

# Les points fixes d'une application ou l'existence géométrisée

Jean Mawhin\*  
jean.mawhin@uclouvain.be

## Résumé

Un point fixe d'une application  $T$  d'un ensemble  $E$  en lui-même est un point de l'ensemble égal à son image par  $T$ . L'étude du comportement des itérées  $T^k(q)$  permet de prouver l'existence d'un point fixe pour des classes particulières d'applications d'ensembles fermés de l'espace euclidien en eux-mêmes.

Un résultat de Brouwer affirme que toute application continue d'une boule fermée de l'espace euclidien à  $n$  dimensions en elle-même a un point fixe. La preuve d'existence de ce point paresseux est élémentaire — quoique non triviale — lorsque  $n = 1$ , et cesse de l'être dès que  $n \geq 2$ . Le point fixe peut disparaître en dimension infinie.

Véritable caméléon, le théorème de Brouwer prend des formes variées, sources d'énoncés surprenants et d'applications utiles dans de nombreux domaines des mathématiques et des sciences (de la physique à l'économie). L'une des applications a même valu un Prix Nobel à son auteur.

## Sommaire

---

1	Points fixes et itérées d'une transformation . . . . .	2
2	Isométries et applications non expansives . . . . .	5
3	Pour Brouwer, la continuité suffit . . . . .	8
4	Des ensembles qui se rétractent . . . . .	11
5	Poincaré sait mettre un zéro en boîte . . . . .	13
6	Le jeu pipé de Sperner . . . . .	16
7	Un équilibre pour jeux non coopératifs . . . . .	17
8	Égalité aux antipodes et partage équitable . . . . .	18
9	Les surprises de la dimension infinie . . . . .	20
10	Pour conclure et pour en savoir plus . . . . .	22
A	Preuve du théorème de Brouwer dans $B^2$ . . . . .	23

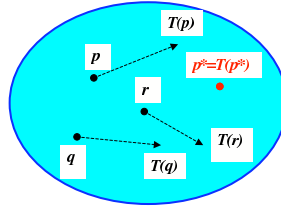
---

---

\*Jean Mawhin est Professeur émérite auprès de l'Institut de recherche en mathématique et physique de l'Université Catholique de Louvain. Il est titulaire d'un Doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université de Liège. Il est spécialisé en équations différentielles non linéaires, analyse fonctionnelle non linéaire, calcul des variations, analyse réelle et histoire des mathématiques.

## 1 Points fixes et itérées d'une transformation

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $T : E \rightarrow E$  une *transformation* (ou *application*) de  $E$  en lui-même :  $T$  associe à chaque  $p \in E$  un unique élément  $T(p)$  de  $E$ .



On dit que  $p^* \in E$  est un *point fixe* de  $T$  si  $T(p^*) = p^*$ . Leur existence est importante dans de nombreuses questions mathématiques. Elle dépend de la nature et des propriétés de  $E$  et de  $T$ .

Dans la majeure partie de cet exposé, nous nous limiterons au cas où  $E$  est une partie de l'espace vectoriel à  $n$  dimensions

$$\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{p = (p_1, \dots, p_n) : p_j \in \mathbb{R} (j = 1, \dots, n)\}$$

muni de la norme euclidienne  $\|p\| = (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{1/2}$ . Nous supposons que  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un fermé non vide : toute suite dans  $E$  qui converge a sa limite dans  $E$  et que  $T : E \rightarrow E$  est continue :  $T(p_k) \rightarrow T(p)$  lorsque  $p_k \rightarrow p$ .

Les *itérées*  $T^k$  de  $T$  sont les applications de  $E$  dans  $E$  définies, pour chaque  $p \in E$ , par  $T^k(p) \stackrel{\text{def}}{=} T \circ T \circ \dots \circ T(p) = T(T(\dots(T(p))\dots))$  ( $k$  fois). On pose  $T^0(p) = p$ . Dans le langage des systèmes dynamiques discrets,  $(T^k(p))_{k \in \mathbb{N}}$  est l'*orbite* de  $p$  sous l'action de  $T$ . L'existence d'un point fixe de  $T$  est liée à la convergence d'une de ces orbites.

**Théorème 1.** Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un fermé non vide et  $T : E \rightarrow E$  est continue,  $T$  a un point fixe si et seulement s'il existe  $q \in E$  tel que  $(T^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  converge, auquel cas  $p^* \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(q) = T(p^*)$ .

*Démonstration.*

*Condition nécessaire.* Si  $T$  a un point fixe  $p^*$ , alors,

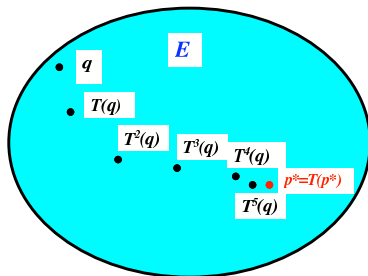
$$p^* = T(p^*), \quad T(p^*) = T^2(p^*), \quad \dots, \quad T^{k-1}(p^*) = T^k(p^*), \quad \dots$$

et la suite constante  $(T^k(p^*))_{k \in \mathbb{N}} = (p^*)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $p^*$ .

*Condition suffisante.* Si  $q \in E$  est tel que  $p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(q)$ , alors, puisque  $T$  est continue,  $p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k+1}(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} T[T^k(q)] = T(p^*)$ . □

Les  $T^k(q)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) sont aussi appelés les *approximations successives* de  $p^*$  (voir figure 1).

La caractérisation de l'existence d'un point fixe donné par le théorème 1 est-elle utile ? L'application continue  $T : [1, 2] \subset \mathbb{R} \rightarrow [1, 2]$ ,  $p \mapsto 2/p$  a pour unique

FIGURE 1 — Les approximations successives de  $p^*$ .

point fixe  $p^* = \sqrt{2}$ , comme on le vérifie immédiatement. D'autre part, on calcule aisément que, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  et chaque  $q \in [1, 2]$ ,  $T^{2k+1}(q) = \frac{2}{q}$ ,  $T^{2k}(q) = q$ , et la suite  $(T^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  ne converge que si  $\frac{2}{q} = q$ , c'est-à-dire seulement si  $q = \sqrt{2}$  est le point fixe de  $T$ . L'application continue (dite *antipodale*)  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p \mapsto -p$  a pour unique point fixe  $p^* = 0$ , et, pour chaque  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $(T^k(q))_{k \in \mathbb{N}} = ((-1)^k q)_{k \in \mathbb{N}}$ . Cette suite ne converge de nouveau que si  $q = 0$  (point fixe de  $T$ ). Dans ces deux cas, l'application du théorème 1 équivaut donc à la connaissance explicite d'un point fixe, ce qui limite fortement son utilité.

Il existe heureusement des classes de transformations pour lesquelles la situation est nettement meilleure.

**Définition 2.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide.  $T : E \rightarrow E$  est une *contraction* (ou une application *contractante*) s'il existe  $0 \leq \alpha < 1$  tel que, pour tout  $p$  et  $q \in E$ , on ait  $\|T(p) - T(q)\| \leq \alpha \|p - q\|$ .

Pour ces applications (qui sont évidemment continues), la convergence de  $(T^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  est assurée pour *n'importe quel*  $q \in E$ .

**Théorème 3.** Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un fermé non vide, toute contraction  $T : E \rightarrow E$  a un point fixe unique  $p^*$ , et  $p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(q)$  quel que soit  $q \in E$ .

*Démonstration.*  $T$  a au plus un point fixe car, si  $p^* = T(p^*)$ ,  $q^* = T(q^*)$ ,

$$\|p^* - q^*\| = \|T(p^*) - T(q^*)\| \leq \alpha \|p^* - q^*\|,$$

ce qui entraîne  $p^* = q^*$  puisque  $\alpha < 1$ . Montrons maintenant que, pour chaque  $q \in E$ ,  $(T^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Notons d'abord que, pour chaque  $k \geq 1$ , et chaque  $p, q \in E$ ,

$$\begin{aligned} \|T^k(p) - T^k(q)\| &\leq \alpha \|T^{k-1}(p) - T^{k-1}(q)\| \\ &\leq \alpha^2 \|T^{k-2}(p) - T^{k-2}(q)\| \leq \dots \leq \alpha^k \|p - q\|. \end{aligned}$$

Dès lors, si  $j, k \in \mathbb{N}$ , et  $q \in E$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| T^j(q) - T^k(q) \right\| \\ &= \left\| T^j(q) - T^{j+1}(q) + T^{j+1}(q) - T^{k+1}(q) + T^{k+1}(q) - T^k(q) \right\| \\ &\leq \left\| T^j(q) - T^{j+1}(q) \right\| + \left\| T^{j+1}(q) - T^{k+1}(q) \right\| + \left\| T^{k+1}(q) - T^k(q) \right\| \\ &\leq \alpha^j \|q - T(q)\| + \alpha \left\| T^j(q) - T^k(q) \right\| + \alpha^k \|T(q) - q\|. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\left\| T^j(q) - T^k(q) \right\| \leq \frac{\alpha^j + \alpha^k}{1 - \alpha} \|q - T(q)\| \quad (1)$$

et  $(T^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy puisque le second membre tend vers 0 si  $j$  et  $k$  tendent vers l'infini.  $(T^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  converge donc vers un  $p^* \in E$ , puisque  $E$  est fermé. Par le théorème 1,  $p^*$  est un point fixe de  $T$ , et en faisant tendre  $j \rightarrow \infty$  dans (1), on obtient l'estimation

$$\left\| p^* - T^k(q) \right\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|q - T(q)\| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

□

Le théorème 3 est habituellement appelé *théorème du point fixe de Banach*. En dimension finie, il fut pourtant énoncé et démontré pour la première fois en 1903 par Édouard Goursat. Stefan Banach l'a étendu en 1922 aux espaces vectoriels normés complets de dimension infinie, ce qui a substantiellement augmenté le champ de ses applications. Renato Caccioppoli l'a généralisé en 1930 aux espaces métriques complets. La preuve du théorème 3 fonctionne pour une contraction d'un tel espace  $M$  en lui-même, à condition de remplacer  $\|u - v\|$  par  $d(u, v)$ , avec  $d$  la distance dans  $M$ . On peut illustrer une contraction par le lavage d'une chemise avec une « poudre ordinaire ». À chaque lavage, la chemise rétrécit. Elle pourra se ranger dans le portefeuille après un nombre suffisant de lavages avec cette « poudre ordinaire ».



Goursat (1858-1936)



Banach (1892-1945)



Caccioppoli (1904-1959)

*Remarque 4.* La conclusion du théorème 3 est en défaut si  $E$  n'est pas fermé. Si  $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$  et  $T(p) = \frac{1}{2}(p + e^1)$  ( $T$  associe à chaque  $p \in E$  le milieu du segment  $[p, e^1]$ ),  $T : E \rightarrow E$  est une contraction, avec  $\alpha = 1/2$ , mais son unique point fixe  $p^* = e^1 \notin E$  puisque  $\|p^*\| = 1$ .

Soit maintenant l'application  $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et l'équation associée

$$F(p) = 0. \tag{2}$$

Pour montrer l'existence d'un zéro de  $F$ , ou encore d'une solution de l'équation (2), on peut chercher une application  $T : E \rightarrow E$  telle que

$$F(p) = 0 \Leftrightarrow p = T(p)$$

et tenter d'appliquer à  $T$  un théorème d'existence de point fixe. Il existe en général de nombreuses manières de réduire l'équation (2) à un problème de point fixe. Par exemple, on peut écrire (2) sous la forme  $p = p + F(p)$ , auquel cas  $T = I + F$ , ou encore  $p = p + \gamma F(p)$  avec  $\gamma \neq 0$ , auquel cas  $T = I + \gamma F$ . Il peut encore exister d'autres réductions prenant en compte la forme de  $F$ , et l'efficacité d'une telle réduction dépend du « bon choix » de  $T$ . Par exemple, pour l'équation  $p^2 - 2 = 0$ , ( $p \in [1, 2]$ ), on a les équivalences

$$p^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{2}{p} \stackrel{\text{def}}{=} T_1(p) \Leftrightarrow p = \frac{p}{2} + \frac{1}{p} \stackrel{\text{def}}{=} T_2(p).$$

On a vu précédemment que la suite  $(T_1^k(q))_{q \in \mathbb{N}}$  ne converge que si  $q = \sqrt{2}$ , c'est-à-dire si  $q$  est solution de l'équation, alors que

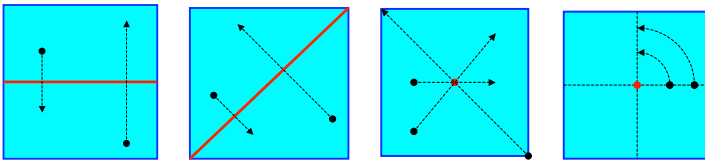
$$1 \leq T_2(p) \leq 2, \quad |T_2(p) - T_2(q)| \leq \frac{1}{2}|p - q| \quad (1 \leq p, q \leq 2)$$

ainsi qu'on le vérifie aisément. Par le théorème 3, la suite  $(T_2^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  converge quel que soit  $q \in [1, 2]$ . Elle fournit rapidement d'excellentes approximations de  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ , puisque

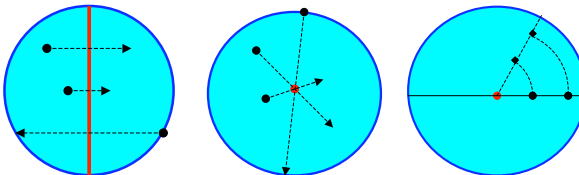
$$T_2(1) = 1,5 \quad ; \quad T_2^2(1) = 1,41666666\dots \quad ; \quad T_2^3(1) = 1,41421568\dots$$

## 2 Isométries et applications non expansives

Les symétries d'un carré par rapport à un diamètre, par rapport à une diagonale, par rapport au centre, et la rotation de  $\pi/2$  du carré,



tout comme les symétries d'un disque par rapport à un diamètre, par rapport au centre, et les rotations du disque autour du centre



conservent les distances (*isométries*), c'est-à-dire sont telles que, pour tous les  $p, q$  appartenant au carré ou au disque,  $\|T(p) - T(q)\| = \|p - q\|$ . Aucune n'est une contraction et toutes ont au moins un point fixe. En renforçant les hypothèses sur  $E$ , on va obtenir des conditions d'existence d'un point fixe pour une classe de transformations contenant les isométries.

**Définition 5.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  est étoilé sur  $p_0 \in E$  si, pour chaque  $p \in E$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $(1 - \lambda)p_0 + \lambda p \in E$ .  $E \subset \mathbb{R}^n$  est convexe s'il est étoilé sur chacun de ses points.

En d'autres termes, un ensemble étoilé sur  $p_0$  contient, avec chacun de ses points  $p$ , le segment  $[p_0, p]$ , tandis qu'un ensemble convexe contient le segment joignant deux quelconques de ses points. Le carré et le disque sont convexes.

**Définition 6.**  $T : E \rightarrow E$  est non expansive si  $\|T(p) - T(q)\| \leq \|p - q\|$  pour tout  $p, q \in E$ .

Les contractions et l'identité sont évidemment non expansives. Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème de Mark A. Krasnosel'skii (1955).



Krasnosel'skii (1920-1997)

**Théorème 7.** Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  est fermé, borné, étoilé sur  $p_0 \in E$ , toute application non expansive  $T : E \rightarrow E$  a un point fixe.

*Démonstration.* Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{k}{k+1}T + \frac{1}{k+1}p_0 : E \rightarrow E$  (puisque  $E$  est étoilé sur  $p_0$ ) et  $\frac{k}{k+1}T$  est une contraction (puisque  $T$  est non expansive). Par le théorème 3, il existe, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p_k \in E$  tel que  $p_k = \frac{k}{k+1}T(p_k)$ . Comme  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée (puisque dans  $E$ ), le théorème de Bolzano-Weierstrass entraîne l'existence d'une sous-suite  $(p_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers un  $p^* \in E$  (puisque  $E$  est fermé). Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $p_{j_k} = \frac{k}{k+1}T(p_{j_k}) + \frac{1}{k+1}p_0$  et dès lors, si  $k \rightarrow \infty$ ,  $p^* = T(p^*)$ .  $\square$

Une application inattendue de ce résultat est la solution d'un problème de géométrie du triangle. On sait depuis longtemps qu'on peut, par la règle et le compas, construire un triangle connaissant la longueur de ses trois hauteurs. Avec les mêmes moyens, on peut construire un triangle connaissant la longueur de ses trois médianes. Par contre, le problème correspondant à partir de la longueur des trois bissectrices semble plus difficile et Alwin Korselt a prouvé en 1897 qu'il n'était pas résoluble avec la règle et le compas. L'existence même d'une solution restait à prouver. Petru Mironescu et Laurentiu Panaitopol ont montré en 1995 qu'elle se ramenait à celle d'un point fixe d'une certaine application d'une partie de  $\mathbb{R}^3$  en elle-même et ont utilisé le théorème du point fixe de Brouwer dont nous parlerons plus loin. George Dinca et l'auteur ont montré en 2010 que l'application en question est non expansive (avec inégalité stricte en des points différents). L'existence et l'unicité du triangle sont ainsi prouvées par des moyens élémentaires.

On a vu plus haut que les itérées de l'application antipodale, qui est non expansive, ne convergent que si elle sont calculées sur le point fixe 0. On peut toutefois obtenir un point fixe d'une application non expansive  $T$  sur un convexe fermé borné  $E$  comme limite des itérées de certaines applications associées à  $T$ . Si  $T : E \rightarrow E$  et  $\lambda \in (0, 1)$ , on définit  $T_\lambda : E \rightarrow E$  par  $T_\lambda = \lambda I + (1 - \lambda)T$ . On vérifie facilement que si  $T$  est non expansive, il en est de même de  $T_\lambda$ . En outre,  $T$  et  $T_\lambda$  ont les mêmes points fixes, puisque

$$p = T(p) \Leftrightarrow (1 - \lambda)p = (1 - \lambda)T(p) \Leftrightarrow p = \lambda p + (1 - \lambda)T(p).$$

Le résultat suivant a été obtenu pour  $\lambda = 1/2$  par Krasnosel'skii en 1955, et pour  $\lambda \in (0, 1)$  par Helmut H. Schaefer en 1957.

**Théorème 8.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide, borné, fermé, convexe et  $T : E \rightarrow E$  non expansive. Alors, pour chaque  $\lambda \in (0, 1)$  et chaque  $q \in E$ ,  $(T_\lambda^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers un point fixe de  $T$ .

*Démonstration.* Soit  $y \in E$  un point fixe de  $T$ . Pour chaque  $\lambda \in (0, 1)$  et  $p \in E$ , la suite positive  $(\|T_\lambda^k(p) - y\|)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante car, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T_\lambda^{k+1}(p) - y\| = \|T_\lambda^{k+1}(p) - T(y)\| \leq \|T_\lambda^k(p) - y\|.$$

Si  $p \neq T(p)$ , l'inégalité classique  $2\langle u, v \rangle < \|u\|^2 + \|v\|^2$  si  $u \neq v$  entraîne

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(p) - y\|^2 &= \|\lambda(p - y) + (1 - \lambda)(T(p) - y)\|^2 \\ &< \lambda^2\|p - y\|^2 + (1 - \lambda)^2\|T(p) - y\|^2 + \lambda(1 - \lambda)(\|p - y\|^2 + \|T(p) - y\|^2) \\ &\leq \|p - y\|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Si  $q \in E$ , la suite bornée  $(T_\lambda^k(q))_{k \in \mathbb{N}}$  contient une sous-suite  $(T_\lambda^{k(n)}(q))_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un  $p^* \in E$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_\lambda^{k(n)+1}(q))_{n \in \mathbb{N}} = T_\lambda(p^*)$ , la suite décroissante  $(\|T_\lambda^k(q) - y\|)_{k \in \mathbb{N}}$  a une sous-suite  $(\|T_\lambda^{k(n)}(q) - y\|)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\|p^* - y\|$  et une sous-suite  $(\|T_\lambda^{k(n)+1}(q) - y\|)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\|T_\lambda(p^*) - y\|$ . Elle est donc convergente et l'unicité de la limite entraîne  $\|p^* - y\| = \|T_\lambda(p^*) - y\|$ . La relation (3) entraîne  $p^* = T(p^*)$ . La suite décroissante  $(\|T_\lambda^k(q) - p^*\|)_{k \in \mathbb{N}}$ , dont la sous-suite  $(\|T_\lambda^{k(n)}(q) - p^*\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, converge vers 0 et  $p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} T_\lambda^k(q)$ .  $\square$

**Exemple.** Soit  $T : B^2 \rightarrow B^2$  la rotation dans le sens direct d'angle  $\pi/2$ . Si  $q = re^{i\theta}$ ,  $T(re^{i\theta}) = re^{i(\theta + (\pi/2))}$ . Comme  $\|T(q)\| = \|q\|$  et  $\arg T(q) = \arg q + \frac{\pi}{2}$ ,

$$\|T_{1/2}(q)\| = \frac{1}{2}(\|q\|^2 + \|T(q)\|^2)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\|q\|, \quad \arg T(q) = \arg q + \frac{\pi}{4}.$$

Donc,  $T_{1/2}^n(q) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \|q\| e^{ni\pi/4}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{1/2}^n(q) \rightarrow 0$ , point fixe de  $T$ .

L'extension des théorèmes 7 et 8 à des espaces de dimension infinie a fait l'objet de nombreuses recherches liées à la *géométrie des espaces de Banach*.

On peut perdre l'existence du point fixe en modifiant une seule des hypothèses du théorème 7. La remarque 4 montre que c'est le cas lorsque  $E$  n'est pas fermé. Dans  $\mathbb{R}^n$ , fermé, convexe mais non borné, la translation  $T_a$  définie par  $T_a(p) = p + a$  ( $a \neq 0$ ) est non expansive et sans point fixe. Dans l'anneau  $E = \{p \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|p\| \leq 2\}$ , fermé, borné mais qui n'est étoilé sur aucun de ses points, l'application non expansive  $T : p \mapsto -p$  n'a pas de point fixe. Enfin, la condition de non-expansivité est une forme forte de continuité et, si  $a \in \mathbb{R}^n$  est tel que  $0 < \|a\| \leq 1$ , l'application  $T$  définie par

$$T(p) = \begin{cases} -p & \text{si } p \neq 0 \\ a & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

envoie le fermé, borné, convexe  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  en lui-même et n'a pas de point fixe dans  $E$  puisque  $T(p) = -p \neq p$  si  $p \neq 0$  et  $T(0) = a \neq 0$ .  $T$  n'est pas continue en 0.

On peut dès lors se poser la question de savoir si  $E \subset \mathbb{R}^n$  étant fermé, borné, et étoilé sur un de ses points, l'existence d'un point fixe est assurée pour toute application *continue*  $T : E \rightarrow E$ .

### 3 Pour Brouwer, la continuité suffit

Si  $n = 1$ , un ensemble fermé, borné et étoilé sur un de ses points est un intervalle fermé borné contenant ce point. Pour fixer les idées (on peut remplacer  $[-1, 1]$  par  $[a, b]$  sans changer les raisonnements), soit  $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  une application continue. Le *graphe* de  $T$ ,  $G(T) = \{(p, T(p)) \in \mathbb{R}^2 : p \in E\}$ , est contenu dans le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , et les points fixes de  $T$  sont les points d'intersection de  $G(T)$  avec le segment de diagonale  $D = \{(p, p) : p \in E\}$ .

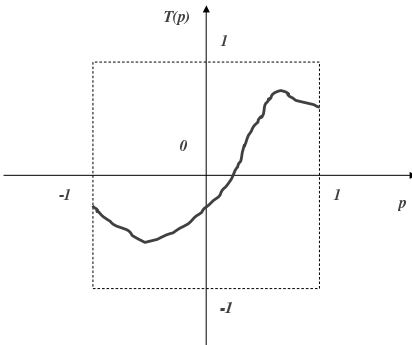


FIGURE 2 — Graphe de  $T$ .

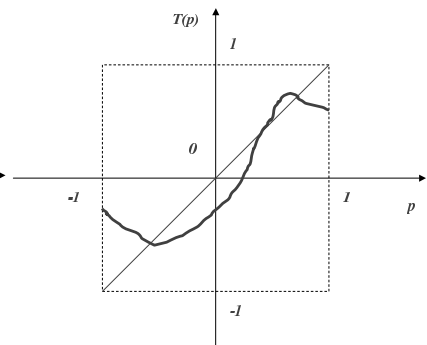


FIGURE 3 — Points fixes de  $T$ .

Comme  $T(-1) \geq -1$ ,  $T(1) \leq 1$ , la fonction continue  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(p) \stackrel{\text{def}}{=} T(p) - p$  est positive en  $-1$  et négative en  $+1$ . Bernhard Bolzano a prouvé en 1817 le résultat suivant.

**Lemme 9.** Si  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et si  $F(-1)F(1) \leq 0$ ,  $F$  s'annule dans  $[-1, 1]$ .





Bolzano (1781-1848)

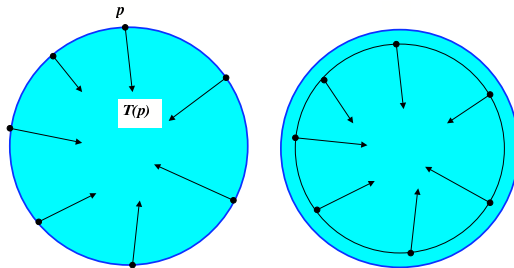
Ce résultat, appliqué à  $F = T - I$  fournit pour  $n = 1$  une réponse positive à la question posée à la fin de la section précédente.

**Proposition 10.** *Toute application continue  $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  a un point fixe.*

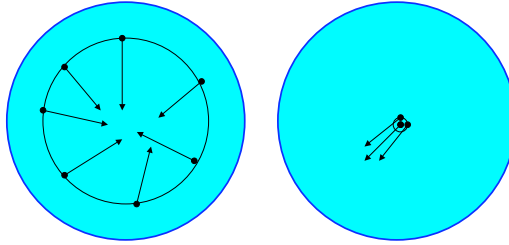
On peut étendre ce résultat au cas où  $n \geq 2$ , mais la preuve est nettement moins élémentaire. Soit  $B^n := \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq 1\}$  la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$ .  $B^1 = [-1, 1]$ ,  $B^2$  est le disque fermé de centre 0 et rayon 1 du plan,  $B^3$  est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de l'espace ordinaire. Brouwer a étendu en 1912 la proposition 10 au cas de  $B^n$ .

**Théorème 11.** *Toute application continue  $T : B^n \rightarrow B^n$  a un point fixe.*

*Idée de preuve.* Il n'existe pas de preuve rigoureuse à la fois simple et courte de ce résultat, et on connaît actuellement une trentaine de démonstrations. Donnons de manière heuristique et pour  $n = 2$  les arguments de l'une d'entre elles. Sans perdre de généralité, on peut se restreindre au cas où  $T(B^2)$  est contenu dans l'intérieur de  $B^2$ . On désigne par  $\partial B^2$  le cercle frontière de  $B^2$ . Si  $T$  n'a pas de point fixe, chaque vecteur joignant  $p \in \partial B^2$  à  $T(p)$  a une longueur non nulle et pointe vers l'intérieur de  $B^2$ , comme sur la première figure ci-dessous. En particulier, si on attache ces vecteurs à une même origine, ils effectuent au moins un tour complet (en les comptant algébriquement selon le sens) lorsque  $p$  fait un tour de  $\partial B^2$ . Par continuité, les vecteurs issus d'un cercle suffisamment proche de  $\partial B^2$  feront de même, comme indiqué sur la deuxième figure.



On continue le processus, pour arriver sur un petit cercle centré à l'origine. Mais, par continuité de  $T$ , si ce cercle est suffisamment petit, tous les vecteurs sont proches en longueur et direction et ont l'allure donnée sur la deuxième figure ci-dessous, ce qui est contradictoire. Donc  $T$  a un point fixe.



□

L'histoire du théorème 11, qu'on appelle *théorème du point fixe de Brouwer*, est assez mouvementée. La motivation initiale de Luitzen Brouwer était de résoudre le problème (ouvert depuis l'existence, par Georg Cantor, de bijections entre  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ ,  $n$  et  $p$  arbitraires) de l'*invariance de la dimension* :  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  sont *homéomorphes* (il existe entre eux une bijection continue ainsi que son inverse) si et seulement si  $n = p$ . Pour prouver ce résultat, Brouwer développa en 1911 le *degré topologique*, une technique féconde qui lui permit aussi, en 1912, de démontrer des théorèmes de point fixe pour des applications continues d'une *sphère* de  $\mathbb{R}^n$  en elle-même. Il en déduisit le théorème 11, dernier résultat de l'article de 1912, sans aucun commentaire ni application. Brouwer n'y revint jamais dans ses travaux ultérieurs. Curieusement, on trouve déjà le théorème 11, sous le nom de *théorème de Brouwer*, dans un appendice de Jacques Hadamard au tome 2 de la deuxième édition de *l'Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* de Jules Tannery, publiée en 1910. Hadamard avait eu connaissance du résultat par une lettre de Brouwer et sa preuve, basée sur une variante du degré topologique, l'*indice de Kronecker*, diffère de celle de Brouwer.



Brouwer (1881-1966)



Hadamard (1865-1963)

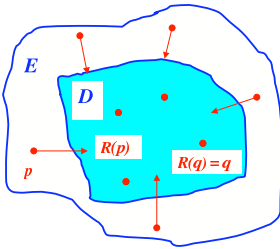
Si  $E$  est homéomorphe à  $B^n$  et  $T : E \rightarrow E$  est continue, alors  $T$  a un point fixe. En effet, si  $H : B^n \rightarrow E$  est un homéomorphisme,  $H^{-1} \circ T \circ H : B^n \rightarrow B^n$ , continue, a un point fixe  $p^* \in B^n$  par le théorème 11, et  $H(p^*) = T[H(p^*)]$ . Le théorème du point fixe de Brouwer est valable pour une boule fermée de rayon et centre quelconques dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $K^n = \{p \in \mathbb{R}^n : |p_j| \leq 1 \ (j = 1, \dots, n)\}$  le *n-cube unité* dans  $\mathbb{R}^n$ .  $K^1 = B^1 = [-1, 1]$ ,  $K^2$  est le carré de centre 0 et de côté 2 du plan et  $K^3$  est le cube de centre zéro et de côté 2 de l'espace usuel. Il est facile de montrer que  $K^n$  est homéomorphe à  $B^n$ , ce qui entraîne le théorème du point fixe de Brouwer pour un *n-cube*.

On va maintenant montrer que l'existence d'un point fixe subsiste pour des ensembles non nécessairement homéomorphes à une boule fermée ou un *n-cube*, dont la définition conduira en outre à une formulation équivalente, peut-être plus intuitive, du théorème du point fixe de Brouwer.

### 4 Des ensembles qui se rétractent

Karel Borsuk a introduit en 1931 l'intéressante notion suivante, qui est une sorte de projection non linéaire.

**Définition 12.** Si  $D \subset E \subset \mathbb{R}^n$ , une *rétraction* de  $E$  sur  $D$  est une application continue  $R : E \rightarrow D$  telle que  $R(p) = p$  pour tout  $p \in D$ . Si une telle rétraction existe,  $D$  est appelé un *rétracte* de  $E$ .



rétraction

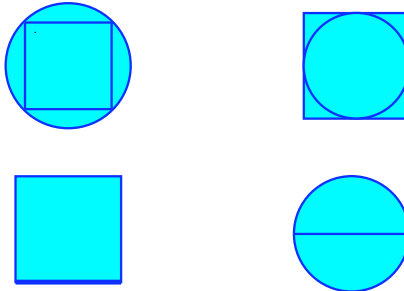


Borsuk (1905-1982)



Bohl (1965-1921)

Les figures ci-dessous suggèrent, et les rétractions correspondantes sont faciles à construire, que *tout n-cube est un rétracte d'une n-boule, toute n-boule est un rétracte d'un n-cube, tout (n-1)-cube est un rétracte d'un n-cube et toute (n-1)-boule est un rétracte d'une n-boule.*



En outre, *tout fermé borné de  $\mathbb{R}^n$  étoilé sur un de ses points est un rétracte d'une n-boule.*

**Définition 13.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  a la *propriété du point fixe (PPF)* si toute application continue  $T : E \rightarrow E$  a un point fixe.

La PPF se conserve par rétraction.

**Proposition 14.** Si  $E \in \mathbb{R}^n$  a la PPF, tout rétracte de  $E$  a la PPF.

*Démonstration.* Soit  $R : E \rightarrow D$  une rétraction et  $T : D \rightarrow D$  une application continue. L'application continue  $T \circ R : E \rightarrow D \subset E$  a un point fixe  $p^*$ , et  $p^* \in D$ . Donc  $p^* = T[R(p^*)] = T(p^*)$  est un point fixe de  $T$ .  $\square$

Comme toute  $n$ -boule a la PPF, il résulte de la proposition 14 que *tout fermé borné étoilé de  $\mathbb{R}^n$  a la PPF.*

L'application antipodale  $p \rightarrow -p$  du cercle en lui-même n'ayant pas de point fixe, *le cercle n'a pas la PPF.* Cela entraîne, par la proposition 14, le résultat suivant.

**Proposition 15.** *La frontière d'un disque n'est pas un rétracte du disque.*

En termes imagés, on ne peut pas ramener la peau d'un tambour sur son cadre sans la déchirer. Afin de généraliser ce résultat en dimension quelconque, définissons pour  $n \geq 0$  la  $n$ -sphère unité par  $\mathbf{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \|p\| = 1\}$ . On a  $\mathbf{S}^n = \partial B^{n+1}$ . Borsuk a prouvé en 1931 les résultats suivants.

**Théorème 16.**  *$\mathbf{S}^n$  n'est pas un rétracte de  $B^{n+1}$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une rétraction  $R : B^{n+1} \rightarrow \mathbf{S}^n$ . En vertu du théorème 11,  $-R : B^{n+1} \rightarrow \mathbf{S}^n \subset B^{n+1}$  a un point fixe  $p^* \in \mathbf{S}^n$ . Par conséquent,  $p^* = -R(p^*) = -p^*$  et donc  $p^* = 0$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

Piers Bohl avait déjà montré en 1904 qu'il n'existe pas d'application de classe  $C^1$  de  $K^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui ne s'annule pas et se réduit à l'identité sur  $\partial K^n$ .

**Théorème 17.** *Le théorème 16 implique le théorème 11.*

*Démonstration.* Si  $T : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$  est continue et sans point fixe, définissons l'application  $R : B^{n+1} \rightarrow \mathbf{S}^n$  comme suit. Pour chaque  $p \in B^{n+1}$ ,  $R(p)$  est l'unique intersection avec  $\mathbf{S}^n$  du prolongement du segment  $[T(p), p]$  au delà de  $p$ . Si  $p \in \mathbf{S}^n$ ,  $R(p) = p$  et  $R$  est une rétraction de  $B^{n+1}$  sur  $\mathbf{S}^n$ .  $\square$

Du point de vue de son contenu topologique, le théorème de non-rétraction de Borsuk est équivalent au théorème du point fixe de Brouwer.

Contrairement au cas des  $n$ -boules, les transformations continues d'une  $n$ -sphère en elle-même n'ont pas nécessairement de point fixe. Ainsi, une rotation (non triviale) du cercle  $\mathbf{S}^1$  n'a ni point fixe, ni point  $p^*$  envoyé sur son antipode  $-p^*$ . C'est le cas de la rotation directe de  $\pi/2$  de  $\mathbf{S}^1$  définie analytiquement par  $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ . Cela entraîne aisément que si  $n$  est impair, la rotation  $T$  de  $\mathbf{S}^n$  définie par  $T(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{n+1}, x_n)$  n'a ni point fixe, ni point envoyé sur son antipode. Par contre, Brouwer a prouvé en 1912 le résultat suivant.

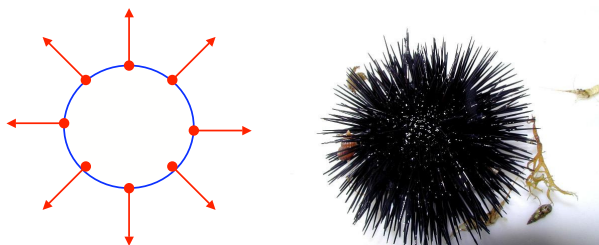
**Théorème 18.** *Si  $n$  est pair, toute application continue  $T : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$  a un point fixe ou un point envoyé sur son antipode.*

En d'autres termes pour  $n$  pair et  $T : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$  continue,  $T$  ou  $-T$  a un point fixe. Rappelons que, par le théorème 11, pour tout  $n$  et  $T : B^n \rightarrow B^n$  continue,  $T$  et  $-T$  ont un point fixe. On peut également montrer que, si  $n$  est pair, toute rotation de  $\mathbf{S}^n$  a un axe fixe. Ainsi, l'étude des rotations dans un espace euclidien peut déceler la parité de sa dimension. Cette parité intervient aussi dans les propriétés des champs de vecteurs sur une  $n$ -sphère.

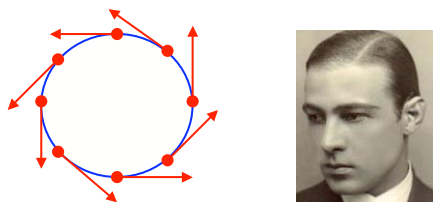
Un champ de vecteurs sur  $E \subset \mathbb{R}^n$  associe à chaque  $p \in E$  un vecteur variant continûment en longueur et direction avec le point d'attache. La figure 4 suggère que  $\mathbf{S}^1$  et  $\mathbf{S}^2$  admettent un champ de vecteurs unitaires normaux.

En associant à chaque  $p \in \mathbf{S}^n$  un vecteur unitaire ayant même direction et sens que le vecteur  $\vec{Op}$ , on voit aisément que, pour tout entier positif  $n$ ,  $\mathbf{S}^n$  admet un champ de vecteurs unitaires normaux. D'une manière imagée, on peut coiffer  $\mathbf{S}^n$  « en brosse » quel que soit  $n$ .

La situation est différente si on veut coiffer  $\mathbf{S}^n$  « à la Valentino », c'est-à-dire avec les cheveux gominés, du nom de l'acteur Rudolf Valentino ci-dessous qui a popularisé au cinéma ce type de coiffure. En termes mathématiques, il s'agit

FIGURE 4 — Champs de vecteurs normaux sur  $S^1$  et sur  $S^2$ .

d'obtenir un champ de vecteurs unitaires *tangents* à  $S^n$ . La figure ci-dessous montre que  $S^1$  admet un champ de vecteurs unitaires tangents. Il suffit de faire tourner de  $\pi/2$  le champ des vecteurs unitaires normaux.



En 1883, Henri Poincaré (pour  $n \leq 2$ ) et en 1912 Brouwer (pour  $n > 2$ ), ont prouvé le résultat suivant.

**Théorème 19.**  $S^n$  admet un champ de vecteurs unitaires tangents si et seulement si  $n$  est impair.

En termes imagés, on ne peut pas coiffer une balle de tennis à la Valentino. Ou encore, toute coiffure à la Valentino de  $S^2$  requiert un cheveu en épi ou une calvitie d'un cheveu (au moins!). Une formulation « physique » du théorème 19 est que, à tout instant sur la Terre, il y a un endroit où le vent est nul.

## 5 Poincaré sait mettre un zéro en boîte

Peut-on formuler et prouver un théorème de Bolzano pour  $n = 2$ ? Rappelons que ce théorème affirme que si  $F : K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  continue a des signes opposés aux points frontières  $-1$  et  $+1$  de  $K^1$ , elle a au moins un zéro dans  $K^1$ . Une tentative d'extension de ce résultat pour  $n = 2$  est la suivante.

**Proposition 20.** Si  $F = (F_1, F_2) : K^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue,  $F_1$  a des signes opposés sur les « côtés verticaux » de  $K^2$ , et  $F_2$  a des signes opposés sur les « côtés horizontaux » de  $K^2$ , alors  $F$  a au moins un zéro dans  $K^2$ .

Les figures 5, 6 et 7 rendent plausible la véracité de cet énoncé. On se ramène facilement au cas où les signes des composantes en question de  $F$  sur les côtés de  $K^2$  sont stricts. Par hypothèse, les images par  $F$  des sommets de  $K^2$  sont situés dans les quadrants indiqués par la figure 5. De même, les images par  $F$  des côtés

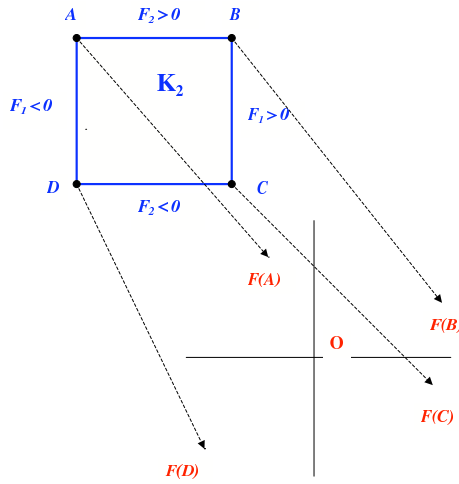


FIGURE 5 — Image par  $F$  des sommets de  $K^2$ .

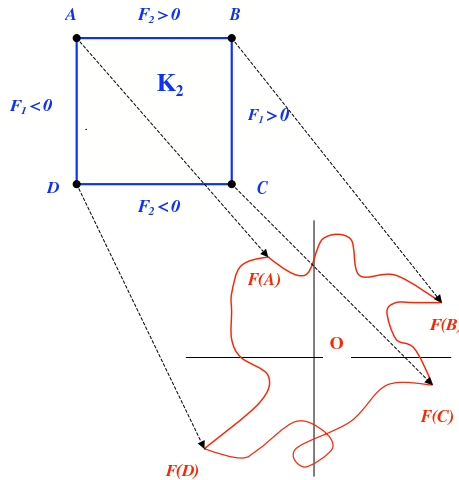
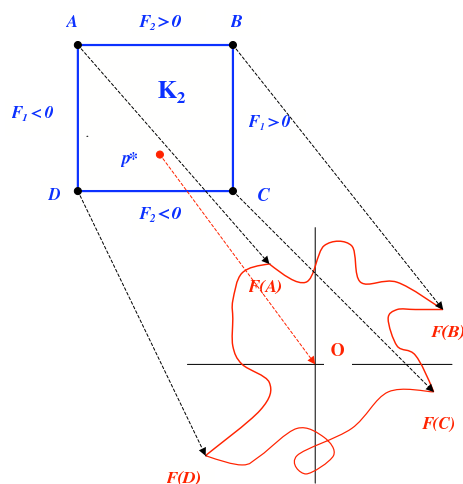


FIGURE 6 — Image par  $F$  des côtés de  $K^2$ .

de  $K^2$  sont situés dans les demi-espaces indiqués par la figure 6 et l'image par  $F$  de  $K^2$  bornée par les images des côtés contient donc  $0$ , comme illustré à la figure 7.

La généralisation  $n$ -dimensionnelle du théorème de Bolzano est la suivante.

**Théorème 21.** *Si  $F : K^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue, et  $F_j$  a des signes opposés lorsque  $p_j = -1$  et  $p_j = +1$  ( $j = 1, \dots, n$ ), alors  $F$  a un zéro dans  $K^n$ .*

FIGURE 7 — L'image par  $F$  contient 0.

L'histoire du théorème 21 est agitée. En 1883, Poincaré, motivé par la recherche de solutions particulières du problème des trois corps, énonce le théorème et en donne une preuve pour  $F \in C^1$ , correcte mais plus que concise, basée sur l'indice de Kronecker, ancêtre du degré topologique. Le résultat tombe presque aussitôt dans l'oubli. En 1940, Silvio Cinquini retrouve l'énoncé du théorème 21 dans ses travaux sur les problèmes aux limites d'équations différentielles d'ordre  $n$ , et en donne une *preuve* insuffisante, aussitôt critiquée par Giuseppe Scorza-Dragoni. En 1941, Carlo Miranda montre que *l'énoncé de Cinquini implique le théorème du point fixe de Brouwer sur le  $n$ -cube*. La preuve est essentiellement celle donnée plus haut lorsque  $n = 1$ . Par un argument un peu plus compliqué mais entièrement élémentaire, Miranda déduit l'énoncé de Cinquini du théorème de Brouwer. Ils sont donc équivalents.



Poincaré (1854-1912)



Miranda (1910-1982)

Entre les années 1941 et 1949, une longue querelle entre Cinquini et Scorza-Dragoni, portant en particulier sur la nature « topologique » ou « analytique » de l'énoncé de Cinquini, est l'occasion pour Scorza-Dragoni d'en donner de nouvelles preuves. En 1974, l'auteur de cet article exhume le travail de Poincaré, et depuis lors, le théorème 21 est en général appelé *théorème de Poincaré-Miranda*. Cet équivalent du théorème du point fixe de Brouwer a donc précédé ce dernier de près de 30 ans. Même Hadamard, qui connaissait bien les théorèmes de Poincaré et de Brouwer, n'a semble-t-il jamais fait le rapprochement.



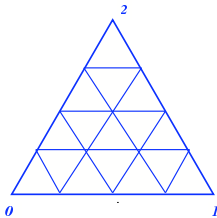
Cinquini (1906-1998)



Scorza-Dragoni (1908-1996)

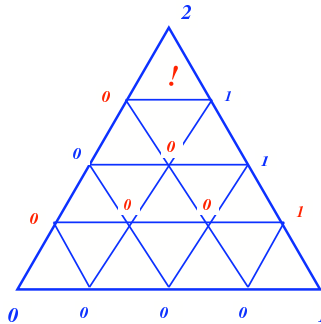
## 6 Le jeu pipé de Sperner

Considérons un grand triangle de sommets 0, 1, 2 (ou n'importe quel autre triple de symboles différents), découpé en petits triangles comme l'indique la figure ci-dessous.



Sperner (1905-1980)

Dans le *jeu de Sperner*, qui se joue à deux, chaque joueur numérote alternativement les sommets des petits triangles avec un symbole pris arbitrairement dans  $\{0, 1, 2\}$ . Le but du premier joueur est d'obtenir un petit triangle de sommets 0, 1, 2 (dans n'importe quel ordre) et celui du deuxième joueur est qu'aucun des petits triangles ne soit numéroté de la sorte. La seule restriction dans le choix des joueurs est que les sommets des petits triangles situés sur les côtés du grand triangle ne peuvent être numérotés que par les chiffres des extrémités du côté. La figure 8 montre un exemple d'une fin de partie gagnée par le premier joueur.

FIGURE 8 — Une fin de partie du *jeu de Sperner*.

Quelques parties montrent que le premier joueur gagne toujours, quelle que soit sa manière de jouer, et quelle que soit l'habileté du second joueur. L'explication se trouve dans un résultat mathématique.



Posons  $e^0 = (0, \dots, 0)$ ,  $e^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  ( $1 \leq j \leq n$ ), et définissons le  $n$ -simplexe  $T^n$  par

$$T^n = \{p \in \mathbb{R}^n : p_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n), p_1 + \dots + p_n \leq 1\}.$$

$T^1 = [0, 1]$ ,  $T^2$  est le triangle de sommets  $e^0, e^1, e^2$  du plan,  $T^3$  est le tétraèdre de sommets  $e^0, e^1, e^2, e^3$  de l'espace usuel. On voit aisément que  $T^n$  est un rétracte d'une  $n$ -boule ou d'un  $n$ -cube, et que  $B^n$  et  $K^n$  sont rétractes d'un  $n$ -simplexe. On étend le jeu de Sperner à un  $n$ -simplexe dont les sommets sont numérotés par  $0, 1, 2, \dots, n$ , en imposant que le nombre soit pris dans  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  si le sommet appartient à l'enveloppe convexe de  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ . Emanuel Sperner a prouvé en 1928 le résultat suivant.

**Lemme 22.** *Quel que soit le nombre de petits  $n$ -simplexes d'une subdivision de  $T^n$ , le jeu de Sperner conduit à un petit  $n$ -simplexe numéroté par  $0, 1, 2, \dots, n$ .*

Ce lemme de Sperner, purement combinatoire, et prouvé par récurrence sur  $n$ , fut motivé par l'obtention d'une preuve de l'invariance de la dimension plus simple que celle de Brouwer.

En 1929, Bronislaw Knaster, Kazimierz Kuratowski et Stefan Mazurkiewicz ont démontré le théorème du point fixe de Brouwer à partir du lemme de Sperner. L'histoire est la suivante. En 1929, leur collègue Witold Hurewicz expose le lemme de Sperner au séminaire de topologie à Varsovie. Knaster suggère d'essayer d'en déduire le théorème du point fixe de Brouwer, Mazurkiewicz fournit une preuve incorrecte et Kuratowski en donne une preuve correcte. La méthode introduite à cette occasion a de nombreuses applications et ramifications, sous le nom de *méthode KKM*. Elle est à la base d'un *algorithme de calcul approché* des points fixes (Scarf, 1967). En 1974, Yoseloff a montré qu'à son tour le lemme de Sperner pouvait se déduire du théorème du point fixe de Brouwer.



Knaster (1893-1980)



Kuratowski (1896-1980)



Mazurkiewicz (1888-1945)

## 7 Un équilibre pour jeux non coopératifs

Les théorèmes de point fixe sont fondamentaux en théorie des jeux. Considérons un *jeu non-coopératif* à 3 joueurs, disposant chacun de deux stratégies utilisées avec une certaine probabilité. La *fonction de gain*  $f_i(p_1, p_2, p_3)$  du joueur  $i$  dépend dès lors de trois variables  $0 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et on la suppose continue ( $i = 1, 2, 3$ ). John Nash a introduit en 1950 la définition suivante.

**Définition 23.** Un *équilibre* du jeu est un  $(p_1^*, p_2^*, p_3^*)$  tel que

$$f_1(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \max_{p_1} f_1(p_1, p_2^*, p_3^*),$$

$$f_2(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \max_{p_2} f_2(p_1^*, p_2, p_3^*),$$

$$f_3(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \max_{p_3} f_3(p_1^*, p_2^*, p_3).$$

À l'équilibre, chaque joueur maximise son gain sous l'hypothèse que les autres font de même. On suppose que pour chaque  $(p_j, p_k)$  fixés ( $j \neq k \neq i$ ),  $f_i$  est concave en  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), c'est-à-dire, pour  $f_1$  par exemple,

$$f_1[(1-\lambda)p_1 + \lambda q_1, p_2, p_3] \geq (1-\lambda)f_1(p_1, p_2, p_3) + \lambda f_1(q_1, p_2, p_3)$$

pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ . La généralisation à  $n$  joueurs est directe. Nash a prouvé en 1950 le résultat suivant.

**Théorème 24.** *Tout jeu non-coopératif à  $n$  joueurs admet un équilibre.*

*Démonstration.* L'idée de la démonstration est la suivante (pour  $n = 3$ ). Sans perte de généralité, on suppose que chaque  $f_i$  est strictement concave par rapport à  $p_i$ , pour  $(p_j, p_k)$  fixé. En conséquence,  $\max_{p_i} f_i$  pour  $(p_j, p_k)$  fixé est atteint en un seul point noté  $T_i(p_j, p_k)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). On définit  $T : [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]^3$  par

$$T(p_1, p_2, p_3) = [T_1(p_2, p_3), T_2(p_1, p_3), T_3(p_1, p_2)].$$

Par le théorème du point fixe de Brouwer,  $T$  a un point fixe  $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) \in [0, 1]^3$ . En conséquence,

$$f_1(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = f_1[T_1(p_2^*, p_3^*), p_2^*, p_3^*] = \max_{p_1} f_1(p_1, p_2^*, p_3^*),$$

$$f_2(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = f_2[p_1^*, T_2(p_1^*, p_3^*), p_3^*] = \max_{p_2} f_2(p_1^*, p_2, p_3^*),$$

$$f_3(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = f_3[p_1^*, p_2^*, T_3(p_1^*, p_2^*)] = \max_{p_3} f_3(p_1^*, p_2^*, p_3),$$

et  $(p_1^*, p_2^*, p_3^*)$  est un équilibre de Nash.  $\square$

Si  $n = 2$ , le théorème de Nash se réduit au *théorème de minimax* énoncé et prouvé par John von Neumann en 1928. Nash a partagé le *prix Nobel d'économie* 1994 avec John Harsanyi et Reinhard Selten « pour leur analyse pionnière des équilibres dans la théorie des jeux non coopératifs. »



von Neumann (1903-1957)



Nash (1928)

## 8 Égalité aux antipodes et partage équitable

Soit  $T : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. En passant aux coordonnées polaires sur  $\mathbf{S}^1$ , on peut écrire  $T(p) = T[(\cos \theta, \sin \theta)]$ . Si  $q = (\cos \theta, \sin \theta)$ , son antipodal  $-q$  a pour composantes  $(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))$ . La fonction continue  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} T[(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))] - T[(\cos \theta, \sin \theta)]$  est telle que

$$F(0) = T[(-1, 0)] - T[(1, 0)], \quad F(\pi) = T[(1, 0)] - T[(-1, 0)] = -F(0).$$

Le théorème de Bolzano entraîne l'existence d'un  $\theta^* \in [0, \pi]$  tel que  $F(\theta^*) = 0$ , et donc tel que  $T(\cos(\theta^* + \pi), \sin(\theta^* + \pi)) = T(\cos \theta^*, \sin \theta^*)$ . En posant  $p^* = (\cos \theta^*, \sin \theta^*)$ , on a donc prouvé que si  $T : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, il existe un  $p^* \in S^1$  tel que  $T(p^*) = T(-p^*)$ . Une formulation « physique » de ce résultat est que chaque méridien terrestre contient deux points antipodaux où la température est la même, et deux points antipodaux où la pression est la même. En 1933, Borsuk a prouvé l'extension  $n$ -dimensionnelle de ce résultat, conjecturée par Stanislaw Ulam. Pour  $n > 1$ , ce théorème de Borsuk-Ulam n'est plus une conséquence du théorème du point fixe de Brouwer, mais il l'implique.

**Théorème 25.** Si  $T : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue, il existe  $p^* \in S^n$  tel que  $T(p^*) = T(-p^*)$ .

Une formulation « physique » de ce théorème de Borsuk-Ulam pour  $n = 2$  est que, sur la Terre, il existe deux points antipodaux ayant même température et même pression atmosphérique.

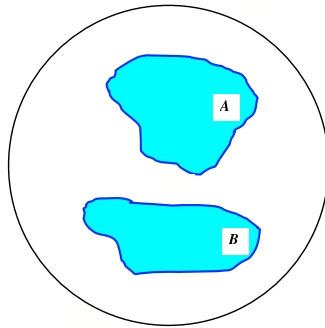


Ulam (1909-1984)

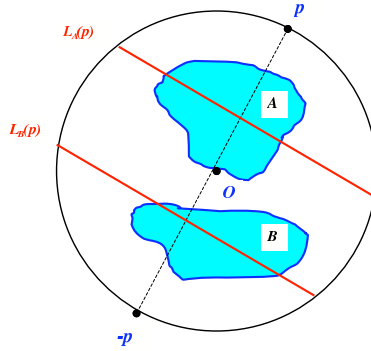


Steinhaus (1887-1972)

Le théorème de Borsuk-Ulam pour  $n = 1$  permet de résoudre le problème du découpage équitable des crêpes, cas particulier d'un problème posé par Hugo Steinhaus. Il s'agit de couper équitablement deux crêpes A et B de formes quelconques d'un seul coup de couteau. Équitablement signifie que chaque crêpe est divisée en deux morceaux d'aires égales. Sans perte de généralité, disposons les deux crêpes à l'intérieur de  $B^2$ .



Pour chaque  $p \in S^1$ , soit  $L_A(p)$  (resp.  $L_B(p)$ ) le segment de droite, perpendiculaire au segment  $[p, -p]$ , qui partage équitablement la crêpe A (resp. B). Leur existence résulte du théorème de Bolzano et d'hypothèses raisonnables de mesurabilité de A et B. Soit  $f_A(p)$  (resp.  $f_B(p)$ ) la distance de  $p$  à  $L_A(p)$  (resp.  $L_B(p)$ ). C'est une fonction continue.



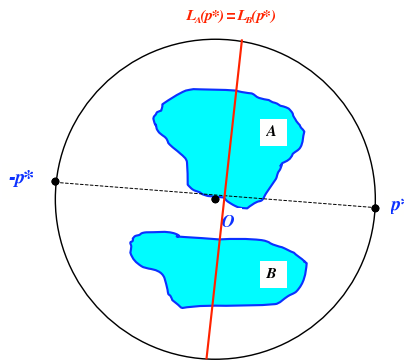
Il est facile de voir que, pour tout  $p \in \mathbf{S}^1$ ,

$$f_B(p) - f_A(p) = f_A(-p) - f_B(-p). \quad (4)$$

Par le théorème de Borsuk-Ulam pour  $n = 1$ , il existe  $p^* \in \mathbf{S}^1$  tel que

$$f_B(p^*) - f_A(p^*) = f_B(-p^*) - f_A(-p^*). \quad (5)$$

Additionnant membre à membre (4) en  $p = p^*$  et (5), on obtient  $f_B(p^*) - f_A(p^*) = 0$  et le découpage selon  $L_A(p^*)$  fournit la solution.



D'une manière similaire, le théorème général de Borsuk-Ulam permet de découper équitablement  $n$  solides dans  $\mathbb{R}^n$  par un seul hyperplan.

## 9 Les surprises de la dimension infinie

Désignons par  $\mathbb{R}^\infty$  l'ensemble des suites infinies  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que la série  $\sum_{k=1}^{\infty} x_j^2$  converge. On peut le munir de la norme  $\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} x_j^2)^{1/2}$ , associée au produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ , qui en fait une généralisation naturelle de l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Par analogie, on y définit la *boule*  $B^\infty = \{x \in \mathbb{R}^\infty : \|x\| \leq 1\}$  et la *sphère* correspondante  $\mathbf{S}^\infty = \{x \in \mathbb{R}^\infty : \|x\| = 1\}$ .

En réponse à une question d'Ulam sur l'existence d'une rétraction de  $B^\infty$  sur  $S^\infty$ , Andrei N. Tikhonov a introduit en 1935 l'application continue  $T : B^\infty \rightarrow B^\infty$  définie par

$$T_1(x) = (1 - \|x\|^2)^{1/2}, T_2(x) = x_1, T_3(x) = x_2, \dots$$

Elle est sans point fixe, car si  $x^* = T(x^*)$ , alors d'une part

$$\|x^*\| = \|T(x^*)\| = (1 - \|x^*\|^2 + \|x^*\|^2)^{1/2} = 1,$$

et d'autre part

$$x_1^* = (1 - \|x^*\|^2)^{1/2} = 0, x_2^* = x_1^* = 0, x_3^* = x_2^* = 0, \dots$$

ce qui est contradictoire. En généralisant la construction de Borsuk en dimension finie, on en déduit que l'application continue  $R : B^\infty \rightarrow S^\infty$  définie par

$$R(x) = \frac{(\|x\|^2 - 1)T(x) + 2(1 - \langle x, T(x) \rangle)x}{\|x\|^2 - 2\langle x, T(x) \rangle + 1}$$

est une rétraction de  $B^\infty$  sur  $S^\infty$ . Les tambours sont bien étranges dans  $\mathbb{R}^\infty$ .

Pourtant, tout n'est pas perdu dans une quête de théorie des points fixes en dimension infinie. Le « cube » de Hilbert est défini dans  $\mathbb{R}^\infty$  par

$$P^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : -\frac{1}{j} \leq x_j \leq \frac{1}{j} \quad (j = 1, 2, \dots) \right\}.$$

Une suite d'applications du théorème de points fixe de Brouwer dans des sous-espaces de dimension finie de plus en plus grands permet de montrer que toute transformation continue de  $P^\infty$  en lui-même a un point fixe. La raison sous-jacente est que  $P^\infty$  est un convexe compact de  $\mathbb{R}^\infty$ , alors que  $B^\infty$  est un convexe fermé, borné mais non compact de  $\mathbb{R}^\infty$ . Dans  $\mathbb{R}^n$ , les compacts sont les fermés bornés, et  $B^n$  est un compact convexe. Dans  $\mathbb{R}^\infty$ , les fermés bornés ne sont pas nécessairement compacts, et en particulier  $B^\infty$  ne l'est pas. Si l'on se figure les compacts dans  $\mathbb{R}^n$  comme des mottes de beurre, on doit se représenter les compacts dans  $\mathbb{R}^\infty$  comme de très fines tranches de fromage.

En 1930, Juliusz Schauder a généralisé le théorème du point fixe de Brouwer aux espaces vectoriels normés (en particulier aux espaces de Banach).

**Théorème 26.** *Toute application continue d'un compact convexe d'un espace vectoriel normé en lui-même a un point fixe.*

Dès 1922, pour prouver l'existence de solutions d'équations différentielles, aux dérivées partielles ou intégrales, George D. Birkhoff et Oliver Kellogg avaient étendu le théorème du point fixe de Brouwer à une application continue d'un compact convexe de  $C([a, b])$  et  $L^2([a, b])$  en lui-même. En 1935, Tikhonov généralisera le résultat de Schauder à un compact convexe d'un espace vectoriel localement convexe. Malgré de nombreuses tentatives, le cas d'un espace vectoriel topologique général semble toujours ouvert.



Birkhoff  
(1884-1944)



Kellogg  
(1878-1932)



Schauder  
(1899-1944)



Tikhonov  
(1906-1993)

## 10 Pour conclure et pour en savoir plus

Les théorèmes de point fixe sont au confluent de nombreuses disciplines mathématiques. Associés à des problèmes fondamentaux de topologie, comme l'invariance de la dimension, ils sont indispensables à la résolubilité d'équations et d'inéquations de types variés. Ils ont des applications importantes en théorie des jeux et en économie, mais aussi en programmation, en analyse fonctionnelle (espaces invariants, dimension), en théorie du contrôle, en calcul des variations, en géométrie des corps convexes, en analyse numérique (méthodes simpliciales), en calcul des probabilités (processus de Markoff, matrices stochastiques), ainsi qu'en mécanique, physique, chimie, biologie, démographie, ... En 2008, on dénombre près de 2000 articles liés aux point fixes.

Les théorèmes de point fixe sont liés à ou motivés par un mélange de questions d'apparence futile et de questions d'apparence sérieuse, et leur étude a autant contribué à « *l'honneur de l'esprit humain* » qu'à la « *connaissance de la nature* ». Les mathématiques contemporaines ne cessent de réconcilier Jacobi et Fourier. La théorie des points fixes en est un éloquent exemple.

Pour en savoir un peu plus sur les points fixes et leur histoire, en restant dans l'esprit et au niveau de cet article, on peut consulter

- J. Mawhin, Le théorème des indéboullonnables, *Pour la science* **304** (février 2003), 64–73.
- J. Mawhin, Autour du théorème du point fixe, *Revue des questions scientifiques* **177** (2006), 26–44.
- J. Mawhin, Le théorème du point fixe de Brouwer : un siècle de métamorphoses, *Sciences & techniques en perspective* (2) **10** (2006), 133–178.

Une preuve analytique unifiée de plusieurs théorèmes décrits dans cet article se trouve dans

- J. Mawhin, Simple proofs of various fixed point and existence theorems based on exterior calculus, *Math. Nachrichten* **278** (2005), 1607–1614

L'application des théorèmes de point fixe au problème des bissectrices est décrite dans

- G. Dinca and J. Mawhin, A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths, *Bull. Belgian Math. Soc.* **17** (2010), 333–341.

Pour en savoir beaucoup plus sur les points fixes, on consultera le riche traité

- A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, New York, 2003

et son abondante bibliographie.

## A Preuve du théorème de Brouwer dans $B^2$

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  est de classe  $C^1$ , on définit la forme différentielle  $df$  dans  $\Omega$  par

$$df = \sum_{j=1}^2 \partial_j f \, dx_j.$$

Soit  $\omega = \sum_{j=1}^2 f_j \, dx_j$  la forme différentielle dans  $\Omega$  associée aux fonctions continues  $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ). Si les  $f_j$  sont de classe  $C^1$  et si  $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ , on dit que  $\omega$  est fermée dans  $\Omega$ .

Si  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert et  $g : \Delta \rightarrow \Omega$ ,  $y \mapsto g(y) = (g_1(y), g_2(y))$  de classe  $C^1$ , la transformée  $g^* \omega$  de  $\omega$  par  $g$  est la forme différentielle dans  $\Delta$  définie par

$$g^* \omega = \sum_{j=1}^2 (f_j \circ g) \, dg_j,$$

avec  $dg_j = \sum_{k=1}^2 \partial_k g_j \, dy_k$  ( $j = 1, 2$ ).

Soit  $F : \Delta \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ ,  $(y, \lambda) \mapsto [F_1(y, \lambda), F_2(y, \lambda)]$  de classe  $C^1$  et

$$F(\cdot, \lambda)^* \omega = \sum_{j=1}^2 [f_j \circ F(\cdot, \lambda)] \, dF_j(\cdot, \lambda) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 [f_j \circ F(\cdot, \lambda)] \partial_k F_j(\cdot, \lambda) \, dy_k.$$

On définit la forme différentielle  $\partial_\lambda [F(\cdot, \lambda)^* \omega]$  par

$$\partial_\lambda [F(\cdot, \lambda)^* \omega] = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \partial_\lambda \{ [f_j \circ F(\cdot, \lambda)] \partial_k F_j(\cdot, \lambda) \} \, dy_k.$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_\lambda [F(\cdot, \lambda)^* \omega] &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{j=1}^2 [\partial_\lambda (f_j \circ F) \partial_k F_j + (f_j \circ F) \partial_\lambda \partial_k F_j] \right\} \, dy_k \\ &= \sum_{j=1}^2 \partial_\lambda (f_j \circ F) \, dF_j + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (f_j \circ F) \partial_k \partial_\lambda F_j \, dy_k \\ &= \sum_{j=1}^2 \partial_\lambda (f_j \circ F) \, dF_j + \sum_{j=1}^2 (f_j \circ F) \, d(\partial_\lambda F_j). \end{aligned}$$

Soit  $B^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| \leq 1\}$ ,  $S^1 = \partial B^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| = 1\}$ . On définit l'intégrale de  $\omega$  sur  $S^1$  par

$$\int_{S^1} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} [f_1(\cos t, \sin t)(-\sin t) + f_2(\cos t, \sin t)(\cos t)] \, dt.$$

**Lemme 27.** Si la forme  $\omega$  est fermée dans  $\Omega$  et si  $F : \Delta \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  est de classe  $C^1$  dans  $\Delta \times [0, 1]$ , alors

$$\partial_\lambda[F^*(\cdot, \lambda)\omega] = dG(\cdot, \lambda),$$

avec  $G : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$G = \sum_{j=1}^2 (f_j \circ F)(\partial_\lambda F_j)$$

et l'application  $\lambda \mapsto \int_{S^1} F^*(\cdot, \lambda)\omega$  est constante sur  $[0, 1]$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \partial_\lambda[F^*(\cdot, \lambda)\omega] &= \sum_{j=1}^2 \left[ \sum_{k=1}^2 (\partial_k f_j \circ F) \partial_\lambda F_k \right] dF_j + \sum_{j=1}^2 (f_j \circ F) d(\partial_\lambda F_j) \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[ \sum_{k=1}^2 (\partial_j f_k \circ F) \partial_\lambda F_k \right] dF_j + \sum_{j=1}^2 (f_j \circ F) d(\partial_\lambda F_j) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{j=1}^2 (\partial_j f_k \circ F) dF_j \right] \partial_\lambda F_k + \sum_{j=1}^2 (f_j \circ F) d(\partial_\lambda F_j) \\ &= \sum_{k=1}^2 d[f_k \circ F](\partial_\lambda F_k) + \sum_{k=1}^2 (f_k \circ F) d(\partial_\lambda F_k) = dG(\cdot, \lambda). \end{aligned}$$

On a dès lors, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \int_{S^1} F^*(\cdot, \lambda)\omega &= \int_{S^1} \partial_\lambda[F^*(\cdot, \lambda)\omega] = \int_{S^1} dG(\cdot, \lambda) = \int_{S^1} \sum_{j=1}^2 \partial_j G(\cdot, \lambda) dy_j \\ &= \int_0^{2\pi} [\partial_1 G(\cos t, \sin t, \lambda)(-\sin t) + \partial_2 G(\cos t, \sin t, \lambda)(\cos t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} [G(\cos t, \sin t, \lambda)] dt \\ &= G(\cos 2\pi, \sin 2\pi, \lambda) - G(\cos 0, \sin 0, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

□

**Preuve du théorème 11 pour  $n = 2$**  Si  $T$  n'a pas de point fixe dans  $B^2$ , alors  $T(\lambda y) - \lambda y \neq 0$  dans  $S^1 \times [0, 1]$  et il existe  $\delta_1 > 0$  tel que  $\|T(\lambda y) - \lambda y\| \geq \delta_1$  pour tout  $(y, \lambda) \in S^1 \times [0, 1]$ . Puisque  $\|y - \lambda T(y)\| \geq \|y\| - \lambda \|T(y)\| \geq 1 - \lambda > 0$  pour  $y \in S^1 \times [0, 1]$ , il existe  $\delta_2 > 0$  tel que  $\|\lambda T(y) - y\| \geq \delta_2$  pour tout  $(y, \lambda) \in S^1 \times [0, 1]$ . Soit  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe un



polynôme  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $\|T(y) - P(y)\| \leq \delta/2$  pour tout  $y \in \mathbf{S}^1$ . Dès lors, pour tout  $(y, \lambda) \in \mathbf{S}^1 \times [0, 1]$ , si  $F(y, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} P(\lambda y) - \lambda y$  et  $G(y, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda P(y) - y$ ,

$$\begin{aligned} \|F(y, \lambda)\| &= \|P(\lambda y) - \lambda y\| \geq \|T(\lambda y) - \lambda y\| - \|P(\lambda y) - T(\lambda y)\| \geq \delta/2, \\ \|G(y, \lambda)\| &= \|\lambda P(y) - y\| \geq \|\lambda T(y) - y\| - \|\lambda P(y) - \lambda T(y)\| \geq \delta/2. \end{aligned}$$

Il existe donc un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{S}^1$  tel que  $F, G : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . La forme différentielle  $\sigma = -x_2 \|x\|^{-2} dx_1 + x_1 \|x\|^{-2} dx_2$  est de classe  $C^\infty$  et fermée dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  car  $\partial_2(-x_2 \|x\|^{-2}) = (x_2^2 - x_1^2) \|x\|^{-4} = \partial_1(x_1 \|x\|^{-2})$ . Par le lemme 27,  $\int_{\mathbf{S}^1} F(\cdot, \lambda)^* \sigma$  est constante sur  $[0, 1]$  et donc égale à  $\int_{\mathbf{S}^1} F^*(\cdot, 0) \sigma = 0$ , puisque  $F = P(0)$  est constante. De même,  $\int_{\mathbf{S}^1} G(\cdot, \lambda)^* \sigma$  est égale à

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{S}^1} G(\cdot, 0)^* \sigma &= \int_{\mathbf{S}^1} (-I)^* \sigma = \int_{\mathbf{S}^1} \left[ y_2 \|y\|^{-2} (-dy_1) - (-y_1 \|y\|^{-2} (-dy_2)) \right] \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

On a donc, en  $\lambda = 1$ , la contradiction  $0 = \int_{\mathbf{S}^1} F(\cdot, 1)^* \sigma = \int_{\mathbf{S}^1} G(\cdot, 1)^* \sigma = 2\pi$ .  $\square$

*Remarque 28.* Puisque  $F(\cdot, 1) = G(\cdot, 1)$ , on peut encore interpréter la contradiction comme suit : si  $T(y) \neq y$  pour tout  $x \in B^2$ , alors, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\int_{\partial B[\lambda]} F(\cdot, 1)^* \sigma = 0,$$

alors que, par l'autre calcul,  $\int_{\partial B[1]} F(\cdot, 1)^* \sigma = 2\pi$ . La preuve justifie donc l'argument heuristique donné dans la section 3.

