

Théorie des jeux : représentations et types de jeux

Yves Dominicy*
yves.dominicy@ulb.ac.be

Résumé

Ce texte constitue une introduction à la théorie des jeux, en présentant les notions de base de cette discipline mathématique. Les différents concepts introduits dans cet article sont illustrés par des exemples pour une meilleure compréhension. D'un point de vue plus mathématique, le théorème du mini-max est énoncé et démontré.

Sommaire

1	Représentations de jeux	110
2	Types de jeux	114
3	Bibliographie	121

*Yves Dominicy est doctorant et boursier FRIA à la Solvay Brussels School of Economics and Management de l'Université libre de Bruxelles et à ECARES. Il est titulaire d'un Master en Statistiques de l'Université libre de Bruxelles et travaille en économétrie.

La théorie des jeux constitue une approche mathématique aux problèmes de stratégie. Elle fait partie de la branche des mathématiques appliquées et est souvent utilisée dans les sciences dites sociales et notamment en économie, mais également en biologie, sciences politiques, relations internationales, ingénierie, informatique, etc. La théorie des jeux moderne débute en 1944 avec la publication du livre *Theory of Games and Economic Behavior* d'Oskar Morgenstern et de John von Neumann.

La théorie des jeux essaie d'approcher d'une manière mathématique et logique le comportement stratégique d'un joueur dans des situations où le succès individuel dépend de ses propres choix et des choix de ses adversaires. Elle analyse les réactions d'individus face à des états d'opposition et cherche à mettre en évidence des stratégies optimales.

Dans les applications usuelles de la théorie des jeux on essaie de trouver les équilibres des jeux, c'est-à-dire les états de jeux où chaque joueur a choisi une stratégie qui implique que les protagonistes ne vont pas changer de position. L'équilibre le plus connu est celui de John Forbes Nash (1950, 1951), appelé *l'équilibre de Nash*. Dans le présent chapitre nous allons nous concentrer sur la mise en place de la théorie des jeux, plus précisément nous allons nous intéresser aux différentes représentations et aux différents types de jeux.

1 Représentations de jeux

Les jeux étudiés dans la théorie des jeux sont des objets mathématiques bien définis. Un jeu consiste en un ensemble de joueurs, un ensemble de décisions disponibles pour chaque joueur et une spécification de gains pour chaque combinaison de stratégies possibles. Les deux types de représentation, normale et extensive, que nous allons voir plus en détails sont utilisés pour des jeux non-coopératifs.

1.1 Forme normale

Un jeu est dit sous *forme normale*, ou *stratégique*, si l'ensemble des joueurs $N = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble des stratégies pour chaque joueur et tous les gains correspondant à chacune des combinaisons possibles sont donnés. Si le jeu ne comporte que deux joueurs et un nombre fini et raisonnable de stratégies possibles, alors on peut représenter le jeu sous forme d'un tableau appelé matrice des gains. Une extension de cette représentation à trois ou quatre joueurs est également possible, mais avec beaucoup de stratégies il devient difficile de s'y retrouver. Dans le cas de deux joueurs, nous adoptons la convention que le joueur 1 choisit la ligne et que le joueur 2 choisit la colonne de la matrice des gains. Un exemple d'un jeu qui peut être représenté sous la forme normale est le jeu appelé « la guerre des sexes ».

Exemple 1. Dans cet exemple de la guerre des sexes, Aurélie est la première joueuse et Charles, son amoureux, est le deuxième joueur. Chacun des deux participants a le choix entre « aller à un match de football » ou « aller à une représentation de ballet ». Ils doivent prendre leur décision simultanément. Évidemment Charles préfère aller au match de football et Aurélie au ballet. Or si les deux amoureux suivent chacun leur préférence, ils se retrouveront seuls et donc leur satisfaction sera nulle ; il en va de même si les deux choisissent chacun

l'événement préféré de leur partenaire. Choisir simultanément le match de football ou le ballet aura une satisfaction de 2 pour la personne qui voulait voir cet événement et une satisfaction de 1 pour l'autre personne, car celle-ci est contente d'y être avec la personne qu'elle aime. Voici la représentation normale de ce jeu :

	Foot _C	Ballet _C
Foot _A	(1,2)	(0,0)
Ballet _A	(0,0)	(2,1)

Pour cette matrice des gains, il n'existe pas vraiment de stratégie optimale. Comme Charles et Aurélie ne peuvent pas communiquer leur décision entre eux, ils devront croire en leur bonne étoile s'ils veulent être ensemble. Même si ces participants finissent ensemble, ce jeu est un peu déséquilibré, car un des deux joueurs aura toujours un gain supérieur à l'autre selon le choix de l'événement. La « guerre des sexes » est un jeu dont une résolution peut être donnée par la recherche d'équilibres, plus précisément d'équilibres de Nash pures et mixtes.

Un autre exemple bien connu est le « dilemme du prisonnier », dont le concept de coopération et de conflit du jeu a été introduit par Merrill Flood (1952) et Melvin Dresher (1961). Le nom lui-même est dû à Albert W. Tucker, en 1950, qui a interprété le jeu en inventant une histoire de prisonniers et qui a finalement donné au jeu le nom de dilemme du prisonnier. Ce jeu se représente également sous forme normale.

Exemple 2. Dans ce jeu, deux suspects sont arrêtés par des policiers, car soupçonnés d'être complices d'un délit. Les policiers n'ont cependant pas assez de preuves pour les faire inculper. Ainsi ils les retiennent dans des cellules séparées pour que les deux suspects ne puissent pas communiquer entre eux. La police les interroge séparément et propose à chacun le même marché qui est le suivant :

- Si un des deux prisonniers dénonce l'autre, il est remis en liberté alors que l'autre obtient la peine maximale de 6 ans.
- Si les deux se dénoncent mutuellement, ils seront condamnés à une peine de 3 ans chacun.
- Si les deux refusent de coopérer, la peine sera minimale, 1 an pour chacun des deux suspects, faute de preuves.

Cette offre possède comme représentation normale le tableau suivant :

	se taire	dénoncer
se taire	(1,1)	(6,0)
dénoncer	(0,6)	(3,3)

Chacun des suspects réfléchit alors à ce marché proposé par les policiers. Le premier prisonnier évalue les cas de figure possibles. Il réfléchit d'abord au cas où son complice le dénonce. Si lui se tait en même temps, on lui infligera la totalité de la peine, c'est-à-dire les 6 ans de prison. Mais s'il dénonce également l'autre, il ne se verra attribuée que la moitié de la peine. Puis, il considère le cas de figure (plus favorable pour lui) où son complice ne le dénonce pas. Si lui se tait également, alors il ne fera qu'une année de prison et s'il dénonce son partenaire, celui-ci sera contraint à 6 ans de prison et lui pourra sortir de la prison en tant qu'homme libre. Donc après mûre réflexion le premier suspect se dit qu'il a tout intérêt à dénoncer son complice. Mais l'autre inculqué est également rationnel et aboutit au même raisonnement. Finalement les deux suspects vont se dénoncer mutuellement, car cette décision est la plus empreinte de rationalité.

Cet exemple montre que si chacun suit son intérêt individuel, la décision finale n'est pas la plus optimale, car dans l'exemple du dilemme du prisonnier le meilleur choix pour les deux suspects aurait été la coopération, c'est-à-dire d'opter pour le silence.

Le dilemme du prisonnier est un exemple de jeu qui modélise bien par exemple les questions de politique tarifaire. Imaginons-nous un vendeur qui baisse ses prix pour conquérir des parts de marché et espère ainsi augmenter ses ventes et augmenter son bénéfice. Mais si son concurrent principal en fait de même, alors ils se neutralisent et peuvent chacun y perdre gros. Cet exemple est souvent utilisé pour montrer que la libre concurrence ne conduit pas forcément à une maximisation des bénéfices de tous les protagonistes.

Le dilemme du prisonnier peut aussi s'appliquer en écologie si nous nous posons la question suivante : est-ce que deux espèces vivant sur un même territoire doivent plutôt cohabiter en paix ou se disputer la nourriture disponible ?

En psychologie nous pouvons prendre l'exemple d'un couple en crise car chacun a trompé l'autre à son insu. Les deux voudraient pouvoir avouer leur écart et pouvoir se réconcilier. Cependant, chacun des deux a peur du mépris de son conjoint s'il est le seul du couple à avouer son faux-pas et donc finalement préfère la situation de conflit.

Tous ces exemples caractérisent des situations où deux joueurs auraient intérêt à coopérer mais où l'incitation à trahir l'autre est tellement forte que la coopération n'est jamais choisie par un joueur rationnel lorsque le jeu n'est joué qu'une fois. Des variantes existent comme le jeu de la poule-mouillée ou le jeu télévisé américain « Friend or Foe ».

Le jeu de la poule mouillée vient de la situation suivante : deux voitures se lancent l'une contre l'autre, et chaque conducteur a le choix entre dévier de sa trajectoire (et ainsi éviter la catastrophe), qui est la stratégie de coopération et garder le cap et risquer la collision, qui est la stratégie de trahison. Dans ce jeu le but consiste à se montrer fort et à essayer d'intimider l'adversaire, d'où l'appellation du jeu. Il diffère du dilemme du prisonnier dans le sens où, ici, il est plus avantageux de coopérer si l'autre vous trahit, pour éviter la collision.

Dans le jeu télévisé américain « Friend or Foe » (« Ami ou Ennemi » en français), il y a trois paires de joueurs. Lorsqu'une des paires est éliminée, ses membres doivent se partager la somme accumulée selon un schéma du dilemme du prisonnier. S'ils sont « amis » (coopération) ils partagent équitablement leurs gains, s'ils sont plutôt « ennemis » (trahison) ils repartent les mains vides. Si l'un coopère et l'autre trahit, le premier part sans rien et le second empoche la totalité des gains accumulés. Ce jeu est une application réelle du dilemme du prisonnier, comme chaque paire ne peut participer qu'une et une seule fois au jeu.

La représentation normale est utilisée pour les jeux où le choix doit se faire de manière simultanée ou du moins sans connaître le choix des autres. Si le joueur a des informations sur les choix pris par les autres joueurs, alors le jeu sera représenté par sa forme extensive.

1.2 Forme extensive

Dans la représentation d'un jeu sous forme extensive, les stratégies peuvent être représentées sous la forme d'un arbre, dont chaque noeud ou sommet est associé au joueur qui fait son choix. Chaque stratégie constitue une branche ou une arête de l'arbre. Les gains de tous sont associés aux terminaisons ou feuilles de l'arbre. En d'autres termes, la forme extensive d'un jeu est un arbre de décision décrivant

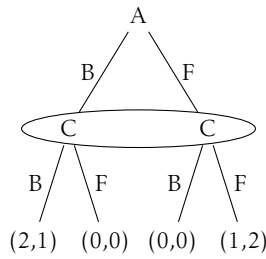


FIGURE 1 — Forme extensive du jeu la guerre des sexes avec un ensemble d’information autour de Charles.

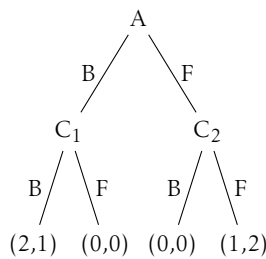


FIGURE 2 — Forme extensive du jeu la guerre des sexes sans ensemble d’information.

les choix possibles des joueurs à chaque niveau du jeu, la séquence de tours de jeu des joueurs, ainsi que l’information dont les joueurs disposent à chaque niveau pour formuler leur stratégie. Cette information est représentée sous forme d’ensembles d’information qui forment une partition des sommets de l’arbre, chaque classe de la partition contenant les sommets non distinguables pour le joueur à un niveau du jeu. Si les classes sont des singletons, i.e. formées chacune d’un seul sommet de l’arbre du jeu, alors le jeu est dit à information parfaite ce qui signifie que chaque joueur sait à tout instant où il se situe dans l’arbre. Dans le cas contraire, le jeu est dit à information imparfaite (voir section 2.3).

Pour représenter des décisions simultanées, voulant dire que les noeuds font partie du même ensemble d’information (le joueur ne sait pas où il se trouve), on utilise soit un trait pointillé entre les différents sommets soit on dessine un ensemble qui englobe les sommets faisant partie du même ensemble d’information.

Toute représentation sous forme normale peut être représentée sous forme extensive. Par exemple la matrice de gains du jeu la guerre des sexes de l’exemple 1 peut être représentée sous forme extensive : On voit que Charles est dans un ensemble d’information ; en effet, même si Aurélie a déjà fait son choix, Charles ne sait pas quelle décision elle a prise. On pourrait également représenter ce jeu d’une manière telle qu’il n’y a pas d’ensemble d’information autour de Charles et dire que Charles connaît le choix d’Aurélie. L’arbre se formule alors de la façon suivante : Si on veut le noter sous forme normale il faudra d’abord regarder les différentes stratégies de Charles qui ne sont maintenant plus au nombre de deux mais de quatre :

$$\begin{aligned}
 s_1 &: B_{C_1}(B_A), B_{C_2}(F_A) \\
 s_2 &: B_{C_1}(B_A), F_{C_2}(F_A) \\
 s_3 &: F_{C_1}(B_A), B_{C_2}(F_A) \\
 s_4 &: F_{C_1}(B_A), F_{C_2}(F_A)
 \end{aligned}$$

où pour la stratégie s_1 on a que $B_{C_1}(B_A)$ signifie que Charles en position 1 choisit le ballet sachant qu'Aurélié a choisi le ballet, et si Aurélié a choisi le match de football, Charles en position 2 choisira le ballet $B_{C_2}(F_A)$. Il en va de même pour les autres stratégies. La forme normale est représentée par la matrice de gains :

	s_1	s_2	s_3	s_4
Foot _A	(0,0)	(1,2)	(0,0)	(1,2)
Ballet _A	(2,1)	(2,1)	(0,0)	(0,0)

2 Types de jeux

Il existe plusieurs types de jeux, nous allons dans cette section nous concentrer sur les plus importants.

2.1 Jeux simultanés et séquentiels

Dans les jeux simultanés, les joueurs prennent leurs décisions sans connaître celles prises par les autres joueurs ou les joueurs prennent leurs décisions en même temps. Dans les jeux séquentiels, les joueurs jouent les uns après les autres, en disposant à chaque fois de l'information sur le coup adverse, en d'autres mots chaque protagoniste connaît l'historique du jeu et l'action de l'adversaire au moment de formuler son choix. Ces types de jeux sont également appelés jeu synchrone et asynchrone.

Un jeu simultané est représenté le plus souvent sous forme normale et un jeu séquentiel est représenté sous forme extensive.

Exemples.

- Le jeu d'échecs ou le jeu de go sont des jeux séquentiels, car les joueurs jouent l'un après l'autre.
- Le jeu de pierre, papier, ciseaux est un jeu simultané, car les joueurs doivent montrer leur main en même temps.
- Le dilemme du prisonnier ou encore la guerre des sexes sont des jeux simultanés, car les décisions sont prises sans connaître le choix de l'autre.

2.2 Jeux à somme nulle et non nulle

La catégorie des jeux à somme nulle englobe tous les jeux où la somme algébrique des gains des joueurs est nulle (voulant dire que la somme des gains totaux et des pertes totales donne 0). Ce que gagne l'un est nécessairement perdu par un autre, l'enjeu est la répartition du total fixé.

Exemples.

- Le jeu d'échecs ou le jeu de go, si l'on définit le gain d'une partie comme 1 si on gagne, 0 si la partie est nulle et -1 si on perd le jeu, sont des jeux à somme nulle.

- Le poker en fait aussi partie.
- En économie, on parle souvent de jeux à somme nulle si on fait référence à la destruction de produits ou l'absence de production.

Les jeux à somme nulle sont des jeux pour lesquels les stratégies des joueurs ne peuvent ni augmenter ni diminuer les ressources disponibles. Dans les jeux à somme nulle, toutes les stratégies sont Pareto-optimales. La notion d'optimum de Pareto est une situation dans laquelle on ne peut pas changer de stratégie pour améliorer un gain d'un joueur si ce changement défavorise l'un des autres joueurs. Ce qui est bien le cas des jeux à somme nulle, car la somme des gains est constante et donc si le gain augmente chez l'un des joueurs il décroît nécessairement chez l'autre joueur.

Les situations d'affaires, la vie politique, la guerre des sexes ou encore le dilemme du prisonnier sont des jeux à somme non nulle, car certaines issues sont globalement plus profitables pour tous ou plus dommageables pour tous.

On pourrait croire qu'il suffit pour ramener un jeu à somme non nulle à un jeu à somme nulle d'y ajouter un joueur simplet, une sorte de non-joueur qui compenserait les pertes nettes des joueurs. Or ce n'est pas le cas, car un joueur est censé défendre rationnellement ses intérêts dans la mesure de ses possibilités, cet ajout formel, introduisant une dissymétrie entre les vrais joueurs et le non-joueur complique l'analyse et celle-ci y perd plus qu'elle n'y gagne.

Exemple 3. Un exemple de jeu à somme nulle est donné par la matrice de gains :

	A	B	C
a	(40,-40)	(-10,10)	(25,-25)
b	(10,-10)	(25,-25)	(-25, 25)

Les deux joueurs décident simultanément de leur stratégie. Essayons de résoudre ce jeu à somme nulle. Notons par *joueur 1* ou *premier joueur* celui qui choisit la ligne, et par *joueur 2* ou *deuxième joueur* celui qui décide de la colonne. Donc le premier joueur a le choix entre les stratégies a et b. Il peut se dire que la stratégie b peut lui faire perdre 25 et au plus lui faire gagner 25. Par contre la stratégie a peut lui faire gagner 40 et au pire lui faire perdre 10. Ce type de réflexion est connu sous le nom de stratégie maxi-max (maximiser le gain possible sans considération pour les pertes possibles) ou de stratégie maxi-min (maximiser le pire résultat possible). Dans le présent contexte le joueur choisit la stratégie a.

De l'autre côté, l'adversaire touche les valeurs opposées et réfléchit de la même manière. Il verra que la réflexion maxi-min élimine la stratégie A, mais ne permet pas de trancher entre les options B et C où la perte vaut 25. La stratégie maxi-max classe les trois options par ordre croissant, c'est-à-dire d'abord l'option A, puis B et finalement C. Ceci conduira le joueur 2 à choisir l'option C. Tout cela implique que la combinaison a-C sera choisie par les deux joueurs, combinaison où le premier joueur gagne 25 et le deuxième joueur perd 25.

De l'autre côté le joueur 2 peut également essayer d'anticiper le choix du joueur 1. Et ainsi si le joueur 1 joue la stratégie maxi-min, lui-même aurait intérêt à choisir l'option B, ce qui lui permet de gagner 10. Rien n'empêche à son tour le premier joueur d'anticiper cette déviation et de préférer opter pour la stratégie b afin d'empocher 25. Dans ce cas le deuxième joueur devrait de nouveau choisir l'option C. Donc nous sommes revenus au point de départ.

On peut se poser la question suivante : comment résoudre finalement ce problème ? Une première réponse possible consiste à prendre les décisions au hasard, avec une probabilité égale pour toutes les stratégies possibles, sans se

préoccuper des gains ou des pertes. Mais cela ne semble pas être un optimum. Une seconde stratégie serait de tenter d'attribuer *a priori* une probabilité aux différents coups de l'adversaire et d'opter pour la meilleure réponse adaptée. Ainsi, si le joueur 2 attribue une probabilité 50/50 aux stratégies du joueur 1, il doit également jouer 50/50 pour ses coups B et C. Mais le premier joueur n'est pas un dé, donc lui aussi va essayer d'anticiper les coups du deuxième joueur. En réfléchissant, le joueur 1 voit bien qu'il serait absurde de supposer que le joueur 2 va jouer l'option A dans un tiers des cas. Donc là également il y a mieux à faire.

John von Neumann (1928) a réussi à résoudre ce problème à l'aide des probabilités. Selon lui chaque joueur va agir de manière probabiliste, i.e. chaque stratégie est choisie au hasard selon un processus aléatoire. Il est clair que l'adversaire ne pourra pas connaître la stratégie adverse si le joueur lui-même ne la connaît pas à l'avance. Cette solution est appelée le *théorème du minimax de von Neumann* : d'après ce théorème les joueurs vont jouer une stratégie mixte au lieu d'une stratégie pure.

Théorème du minimax

Le théorème du minimax fournit une méthode rationnelle de prise de décision dans la situation où s'affrontent deux joueurs lorsqu'on suppose qu'ils doivent formuler leur choix simultanément et que tout gain de l'un équivaut à la perte de l'autre. Ceci est rarement vérifié en réalité, mais un exemple où cette situation arrive sont les séquences de penalties au football. En effet, dans ce duel entre un tireur et un gardien de but, les deux joueurs doivent faire leurs décisions simultanément de façon aléatoire et imprévisible. Le théorème du minimax détermine les probabilités qu'il est bon de donner à chacune des stratégies possibles.

Théorème 4. *Pour k un entier strictement positif, notons δ_k l'ensemble des vecteurs colonnes comportant k coefficients réels positifs ou nuls dont la somme vaut 1. Soit A une matrice de dimension $m \times n$. On a alors l'identité suivante :*

$$\min_{y \in \delta_m} \max_{z \in \delta_n} y^t A z = \max_{z \in \delta_n} \min_{y \in \delta_m} y^t A z.$$

L'intuition derrière ce théorème nous dit que chaque joueur minimise le gain maximal possible pour l'adversaire, et comme ce théorème s'applique à des jeux à somme nulle, le joueur maximise en fait son propre gain minimal. Choisir la stratégie minimax, c'est choisir la solution la moins risquée en mesurant le risque de chaque joueur par la seule considération de l'hypothèse la plus défavorable.

Démonstration. Pour prouver le théorème du minimax, nous allons tout d'abord démontrer la proposition suivante qui est une conséquence du théorème de la séparation des convexes.

Proposition 5. *Pour toute matrice M de dimension $m \times n$*

1. *soit il existe un $y^* \in \delta_m$ tel que $y^{*t} M z \geq 0$, pour tout $z \in \delta_n$*
2. *soit il existe un $z^* \in \delta_n$ tel que $y^t M z^* \leq 0$, pour tout $y \in \delta_m$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord qu'il existe des vecteurs $z^* \in \delta_n$ et $\eta^* \in \mathbb{R}^n$ avec $\eta_j \geq 0$ tel que $M z^* + \eta^* = 0$. Alors pour tout $y \in \delta_m$,

$$y^t (M z^* + \eta^*) = 0 \Rightarrow y^t M z^* = -y^t \eta^* \leq 0,$$

ce qui montre que le deuxième point de la proposition est vérifié. Supposons maintenant que de tels vecteurs z^* et η^* n'existent pas. Dans ce cas, pour tout $z \in \delta_n$ et $\eta \in \mathbb{R}^n$ avec $\eta_i \geq 0$, on doit avoir

$$Mz + \eta \neq 0. \quad (1)$$

Dans ce cas nous disons que le vecteur 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe des colonnes de $[M \ I_n]$, où I_n est la matrice identité dans \mathbb{R}^n . Ceci doit être vrai, car sinon on pourrait trouver une combinaison convexe de valeur zéro

$$[M \ I_n][\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n \bar{\eta}_1 \dots \bar{\eta}_n]^t = 0, \quad (2)$$

avec $\bar{z}_j \geq 0$, $\bar{\eta}_j \geq 0$, $\sum_j \bar{z}_j + \sum_j \bar{\eta}_j = 1$, ce qui contredit (1) car ce serait équivalent à

$$M\bar{z} + \bar{\eta} = 0, \quad (3)$$

où

$$\bar{z} = \frac{1}{\sum_j \bar{z}_j} [\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n]^t \in \delta_n, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{\sum_j \bar{\eta}_j} [\bar{\eta}_1 \dots \bar{\eta}_n]^t.$$

Notons que $\sum_j \bar{z}_j \neq 0$ car sinon tous les \bar{z}_j devraient être égaux à zéro et de même pour les $\bar{\eta}_j$ à cause de (3), ce qui n'est pas possible dans une combinaison convexe. Maintenant que nous avons établi que zéro n'appartient pas à l'enveloppe convexe des colonnes de $[M \ I_n]$, on utilise le théorème de la séparation des convexes pour conclure qu'il existe un hyperplan H passant par zéro et tel que l'enveloppe convexe est l'un des demi-espaces définis par H. Dénotons par y^* la normale à l'hyperplan H : pour tout x dans l'enveloppe convexe des colonnes de $[M \ I_n]$, nous avons alors $y^*x > 0$. L'inégalité $>$ (au lieu de $<$) peut toujours être obtenue en choisissant une direction appropriée pour la normale. Pour cela nous concluons que pour tout $\bar{z}_j \geq 0$, $\bar{\eta}_j \geq 0$, $\sum_j \bar{z}_j + \sum_j \bar{\eta}_j = 1$,

$$y^*[M \ I_n][\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n \bar{\eta}_1 \dots \bar{\eta}_n]^t > 0.$$

En particulier, pour une combinaison convexe avec tous les $\bar{\eta}_j = 0$, nous obtenons

$$y_j^* M \bar{z} > 0, \quad \forall \bar{z} \in \delta_n. \quad (4)$$

D'un autre côté, pour des combinaisons convexes avec $\bar{\eta}_j = 1$ (et tous les autres coefficients égaux à zéro), nous concluons que

$$y_j^* > 0, \quad \forall j.$$

Dans le cas où $\sum_j y_j^* = 1$, l'hyperplan normal donne les y^* désirés pour le point 1 de la proposition. Autrement, nous devons tout simplement renormaliser pour obtenir $\sum_j y_j^* = 1$. Notons que la normalisation ne change pas la validité de (4). \square

Ayant prouvé la proposition, nous pouvons maintenant démontrer le théorème du minimax. Pour cela, nous allons nous donner une constante c arbitraire et en utilisant la proposition 5, nous pouvons montrer soit que

$$\max_{z \in \delta_n} \min_{y \in \delta_m} y^t A z \geq c \quad \text{ou} \quad \min_{y \in \delta_m} \max_{z \in \delta_n} y^t A z \leq c. \quad (5)$$

Pour prouver cela nous appliquons la proposition 5 à la matrice $M = -A + c\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est une matrice de dimension $m \times n$ dont toutes les entrées sont égales à 1. La matrice $\mathbf{1}$ a la propriété intéressante que $y^t \mathbf{1} z = 1$ pour tout $y \in \delta_m$ et $z \in \delta_n$. Si le point 1 de la proposition est correct, alors il existe un $y^* \in Y$ tel que

$$y^{*t}(-A + c\mathbf{1})z = -y^{*t}Az + c \geq 0, \forall z \in \delta_n.$$

Dans ce cas,

$$y^{*t}Az \leq c, \forall z \in \delta_n$$

et pour cela l'inégalité à gauche de (5) est vérifiée. Si maintenant on regarde le point 2 de la proposition, alors il existe un $z^* \in \delta_n$ tel que

$$y^t(-A + c\mathbf{1})z^* = -y^tAz^* + c \leq 0, \forall y \in \delta_m.$$

Dans ce cas,

$$y^tAz^* \geq c, \forall y \in \delta_m$$

et pour cela l'inégalité à droite de (5) est vérifiée. Ceci termine la preuve de (5). Si le théorème du minimax ne tenait pas, on pourrait prendre un c tel que

$$\max_{z \in \delta_n} \min_{y \in \delta_m} y^tAz < c < \min_{y \in \delta_m} \max_{z \in \delta_n} y^tAz,$$

contredisant l'équation (5). Ceci explique qu'il n'y a pas de trou entre le $\max_{z \in \delta_n} \min_{y \in \delta_m}$ et le $\min_{y \in \delta_m} \max_{z \in \delta_n}$. \square

Ceci est seulement une manière de prouver le théorème, il existe bien sûr d'autres démonstrations comme celle qui utilise des arguments de convexité élémentaires ou celle qui utilise la dualité de l'optimisation linéaire.

2.3 Jeux à information complète et jeux à information parfaite

Un jeu est dit à information complète si chaque joueur connaît lors de la prise de décision :

1. ses possibilités d'action
2. les possibilités d'action des autres joueurs
3. les gains résultant de ses actions
4. les motivations des autres joueurs.

Les jeux à information incomplète sont des situations stratégiques où l'une des conditions n'est pas vérifiée. Par exemple du fait qu'une des motivations d'un joueur est cachée. On parle d'information parfaite lorsqu'un jeu possède un mécanisme séquentiel, permettant à chaque joueur de connaître à tout instant toutes les actions effectuées avant son choix. Si le joueur n'a pas connaissance des actions faites avant son choix ou s'il souffre d'amnésie, alors on parle d'un jeu à information imparfaite. Cela peut être dû à l'intervention du hasard au cours du jeu. L'information parfaite fait référence aux actions dans le jeu et l'information complète fait référence à la structure et aux gains du jeu.

Exemples. – Aux échecs l'information est complète et parfaite.

- Le poker est à information incomplète (les adversaires ont leurs cartes cachées) et imparfaite (car le hasard intervient dans les cartes, le tirage des cartes est assimilé à l'action d'un joueur fictif nommé « hasard »). On pourrait croire qu'il est parfait du fait qu'on connaît les actions des autres joueurs (check, fold, raise), mais l'intervention du hasard fait que le poker est classé parmi les jeux à information imparfaite.
- Pierre, papier, ciseaux est un jeu à information complète et imparfaite (car choix caché).
- Le dilemme du prisonnier est également un jeu à information complète et imparfaite, car on ignore l'action de son adversaire.

Les jeux à information à la fois imparfaite et incomplète sont de loin les plus intéressants et complexes. Dans ces jeux certains joueurs peuvent disposer d'informations propres sur la manière dont le hasard va intervenir dans l'issue du jeu. On amène donc des probabilités dans le problème.

Un exemple est le blackjack, également connu sous le nom de 21. La convention selon laquelle la suite de paquets de cartes n'est pas battue entre deux jeux peut donner un léger avantage au joueur dès lors que celui-ci prend en compte cette information partielle.

La *transformation de Harsanyi* (1967) rend possible de transformer un jeu à information incomplète en un jeu à information complète mais imparfaite. Cette transformation s'opère via une simple introduction de la nature comme joueur dans le jeu et via un conditionnement des gains par rapport aux actions, inconnues, de la nature.

2.4 Jeux coopératifs et jeux de compétition

Dans les jeux coopératifs, les joueurs forment des coalitions. On étudie la formation de coalitions entre les joueurs afin d'obtenir le meilleur résultat possible pour chacun de ses membres. Il s'agit plutôt d'une compétition entre coalitions qu'entre joueurs individuels. Un concept utilisé dans les jeux coopératifs est la notion de fonction caractéristique v , qui permet de spécifier une valeur pour chaque coalition. Pour un ensemble fini de n joueurs appelé la *grande coalition* et noté N , cette fonction envoie 2^N sur \mathbb{R} , et, pour chaque coalition C (sous-ensemble de $N = \{1, \dots, n\}$), $v(C)$ donne sa valeur maximin. Un singleton est logiquement une coalition avec un seul joueur. Un joueur i a un *droit de veto* s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes : $v(C) = 1 \Rightarrow i \in C$, et un joueur i est appelé un *dictateur* si une coalition est gagnante si et seulement si il en fait partie : $v(C) = 1 \iff i \in C$. La monotonie est définie par l'implication $S \subset T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$. Dans un jeu à n personnes, il y a $2^n - 1$ coalitions non-vides et autant de fonctions caractéristiques v .

Deux propriétés importantes de la fonction caractéristique sont les suivantes :

1. $v(\emptyset) = 0$,
2. $v(C \cup D) \geq v(C) + v(D)$, $C \cap D = \emptyset$, $C, D \subset N$,

où la seconde condition est appelée la propriété de superadditivité.

Soit x_i la somme ou l'utilité qu'un joueur i reçoit. Une imputation est un vecteur $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ qui indique ce que chaque joueur obtient lors du jeu. Prenons deux imputations possibles x et y de la coalition C . On dit que y est dominée par x si $x_i > y_i$ pour tout $i \in C$ et $\sum_{i \in C} x_i \leq v(C)$. Dans un jeu coopératif, le problème le plus difficile à résoudre est la répartition équitable des gains de la

coalition. Une solution d'un jeu coopératif est donnée par la *valeur de Shapley* qui est une imputation unique.

Cette valeur est appelée ainsi en l'honneur de Lloyd Shapley qui l'a introduite en 1953. Elle permet une répartition équitable des gains dans un jeu coopératif. La solution proposée par Shapley s'applique au cas où l'utilité est transférable. Afin d'illustrer cette dernière notion, prenons le cas d'entreprises qui forment un cartel et décident des quotas de production : on parle alors d'utilité non-transférable. Par contre, si le but du cartel est la maximisation du profit global et ensuite la répartition de ce montant entre les participants, alors on parle d'une solution avec utilité transférable.

La valeur de Shapley $\phi_i(v)$ repose sur cinq axiomes :

1. Équité individuelle : $\phi_i(v) \geq v(i) \forall i \in N$: chaque joueur reçoit au moins autant que s'il n'avait pas collaboré.
2. Efficience : le gain total est distribué $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$.
3. Symétrie : Si i et j sont deux joueurs équivalents au sens que $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ pour tout sous-ensemble S de N qui ne contient ni i ni j , alors $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
4. Additivité : $\phi_i(v + \omega) = \phi_i(v) + \phi_i(\omega)$ pour tout i appartenant à N , si on assemble les gains de deux coalitions, la somme doit être égal aux gains de l'une plus de l'autre.
5. Axiome indicateur ou joueur nul : un joueur nul doit recevoir 0. Un joueur est dit nul si $v(S \cup i) = v(S)$ pour toute coalition S de N ne contenant pas i .

La somme que le joueur i reçoit si la fonction caractéristique v est utilisé est :

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Chaque participant demande pour sa contribution une compensation et pondère toutes les différentes permutations possibles dans lesquelles la coalition peut être formée.

Exemple 6. Dans une assemblée législative, il y a plusieurs possibilités de coalition entre les partis. Si l'on attribue une valeur aux coalitions gagnantes et 0 aux autres, alors la valeur de Shapley est une mesure du pouvoir des partis.

Exemple 7. Supposons qu'il y a 3 joueurs, les joueurs 1 et 2 ont des chaussettes droites et le joueur 3 a des chaussettes gauches. La fonction caractéristique $v(S) = 1$ si $S = (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3)$ et 0 sinon. La formule pour calculer la valeur de Shapley est donnée par

$$\phi_i(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{R} [v(P_i^R \cup i) - v(p_i^R)],$$

où R est l'ordre des joueurs et P_i^R est un ensemble de joueur de N qui précède le joueur i dans l'ordre de R . Intéressons-nous aux contributions marginales du premier joueur :

- $R = 1, 2, 3$ et on a : $v(1) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$
- $R = 1, 3, 2$ et on a : $v(1) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$
- $R = 2, 1, 3$ et on a : $v(1, 2) - v(2) = 0 - 0 = 0$

- $R = 2, 3, 1$ et on a : $v(1, 2, 3) - v(2, 3) = 1 - 1 = 0$
- $R = 3, 1, 2$ et on a : $v(1, 3) - v(3) = 1 - 0 = 1$
- $R = 3, 2, 1$ et on a : $v(1, 2, 3) - v(2, 3) = 1 - 1 = 0$.

Cela implique que la valeur de Shapley pour le joueur 1 vaut $\phi_1(v) = \frac{1}{6}$ et par symétrie $\phi_2(v) = \frac{1}{6}$ pour le joueur 2 et par la propriété d'efficacité la valeur de Shapley pour le joueur 3 est de $\phi_3(v) = \frac{4}{6}$.

2.5 Jeux répétés

La répétition d'un jeu avec connaissance des résultats intermédiaires change souvent fondamentalement son déroulement. Par exemple, il peut être utile de prendre ponctuellement le risque de perdre afin de tester la réaction des autres joueurs et ainsi mettre en place des stratégies de communication par les actions jouées (à défaut d'autres moyens de communication). Il arrive aussi que des phénomènes de réputation se développent, phénomènes qui vont influencer les choix stratégiques des autres joueurs.

Dans le dilemme du prisonnier, le fait de savoir qu'on va jouer plusieurs fois avec un dur qui n'avoue jamais mais se venge cruellement, ou avec un lâche qui avoue toujours, change radicalement la stratégie optimale. Curieusement, le fait que le nombre total de parties soit connu à l'avance ou non peut avoir des effets importants sur le résultat. L'ignorance du nombre total de parties rapproche du jeu avec un nombre infini de coups alors que sa connaissance rapproche au contraire du jeu à un seul coup.

Exemple 8. Lorsque la répétition a lieu dans le dilemme du prisonnier, chaque joueur a l'opportunité de punir l'autre joueur pour sa précédente non-coopération. La coopération peut donc survenir dans cette configuration. L'incitation à tricher est inférieure à la menace de punition, ce qui renforce la possibilité de coopérer. Le jeu se répète et les participants gardent en mémoire les précédentes rencontres. Ce jeu s'appelle alors le dilemme itératif du prisonnier.

Exemple 9. Terminons ce chapitre par un jeu « réel ». Vous n'avez pas les mêmes goûts musicaux que votre voisin. Il lui arrive d'écouter de la musique à fond. Il vous arrive aussi de mettre votre musique à un volume plus que raisonnable, ce qui a pour conséquence que le lendemain il recommence à nouveau. Mais vous appréciez les périodes où aucun de vous ne gêne l'autre.

- Vous avez une satisfaction de 5 à écouter votre musique très fort.
- Votre satisfaction est de 0 lorsque votre voisin met sa musique à fond.
- Une soirée calme sans musique vous apporte une satisfaction de 3.
- Le fait d'entendre votre musique et celle du voisin en même temps vous donne une satisfaction de 1.

Vous savez ce que votre voisin a eu comme comportement les jours précédents, qu'allez-vous faire aujourd'hui ?

3 Bibliographie

- [1] M. DRESHER, *Games of strategy : theory and applications*. Prentice-Hall, 1961.

- [2] M. M. FLOOD, « Some experimental games », Research memorandum RM-789-1-PR, RAND Corporation, Santa-Monica, CA, USA, June 1952.
- [3] J. HARSANYI, « Games of incomplete information played by Bayesian players », *Management Science*, vol. 14, p. 159–182, 320–334, 486–502, 1967.
- [4] J. von NEUMANN et O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1944.
- [5] J. F. NASH, Jr., « Equilibrium points in n -person games », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 36, p. 48–49, 1950.
- [6] J. NASH, « Non-cooperative games », *Ann. of Math. (2)*, vol. 54, p. 286–295, 1951.
- [7] L. S. SHAPLEY, « A value for n -person games », in *Contributions to the theory of games, vol. 2*, Annals of Mathematics Studies, no. 28, p. 307–317, Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1953.
- [8] J. v. NEUMANN, « Zur Theorie der Gesellschaftsspiele », *Math. Ann.*, vol. 100, no. 1, p. 295–320, 1928.