pour un Hamiltonien réussi

- Ajouter la loi d'évolution du capital pondérée par un multiplicateur de Lagrange à la fonction d'utilité.

$$H = v(k, c, t) + \lambda(t) g(k, c, t)$$

- Dériver l'Hamiltonien par rapport à la variable de contrôle et l'égaler à 0.

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{\partial v}{\partial c} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial c}$$

- Dériver l'Hamiltonien par rapport à la variable d'état et l'égaler à l'opposée de la dérivée du multiplicateur de Lagrange par rapport au temps.

$$\frac{\partial H}{\partial k} \equiv \frac{\partial v}{\partial k} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial k} = -\dot{\lambda}(t)$$

- Condition de transversalité : $lim_{t \to \infty} \lambda(t) k(t) = 0$

Recette de cuisine pour ~~paresseux~~ un Hamiltonien en valeur actuelle réussi

- Si $v[k(t), c(t), t] = e^{-\rho t} u[c(t), k(t)]$ alors nous pouvons simplifier la procédure.
- Transformer l'Hamiltonien H en Hamiltonien en valeur actuelle H^c.
  $H^c \equiv e^{\rho t} H \equiv u(k, c) + \Lambda(t) g(k, c, t)$ avec $\Lambda(t) = \lambda(t) e^{\rho t}$
- Réécrire les conditions précédentes:

$$\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial H^c}{\partial k} = \rho \Lambda - \dot{\Lambda}$$

$$lim_{t \to \infty} \Lambda(t) e^{-\rho t} k(t) = 0$$

Résolution de notre exemple

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t} lnc_t \,\mathrm{d}t$$

sous les contraintes que $\dot{k}_t = f(k_t) - (n+\delta)k_t - c_t$ (Loi d'évolution du capital) et que $k_t \geq 0$, $c_t \geq 0$ et que k_0 est donné.

1. $H^c = lnc_t + \Lambda_t[f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t]$ (Hamiltonien en valeur actuelle)
2. $\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c_t} = \Lambda_t$
3. $\frac{\partial H^c}{\partial k} = \rho\Lambda - \dot{\Lambda} \Leftrightarrow \dot{\Lambda} - \rho\Lambda = -\Lambda_t[f'(k_t) - (n+\delta)]$
4. $lim_{t\to\infty}\Lambda(t)e^{-\rho t}k(t) = 0$
5. $\dot{k}_t = f(k_t) - (n+\delta)k_t - c_t$

Résolution de notre exemple

Utilisant les points 2 et 3 du slide précédent, nous pouvons dériver:

$$\frac{\dot{\Lambda}_t}{\Lambda_t} = -[f'(k_t) - (n + \delta + \rho)](/\Lambda_t)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = +1[f'(k_t) - (n + \delta + \rho)](\text{Equation d'Euler})$$

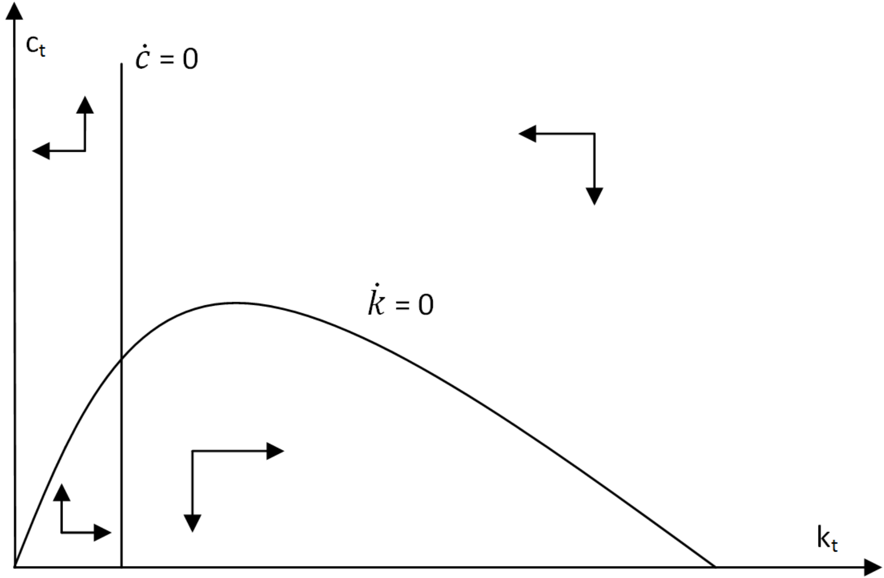
N.B. : Dans ce cas, l'élasticité de substitution intertemporel est unitaire: L'effet de revenu compense parfaitement l'effet de substitution, ceci provient de la fonction logarithmique

Résolution de notre exemple

Equations déterminant le système

- $\frac{\dot{c}}{c} = +1[f'(k_t) - (n + \delta + \rho)]$
- $\dot{k}_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t - c_t$
- $lim_{t \to \infty} \Lambda(t) e^{-\rho t} k(t) = 0$
- k_0 est donné

Graphique



Graphique: 1ère courbe: Construction et dynamique

$$\frac{\dot{c}}{c} = +1[f'(k_t) - (n + \delta + \rho)]$$

A l'équilibre, $\frac{\dot{c}}{c} = 0$, par conséquent $f'(k_t) = (n + \delta + \rho)$. Sur le diagramme de phase, cela se traduit par une droite verticale ayant pour abscisse le stock de capital d'équilibre.

Position:

Pour déterminer sa position, nous allons tout d'abord calculer le stock de capital qui maximise la consommation (règle d'or). Pour ce faire, il suffit de prendre la condition de première ordre:

$$\frac{\partial c_t}{\partial k_t} = 0 \Leftrightarrow f'(k_t) = (n + \delta)$$

Par conséquent, à l'équilibre, le stock de capital est plus petit que celui de la règle d'or.

Graphique: 1ère courbe: Construction et dynamique

Dynamique:

Si $f'(k_t) < (n + \delta + \rho)$ alors $\dot{c} < 0$, la consommation diminue. Or, dans ce cas de figure, $f'(k_t) < f'(k_t^*)$ et donc tous les points à droite de la droite (il n'y aura jamais la gauche de la gauche ☺) induisent une diminution de la consommation.

A l'inverse, si $f'(k_t) > (n + \delta + \rho)$ alors $\dot{c} > 0$, la consommation augmente. Or, dans ce cas de figure, $f'(k_t) > f'(k_t^*)$ et donc tous les points à gauche de la droite induisent une augmentation de la consommation.

Graphique: 2ème courbe: Construction et dynamique

$$\dot{k} = f(k_t) - (n+\delta)k_t - c_t = 0$$

Construction:

Cloche (du fait de la dépréciation) qui part de l'origine (équilibre trivial).

Dynamique:

Au-dessus de la courbe, c_t est + grand (toutes autres choses étant égales par ailleurs) et donc $\dot{k} < 0$ et donc les forces du système nous poussent vers la gauche et inversement.

Stabilité

Le système est-il stable?

La réponse est oui, il présente un chemin de selle.

En effet, il existe un et un seul chemin qui permet d'atteindre l'équilibre. Tout point ne faisant pas partie de ce chemin est divergent, ce qui signifie qu'en t_0, l'agent doit déterminer sa consommation de manière à se trouver sur ce chemin et il se doit de réoptimiser à chaque choc qui le modifierait.

Stabilité: Preuve via les valeurs propres

Pour vérifier la stabilité du système, il suffit de contrôler ses valeurs propres.

- Si les 2 valeurs propres sont négatives alors le système est stable.
- Si les 2 valeurs propres sont positives alors le système est instable.
- Si les 2 valeurs propres sont de signes différents alors le système présente un point de selle.

Et les complexes? Et les valeurs propres nulles? Même principe: Il suffit de regarder la partie réelle des valeurs propres non nulles. Seule la forme du chemin de convergence va être affectée.

Exemple

Fonction de production Cobb-Douglas: $f(k_t) = Ak_t^{\alpha}$
Pas de dépréciation ni de croissance de la population: $n = \delta = 0$

$$\frac{\dot{c}}{c} = +1[\alpha A k_t^{\alpha-1} - \rho]$$

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha} - c_t$$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = Ak_t^{\alpha-1} - \frac{c_t}{k_t}$$

Par conséquent les valeurs d'équilibre sont données par:

$$k^* = (\frac{\rho}{\alpha A})^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$c^* = A(\frac{\rho}{\alpha A})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Exemple

Pour contrôler la stabilité, il nous faut d'abord log linéariser le système:
Soit

$$\tilde{X} = lnX \Leftrightarrow e^{\tilde{X}} = X$$

et donc

$$\dot{\tilde{X}} = \frac{\dot{X}}{X}$$

Le système peut dès lors être réécrit comme tel:

$$\dot{\tilde{c}} = \alpha A e^{\tilde{k}(\alpha-1)} - \rho$$

$$\dot{\tilde{k}} = A e^{\tilde{k}(\alpha-1)} - e^{\tilde{c}_t - \tilde{k}_t}$$

Exemple

Approximation de Taylor autour de l'équilibre

$$\dot{\tilde{c}} = 0 + \alpha(\alpha - 1)Ae^{\tilde{k}_t^*(\alpha-1)}(\tilde{k}_t - \tilde{k}_t^*)$$

$$\dot{\tilde{c}} = \rho(\alpha - 1)(\tilde{k}_t - \tilde{k}_t^*)$$

$$\dot{\tilde{k}} = 0 + (Ae^{\tilde{k}_t^*(\alpha-1)}(\alpha - 1) + e^{\tilde{c}_t^* - \tilde{k}_t^*})(\tilde{k}_t - \tilde{k}_t^*) + (-e^{\tilde{c}_t^* - \tilde{k}_t^*})(\tilde{c}_t - \tilde{c}_t^*)$$

Hint: $e^{\tilde{c}_t^* - \tilde{k}_t^*} = \frac{c^*}{k^*} = \frac{\rho}{\alpha}$

$$\dot{\tilde{k}} = \rho(\tilde{k}_t - \tilde{k}_t^*) - \frac{\rho}{\alpha}(\tilde{c}_t - \tilde{c}_t^*)$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}} \\ \dot{\tilde{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho(\alpha - 1) \\ -\frac{\rho}{\alpha} & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_t - \tilde{c}_t^* \\ \tilde{k}_t - \tilde{k}_t^* \end{pmatrix}$$

Déterminant $= \frac{\rho^2(\alpha-1)}{\alpha} < 0$

Par conséquent les valeurs propres sont de signes différents et donc le système présente un chemin de selle.

Plan

Conclusion

Les modèles de Solow et Ramsey présentent, comme nous l'avons vu, de fortes similarités (Croissance nulle, convergence . . .).

La différence principale réside dans l'endogénéité de la propension à consommer dans le modèle de Ramsey.

Les modèles de Solow et Ramsey constituent la base de la théorie de la croissance. Depuis, de nombreux auteurs ont raffiné ces modèles sur bien des plans ...

Conclusion

- Interventions gouvernementales
- Capital humain
- Coûts d'ajustement
- Monnaie dans la fonction d'utilité (Bulles)
- Learning by doing
- Economie des idées
- ...

Référence

Robert Barro and Xavier Sala-i-Martin, *Economic Growth*, MIT Press, 2nd ed., 2004

THANK YOU