

Le théorème de Hurwitz

Laurent La Fuente-Gravy*
Laurent.La.Fuente.Gravy@ulb.ac.be

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de déterminer quels sont les espaces vectoriels réels qui admettent une structure d'algèbre à division.

À cette fin nous présentons la construction de Cayley-Dickson et voyons comment elle permet d'obtenir successivement les nombres complexes, les quaternions et les octonions à partir des nombres réels. Nous verrons, dans la section 3, que l'existence de ces structures en dimensions 2, 4 et 8 permet de prouver que les fibrés tangents aux sphères de dimensions 1, 3 et 7 sont triviaux.

Nous démontrons enfin le théorème de Hurwitz dans la section 4 qui affirme que \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} et \mathbb{O} sont les seuls exemples d'algèbres à division normées.

Sommaire

1	Introduction	158
2	La construction de Cayley-Dickson	158
3	Fibrés tangents aux sphères	160
4	Démonstration du théorème de Hurwitz	162
5	Bibliographie	164

*Laurent La Fuente-Gravy est doctorant et Aspirant FNRS au Département de Mathématique de l'Université libre de Bruxelles. Il est titulaire d'un Master en Sciences Mathématiques de l'Université libre de Bruxelles, et travaille en géométrie symplectique.

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de déterminer quels sont les espaces vectoriels réels qui admettent une structure d'algèbre à division.

Définition 1. Une structure d'algèbre à division sur un espace vectoriel réel V est une application

$$\cdot : V \times V \rightarrow V$$

qui est

1. bilinéaire,
2. unitale, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $1 \in V$ tel que

$$\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v = v \cdot 1,$$

3. sans diviseur de zéro, c'est-à-dire pour tout $v, w \in V$

$$v \cdot w = 0 \implies v = 0 \text{ ou } w = 0.$$

Définition 2. Un espace vectoriel V est une *algèbre à division normée* (notée ADN dans la suite) s'il est muni d'une structure d'algèbre à division et d'une *norme* $v \mapsto |v|$ telle que pour tout $v, w \in V$,

$$|vw| = |v||w|.$$

Le théorème de Hurwitz, que nous démontrerons dans la section 4, affirme que \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} (les quaternions) et \mathbb{O} (les octonions) sont les seuls exemples d'ADN. Nous suivrons la preuve donnée dans le livre de Conway et Smith [1].

Ce théorème d'algèbre trouve des applications surprenantes en géométrie. Par exemple, l'algèbre des quaternions \mathbb{H} , que nous avons présentée dans [2], forme une algèbre de dimension 4 sur les réels. Nous avons aussi montré que ces « nombres » permettaient de paramétrer les rotations de \mathbb{R}^3 ainsi que d'étudier la fibration de Hopf.

Nous verrons, dans la section 3, que l'existence de telles structures algébriques en dimensions 2, 4 et 8 permet de prouver que les fibrés tangents aux sphères de dimension 1, 3, 7 sont triviaux. En fait, ce sont les seules sphères (de dimension ≥ 1) qui ont cette propriété. Ce fait a été utilisé par Bott, Milnor et Kervaire pour prouver la non-existence d'algèbres à division en dimensions autres que 1, 2, 4 et 8.

2 La construction de Cayley-Dickson

La construction de Cayley-Dickson fournit une formule qui, sur base d'un produit sur un espace vectoriel (A, \cdot) , donne un produit sur le produit cartésien $A \times A$. Cette construction nécessite l'existence d'une structure supplémentaire sur A nommée conjugaison, que l'on note

$$\bar{\cdot} : A \rightarrow A : a \mapsto \bar{a}$$

et qui vérifie $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$. Nous noterons $(A, \cdot, \bar{\cdot})$ un espace vectoriel muni d'un produit et d'une conjugaison.

Définition 3. Le double de Cayley-Dickson de $(A, \cdot, \bar{})$ est l'espace vectoriel $\text{CD}(A) \stackrel{\text{def}}{=} A \times A$ muni du produit

$$(a, b) \cdot (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (ac - d\bar{b}, cb + \bar{a}d) \quad \forall (a, b), (c, d) \in \text{CD}(A) \quad (1)$$

et d'une conjugaison

$$\overline{(a, b)} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{a}, -b) \quad \forall (a, b) \in \text{CD}(A). \quad (2)$$

En appliquant cette construction à l'algèbre à division des réels munie de la conjugaison triviale et en itérant le processus, on retrouve les exemples classiques.

Exemple. $\text{CD}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ muni de la multiplication usuelle de deux nombres complexes et de la conjugaison usuelle. Cette algèbre est normée par le module qui fait de \mathbb{C} une algèbre à division normée. Les complexes jouissent de propriétés intéressantes comme la commutativité et l'associativité de la multiplication.

Exemple. $\text{CD}(\mathbb{C}) = \mathbb{H}$ que l'on a identifié à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par

$$1 \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0), i \stackrel{\text{def}}{=} (i, 0), j \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1), k \stackrel{\text{def}}{=} (0, -i).$$

La règle de Cayley-Dickson permet de retrouver les règles de multiplication usuelles des quaternions, à savoir $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ et de la conjugaison

$$\overline{a + bi + cj + dk} \stackrel{\text{def}}{=} a - bi - cj - dk.$$

Cette algèbre est normée par

$$|a + bi + cj + dk| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

qui fait de \mathbb{H} une ADN. Les quaternions sont associatifs mais pas commutatifs. Le processus de Cayley-Dickson a fait perdre une propriété agréable à l'algèbre de départ.

Exemple (Les Octonions \mathbb{O} de Cayley-Graves). $\text{CD}(\mathbb{H}) = \mathbb{O}$ et la formule de Cayley-Dickson fournit les règles suivantes pour la multiplication des octonions. En notant les éléments de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{\text{def}}{=} (1, 0), e_1 \stackrel{\text{def}}{=} (i, 0), e_2 \stackrel{\text{def}}{=} (j, 0), e_3 \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1), e_4 \stackrel{\text{def}}{=} (k, 0), \\ e_5 &\stackrel{\text{def}}{=} (0, -j), e_6 \stackrel{\text{def}}{=} (0, k), e_7 \stackrel{\text{def}}{=} (0, -i), \end{aligned}$$

les règles de multiplication de ces éléments sont reprises dans le plan de Fano de la figure 1 où

- le sens des flèches détermine le signe du produit, par exemple $e_6 e_1 = e_5$ tandis que $e_1 e_6 = -e_5$;
- chaque alignement détermine une sous-algèbre isomorphe à \mathbb{H} ;
- $e_i^2 = -1$ pour tout $i = 1, \dots, 7$.

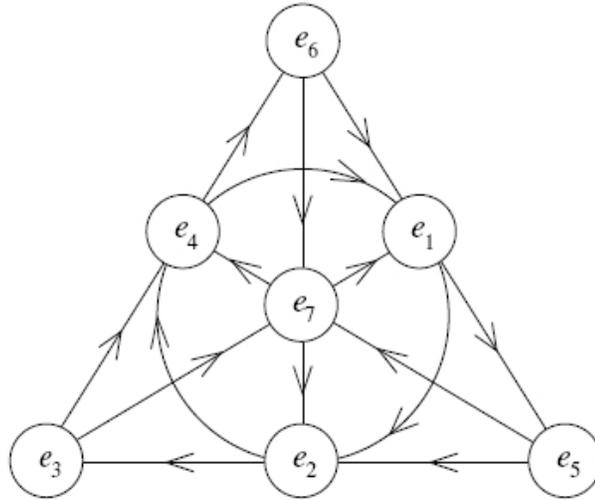


FIGURE 1 — Plan de Fano.

La norme est définie par

$$\left| \sum_{i=0}^7 a_i e_i \right| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=0}^7 a_i^2}$$

où on a noté $e_0 = 1$. Les octonions forment une ADN. Les octonions ne sont ni commutatifs ni associatifs. De nouveau, le processus de Cayley-Dickson a détruit une propriété de l'algèbre initiale : l'associativité.

Exemple. $CD(\mathbb{O}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{O} \times \mathbb{O}$ n'est plus une ADN. En effet,

$$(e_1, -e_7).(e_2, e_5) = (0, 0).$$

En conclusion, la construction de Cayley-Dickson permet de retrouver les exemples connus d'algèbres à division normées, mais elle arrête de fournir des ADN au-delà des octonions. La preuve de cette assertion est donnée par le théorème de Hurwitz.

Théorème 4 (Hurwitz (1898)). $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et \mathbb{O} sont les seules algèbres à division normées.

3 Fibrés tangents aux sphères

Dans cette section nous allons établir un lien surprenant entre l'existence de structures d'algèbre à division et des propriétés topologiques des sphères.

Considérons la sphère $\mathbf{S}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$. Nous allons utiliser l'algèbre des quaternions pour montrer le fait suivant.

Proposition 5. *Le fibré tangent TS^3 à la sphère S^3 est un fibré trivial, i.e.*

$$TS^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Commençons par définir le fibré tangent à la sphère. Pour cela, on munit \mathbb{R}^4 du produit scalaire standard. Soit p un point de la sphère et soit $v \in \mathbb{R}^4$ un vecteur orthogonal à p . Alors, le translaté du vecteur v au point p est tangent à la sphère. De cette manière, on obtient tous les vecteurs tangents à la sphère au point p , i.e. $T_p S^3 = p + p^\perp$ où p^\perp désigne le sous-espace de \mathbb{R}^4 des vecteurs orthogonaux à p . Le fibré tangent à la sphère est la collection de tous ces espaces tangents, plus précisément $TS^3 \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{p \in S^3} T_p S^3$ (le symbole \bigsqcup représente l'union disjointe).

À l'aide des quaternions, nous allons définir trois rotations de 90° dans \mathbb{R}^4 . Pour cela, identifions $p \stackrel{\text{def}}{=} (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ au quaternion $a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$. On définit alors

$$\begin{aligned} r_i : p &\mapsto i.p : (a, b, c, d) \mapsto (-b, a, -d, c) \\ r_j : p &\mapsto j.p : (a, b, c, d) \mapsto (-c, d, a, -b) \\ r_k : p &\mapsto k.p : (a, b, c, d) \mapsto (-d, -c, b, a). \end{aligned}$$

Étant donné un point p de S^3 , les vecteurs $i.p, j.p$ et $k.p$ forment une base du plan orthogonal à p . Et on a vu plus haut que ce plan était identifié au plan tangent à la sphère au point p . Dès lors, r_i, r_j et r_k fournissent des applications qui à chaque $p \in S^3$ associent un vecteur non nul de $T_p S^3$ et ces applications sont C^∞ . On peut maintenant construire une bijection

$$\Phi : S^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow TS^3 : (p, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \mapsto \lambda_1 r_i(p) + \lambda_2 r_j(p) + \lambda_3 r_k(p).$$

Cette bijection est C^∞ , et d'inverse C^∞ : il s'agit donc d'un difféomorphisme.

La trivialité du fibré TS^3 est loin d'être un fait anodin. Notons que la construction ci-dessus peut être reproduite pour les fibrés TS^1 et TS^7 en utilisant les nombres complexes et les octonions respectivement. On voit ainsi apparaître un lien entre les structures d'algèbre sur \mathbb{R}^n et la trivialité du fibré tangent à la sphère de dimension $n - 1$. Il est alors naturel de se poser la question suivante.

Question. Quelles sont les sphères qui admettent un fibré tangent trivial ?

La réponse à cette question fut donnée par Kervaire, ainsi que Bott-Milnor en 1958.

Théorème 6. *Le fibré TS^n n'est trivial que pour $n = 1, 3, 7$.*

Ils obtinrent le corollaire suivant.

Corollaire 7. *L'espace vectoriel \mathbb{R}^n n'admet une structure d'algèbre à division que si $n = 1, 2, 4, 8$.*

Remarquons pour terminer cette section que ce corollaire diffère du théorème de Hurwitz. En effet, la dimension de l'espace vectoriel est finie et les algèbres à division ne doivent pas nécessairement être normées. Notons aussi que ce corollaire n'a pas été démontré algébriquement mais via l'étude de la topologie des sphères, à l'aide d'outils de topologie algébrique moderne comme les classes caractéristiques.

4 Démonstration du théorème de Hurwitz

Soit $(A, \cdot, \|\cdot\|)$ une ADN. La démonstration s'effectuera en deux étapes.

On va dans un premier temps montrer que si A contient une sous-algèbre à division H , alors A contient le double de Cayley-Dickson $CD(H)$. On peut alors conclure en argumentant comme suit. L'algèbre A contient les réels identifiés à \mathbb{R} . Donc A contient aussi les doubles de Cayley-Dickson successifs des réels. Comme ce processus cesse de donner des algèbres à division au-delà des octonions, on obtient que la dimension de A est inférieure ou égale à 8, et A est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou \mathbb{O} .

4.1 Généralités sur les algèbres à division

Dans la suite, nous allons demander que la norme sur A soit induite par un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous aurons besoin des identités suivantes pour $x, y, z, u \in A$.

Propriété 8. $\langle xy, xz \rangle = |x|^2 \langle y, z \rangle$.

Démonstration. On calcule d'une part

$$|x|^2 |y+z|^2 = |x|^2 (|y|^2 + |z|^2 + 2\langle y, z \rangle),$$

et d'autre part

$$|x(y+z)|^2 = |xy|^2 + |xz|^2 + 2\langle xy, xz \rangle.$$

□

Propriété 9. $\langle xy, uz \rangle = 2\langle x, u \rangle \langle y, z \rangle - \langle xz, uy \rangle$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété 8 à $\langle (x+u)y, (x+u)z \rangle$.

□

Le produit scalaire sur A permet de définir une conjugaison sur A :

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} 2\langle x, 1 \rangle - x. \quad (3)$$

Il faut maintenant vérifier que cette conjugaison possède les propriétés nécessaires pour effectuer la construction de Cayley-Dickson. À cet effet, on utilise l'identité suivante.

Propriété 10. $\langle xy, z \rangle = \langle y, \bar{x}z \rangle$ et $\langle xy, z \rangle = \langle x, z\bar{y} \rangle$.

Démonstration. Montrons la première de ces identités grâce à la propriété 9 (la seconde identité se montre similairement) :

$$\begin{aligned} \langle xy, z \rangle &= 2\langle x, 1 \rangle \langle y, z \rangle - \langle xz, y \rangle \\ &= 2\langle x, 1 \rangle \langle y, z \rangle - \langle y, xz \rangle \\ &= \langle y, (2\langle x, 1 \rangle - x)z \rangle = \langle y, \bar{x}z \rangle. \end{aligned}$$

□

Propriété 11. $\bar{\bar{x}} = x$.

Démonstration. En appliquant la propriété précédente, on obtient pour tout $z \in A$:

$$\langle x, z \rangle = \langle x.1, z \rangle = \langle 1, \bar{x}z \rangle = \langle \bar{x}z, 1 \rangle = \langle z, \bar{x} \rangle$$

ce qui prouve l'égalité car un produit scalaire est non-dégénéré. □

Propriété 12. $\overline{\bar{x}y} = \bar{y}\bar{x}$.

4.2 Le double de Cayley-Dickson d'une sous-algèbre

Considérons $\{0\} \neq H$ une sous-algèbre strictement contenue dans A contenant l'unité 1. Soit $i \in A$ tel que i soit orthogonal à H et $|i| = 1$. On calcule facilement en utilisant les propriétés ci-dessus que $\bar{i} = -i$ et $i^2 = -1$. Notre but consiste à montrer que le sous-espace $H + iH$ de A est une sous-algèbre isomorphe à $CD(H)$.

Premièrement, comme i est orthogonal à H , on déduit que iH est orthogonal à H . Donc $H + iH$ est, en tant qu'espace vectoriel, isomorphe à $H \times H$.

Ensuite, les propriétés suivantes permettent de conclure. Soient

Propriété 13. Les égalités suivantes sont vraies pour tout $a, b, c, d \in H$.

- $\langle a + ib, c + id \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, d \rangle$.
- $\overline{a + ib} = \bar{a} - ib$.
- $(a + ib)(c + id) = (ac - d\bar{b}) + i(cb + \bar{a}d)$.

Démonstration. La première propriété vient du fait que i est orthogonal à H . La seconde propriété découle de $\overline{ib} = \langle ib, 1 \rangle - ib = -ib$. Pour la troisième propriété, on commence par distribuer les termes. Puis, on compare les termes obtenus en utilisant les propriétés précédentes ainsi que les propriétés 8 à 11. □

Dans les exemples de la section 2, nous avons constaté qu'itérer le processus de Cayley-Dickson donnait lieu à des algèbres de moins en moins agréables. Nous allons préciser ces dégénérescences dans les lemmes suivants.

Lemme 14. $H + iH$ est une ADN si et seulement si H est une ADN associative.

Démonstration. $H + iH$ est une ADN si et seulement si pour tout $a, b, c, d \in H$:

$$\begin{aligned} |a + ib|^2 |c + id|^2 &= |(ac - d\bar{b}) + i(cb + \bar{a}d)|^2, \\ \iff \langle cb, \bar{a}d \rangle &= \langle ac, d\bar{b} \rangle \\ \iff \langle a(cb), d \rangle &= \langle (ac)b, d \rangle \quad (\text{propriété 10}) \\ \iff a(cb) &= (ac)b. \end{aligned}$$

C'est-à-dire si et seulement si H est associative. □

Lemme 15. $H + iH$ est une ADN associative si et seulement si H est une ADN associative et commutative.

Démonstration. La sous-algèbre $H + iH$ est associative si et seulement si pour tout $a, b, c, d, e, f \in H$, on a :

$$((a + ib)(c + id))(e + if) = (a + ib)((c + id)(e + if)).$$

Cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} (ac)e - (d\bar{b})e - f(\bar{b}\bar{c}) - f(\bar{d}a) = a(ce) - a(f\bar{d}) - (ed)\bar{b} - (\bar{c}f)\bar{b} \\ e(cb) + e(\bar{a}d) + (\bar{c}\bar{a})f - (b\bar{d})f = (ce)b - f(\bar{d}b) + (\bar{a}e)d + \bar{a}(\bar{c}f) \end{cases}$$

pour tous $a, b, c, d, e, f \in H$. Par le lemme précédent, on sait que H est associative. Et on vérifie que le système est équivalent au fait que H soit commutative. \square

Lemme 16. $H + iH$ est une ADN associative et commutative si et seulement si H est une ADN associative et commutative munie d'une conjugaison qui est triviale.

Démonstration. $H + iH$ est associative, commutative si et seulement si :

$$\begin{aligned} (a + ib)(c + id) &= (c + id)(a + ib), \\ \iff -d\bar{b} + i(cb + \bar{a}d) &= -b\bar{d} + i(ad + \bar{c}b). \end{aligned}$$

La dernière équation n'est vérifiée que si $\bar{x} = x$ pour tout $x \in H$. \square

Les lemmes précédents prouvent que les seules algèbres à division sont \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} et \mathbb{O} .

5 Bibliographie

- [1] J. H. CONWAY et D. A. SMITH, *On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry*. Natick, MA : A K Peters Ltd., 2003.
- [2] L. LA FUENTE-GRAVY et N. ZENAÏDI, « La fibration de hopf », in *Notes de la troisième BSSM* (C. LEY, N. RICHARD et Y. SWAN, eds), 2010.
- [3] J. C. BAEZ, « The octonions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, vol. 39, no. 2, p. 145–205, 2002.
- [4] R. BOTT et J. MILNOR, « On the parallelizability of the spheres », *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 64, p. 87–89, 1958.