

Carreler la sphère est impossible

Benoît Van Vaerenbergh

 **UCLouvain**

Institut de recherche
en mathématique et physique

Brussels Summer School of Mathematics 2023

Carreler la sphère

- = **juxtaposer** des carrés sur la sphère le long de leurs côtés.
- Les carrés sont *petits devant le rayon de la sphère*

Exemple

| La boule à facettes, « boule disco »

Ne semble pas faisable.

Début de carrelage de la sphère



Carreler la sphère

- = **juxtaposer** des carrés sur la sphère le long de leurs côtés.
- Les carrés sont *petits devant le rayon de la sphère*

Début de carrelage de la sphère

Exemple

| La boule à facettes, « boule disco »

Ne semble pas faisable.

Carrelage : pourquoi veut-on carreler la sphère ?

Carrelabilité des surfaces

- = nouvel invariant des surfaces ?
- Motivation mathématique

Maillage de surface

Maillage de surface

- On veut **mailler** des surfaces avec des triangles provenant de carrés (Pr Jean-François Remacle)
- Automatisation ?

Carrelage : pourquoi veut-on carreler la sphère ?

Carrelabilité des surfaces

- = nouvel invariant des surfaces ?
- Motivation mathématique

Maillage de surface

- On veut **mailler** des surfaces avec des triangles provenant de carrés (Pr Jean-François Remacle)
- Automatisation ?

Maillage de surface



Carrelage : pourquoi veut-on carreler la sphère ?

Carrelabilité des surfaces

- = nouvel invariant des surfaces ?
- Motivation mathématique

Maillage de surface

- On veut **mailler** des surfaces avec des triangles provenant de carrés (Pr Jean-François Remacle)
- Automatisation ?

Maillage de surface



« $\square = +$ »

- la croix a les mêmes symétries que le carré
- les champs de croix codent complètement le carrelage
- interpoler

Croix tangentes

- Croix = 4 vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ perpendiculaires
- $p \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
- Croix tangente $\iff (v_i|p) = 0$,

Slogan

| Une surface est carrelable si et seulement si elle admet un champ de croix tangent.

« $\square = +$ »

- la croix a les mêmes symétries que le carré
- les champs de croix codent complètement le carrelage
- interpoler

Croix tangentes

- Croix = 4 vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ perpendiculaires
- $p \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
- Croix tangente $\iff (v_i|p) = 0$,

Slogan

| Une surface est carrelable si et seulement si elle admet un champ de croix tangent.

Carrelage : quelles obstructions ?

Champs de croix \rightarrow Champs de vecteurs

Champ de croix : difficile de faire des calculs. Champ de vecteur : calcul vectoriel disponible

Lemme

Sur la sphère, il existe un champ de croix tangent continu si et seulement si il existe un champ de vecteurs tangents, continu et de norme unité.

Champ de vecteurs tangents, continu et de norme unité $v(p)$

Pour tout $p \in \mathbb{S}^2$,

- $v(p) \in \mathbb{R}^3$
- $(v(p)|p) = 0$
- $p \in \mathbb{S}^2 \mapsto v(p)$ continue
- $|v(p)|_2 = 1$

Théorème de la boule chevelue/ du hérisson

Proposition

| Il n'existe pas de champ de vecteurs tangents, continu et de norme unité sur la sphère.

Corollaire

| Il n'existe pas de champ de vecteurs tangents, continu et *qui ne s'annule pas* sur la sphère.

Idée de la preuve de la proposition

- Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel champ de vecteurs v
- On va alors construire deux courbes $\gamma_{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $\gamma_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ qu'on va déformer le long d'un paramètre $t \in [-1, 1]$.
- La contradiction viendra du fait qu'une courbe tourne dans un sens et l'autre dans l'autre sens.

Théorème de la boule chevelue/ du hérisson

Proposition

| Il n'existe pas de champ de vecteurs tangents, continu et de norme unité sur la sphère.

Corollaire

| Il n'existe pas de champ de vecteurs tangents, continu et *qui ne s'annule pas* sur la sphère.

Idée de la preuve de la proposition

- Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel champ de vecteurs v
- On va alors construire deux courbes $\gamma_{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $\gamma_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ qu'on va déformer le long d'un paramètre $t \in [-1, 1]$.
- La contradiction viendra du fait qu'une courbe tourne dans un sens et l'autre dans l'autre sens.

Théorème de la boule chevelue/ du hérisson

Proposition

| Il n'existe pas de champ de vecteurs tangents, continu et de norme unité sur la sphère.

Corollaire

| Il n'existe pas de champ de vecteurs tangents, continu et *qui ne s'annule pas* sur la sphère.

Idée de la preuve de la proposition

- Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel champ de vecteurs v
- On va alors construire deux courbes $\gamma_{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $\gamma_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ qu'on va déformer le long d'un paramètre $t \in [-1, 1]$.
- La contradiction viendra du fait qu'une courbe tourne dans un sens et l'autre dans l'autre sens.

Preuve de la proposition

- position $p(\theta, t) \doteq (\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t)$
- Vecteur qui pointe vers l'est $e(\theta, t) \doteq (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- Vecteur qui pointe vers le nord $n(\theta, t) \doteq (-t \cos \theta, -t \sin \theta, \sqrt{1-t^2})$

Lemme

$$\left| \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \gamma_t(\theta) \wedge \dot{\gamma}_t(\theta) d\theta = 0. \right.$$

Dégré de $\gamma \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$

$$\left| \deg(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\theta) \wedge \dot{\gamma}(\theta) d\theta. \right.$$

Preuve de la proposition

- position $p(\theta, t) \doteq (\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t)$
- Vecteur qui pointe vers l'est $e(\theta, t) \doteq (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- Vecteur qui pointe vers le nord $n(\theta, t) \doteq (-t \cos \theta, -t \sin \theta, \sqrt{1-t^2})$

Lemme

$$\left| \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \gamma_t(\theta) \wedge \dot{\gamma}_t(\theta) d\theta = 0. \right.$$

Dégré de $\gamma \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$

$$\left| \deg(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\theta) \wedge \dot{\gamma}(\theta) d\theta. \right.$$

Preuve de la proposition

- position $p(\theta, t) \doteq (\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t)$
- Vecteur qui pointe vers l'est $e(\theta, t) \doteq (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- Vecteur qui pointe vers le nord $n(\theta, t) \doteq (-t \cos \theta, -t \sin \theta, \sqrt{1-t^2})$

Lemme

$$\left| \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \gamma_t(\theta) \wedge \dot{\gamma}_t(\theta) d\theta = 0. \right.$$

Dégré de $\gamma \in C^1(S^1, S^1)$

$$\left| \deg(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\theta) \wedge \dot{\gamma}(\theta) d\theta. \right.$$

Preuve de la proposition

- position $p(\theta, t) \doteq (\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t)$
- Vecteur qui pointe vers l'est $e(\theta, t) \doteq (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- Vecteur qui pointe vers le nord $n(\theta, t) \doteq (-t \cos \theta, -t \sin \theta, \sqrt{1-t^2})$

Lemme

$$\left| \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \gamma_t(\theta) \wedge \dot{\gamma}_t(\theta) d\theta = 0. \right.$$

Dégré de $\gamma \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$

$$\left| \deg(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\theta) \wedge \dot{\gamma}(\theta) d\theta. \right.$$

Lemme

$$\left| \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \gamma_t(\theta) \wedge \dot{\gamma}_t(\theta) d\theta = 0. \right.$$

Hypothèse : $(t, \theta) \mapsto \gamma_t(\theta)$ est lisse.

Allons plus loin : le théorème de Poincaré–Hopf

- 1 Est-ce propre à la sphère ?
- 2 Est-il possible de n'avoir qu'un seul zéro ?

Théorème

Si v est un champ de vecteurs tangents à une surface fermée (Riemannienne compacte sans bord) S qui s'annule uniquement en $k \in \mathbb{N}$ points distincts $a_1, \dots, a_k \in S$, alors,

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^k \deg(v, a_i).$$

- 1 La *caractéristique d'Euler* $\chi(S)$ de la surface. « $\chi(S) = 2 - 2\#$ de trous de S »
- 2 Le degré d'un champs de vecteur v en a_i (on parle souvent d'indice), $\deg(v, a_i)$

Allons plus loin : le théorème de Poincaré–Hopf

- 1 Est-ce propre à la sphère ?
- 2 Est-il possible de n'avoir qu'un seul zéro ?

Théorème

Si v est un champ de vecteurs tangents à une surface fermée (Riemannienne compacte sans bord) S qui s'annule uniquement en $k \in \mathbb{N}$ points distincts $a_1, \dots, a_k \in S$, alors,

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^k \deg(v, a_i).$$

- 1 La *caractéristique d'Euler* $\chi(S)$ de la surface. « $\chi(S) = 2 - 2\#$ de trous de S »
- 2 Le degré d'un champs de vecteur v en a_i (on parle souvent d'indice), $\deg(v, a_i)$

- 1 Est-ce propre à la sphère ?
- 2 Est-il possible de n'avoir qu'un seul zéro ?

Théorème

Si v est un champ de vecteurs tangents à une surface fermée (Riemannienne compacte sans bord) S qui s'annule uniquement en $k \in \mathbb{N}$ points distincts $a_1, \dots, a_k \in S$, alors,

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^k \deg(v, a_i).$$

- 1 La *caractéristique d'Euler* $\chi(S)$ de la surface. « $\chi(S) = 2 - 2\#$ de trous de S »
- 2 Le degré d'un champs de vecteur v en a_i (on parle souvent d'indice), $\deg(v, a_i)$

Théorème

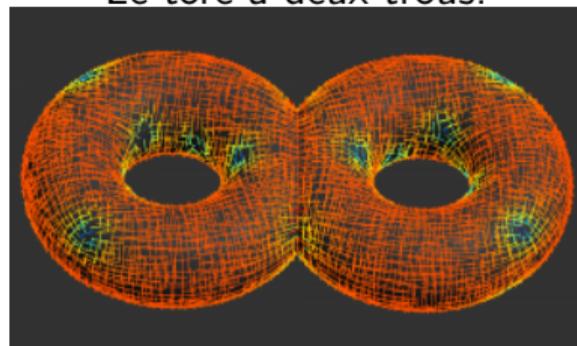
Si v est un champ de vecteurs tangents à une surface S qui s'annule uniquement en $k \in \mathbb{N}$ points distincts $a_1, \dots, a_k \in S$, alors,

$$2 - 2\# \text{ de trous de } S = \chi(S) = \sum_{i=1}^k \deg(v, a_i).$$

La sphère : $\chi(\mathbb{S}^2) = 2!$

Le tore

Le tore à deux trous.



Le champ de vecteurs le moins pire

On veut quand même carreler la sphère.

| \iff On veut quand même trouver un champ de vecteurs de norme unité.

Cela n'existe pas donc on va trouver *le moins pire* :

Idée

| Minimiser l'énergie de Dirichlet : $\inf_{v \in \mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} |Dv|^2$

Ici, $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)$ = ensemble des champs de vecteurs tangents de norme unité qu'on peut dériver une fois.

Problème

| $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2) = \emptyset$

Le champ de vecteurs le moins pire

On veut quand même carreler la sphère.

| \iff On veut quand même trouver un champ de vecteurs de norme unité.

Cela n'existe pas donc on va trouver *le moins pire* :

Idée

| Minimiser l'énergie de Dirichlet : $\inf_{v \in \mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} |Dv|^2$

Ici, $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)$ = ensemble des champs de vecteurs tangents de norme unité qu'on peut dériver une fois.

Problème

| $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2) = \emptyset$

Le champ de vecteurs le moins pire

On veut quand même carreler la sphère.

| \iff On veut quand même trouver un champ de vecteurs de norme unité.

Cela n'existe pas donc on va trouver *le moins pire* :

Idée

| Minimiser l'énergie de Dirichlet : $\inf_{v \in \mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} |Dv|^2$

Ici, $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)$ = ensemble des champs de vecteurs tangents de norme unité qu'on peut dériver une fois.

Problème

| $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2) = \emptyset$

Le champ de vecteurs le moins pire

On veut quand même carreler la sphère.

| \iff On veut quand même trouver un champ de vecteurs de norme unité.

Cela n'existe pas donc on va trouver *le moins pire* :

Idée

| Minimiser l'énergie de Dirichlet : $\inf_{v \in \mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} |Dv|^2$

Ici, $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)$ = ensemble des champs de vecteurs tangents de norme unité qu'on peut dériver une fois.

Problème

| $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2) = \emptyset$

Le champ de vecteurs le moins pire

On veut quand même carreler la sphère.

| \iff On veut quand même trouver un champ de vecteurs de norme unité.

Cela n'existe pas donc on va trouver *le moins pire* :

Idée

| Minimiser l'énergie de Dirichlet : $\inf_{v \in \mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} |Dv|^2$

Ici, $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2)$ = ensemble des champs de vecteurs tangents de norme unité qu'on peut dériver une fois.

Problème

| $\mathcal{X}_1(\mathbb{S}^2) = \emptyset$

Modéliser le modèle

- Pour simplifier : on va remplacer la sphère \mathbb{S}^2 par le disque $D^2 \subset \mathbb{R}^2$.
- Nouveau problème : trouver un champ de vecteurs de norme unité $p \in D^2 \mapsto \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ tangent au disque.
- Contrainte : $v(p) = p^\perp$ pour tout $p \in \partial D^2$

Slogan

Si $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a un degré non nul, alors il n'existe pas de $v : D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tel que $v = g$ au bord.

Théorème

Si $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, alors si v est un champ de vecteurs tangents au disque qui s'annule exactement en $k \in \mathbb{N}$ points distincts $a_1, \dots, a_k \in D^2$

$$\deg(g) = \sum_{i=1}^k \deg(v, a_i).$$

Modéliser le modèle

- Pour simplifier : on va remplacer la sphère \mathbb{S}^2 par le disque $D^2 \subset \mathbb{R}^2$.
- Nouveau problème : trouver un champ de vecteurs de norme unité $p \in D^2 \mapsto \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ tangent au disque.
- Contrainte : $v(p) = p^\perp$ pour tout $p \in \partial D^2$

Slogan

Si $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a un degré non nul, alors il n'existe pas de $v : D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tel que $v = g$ au bord.

Théorème

Si $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, alors si v est un champ de vecteurs tangents au disque qui s'annule exactement en $k \in \mathbb{N}$ points distincts $a_1, \dots, a_k \in D^2$

$$\deg(g) = \sum_{i=1}^k \deg(v, a_i).$$

Modéliser le modèle

- Pour simplifier : on va remplacer la sphère \mathbb{S}^2 par le disque $D^2 \subset \mathbb{R}^2$.
- Nouveau problème : trouver un champ de vecteurs de norme unité $p \in D^2 \mapsto \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ tangent au disque.
- Contrainte : $v(p) = p^\perp$ pour tout $p \in \partial D^2$

Slogan

Si $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a un degré non nul, alors il n'existe pas de $v : D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tel que $v = g$ au bord.

Théorème

Si $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, alors si v est un champ de vecteurs tangents au disque qui s'annule exactement en $k \in \mathbb{N}$ points distincts $a_1, \dots, a_k \in D^2$

$$\deg(g) = \sum_{i=1}^k \deg(v, a_i).$$

Nouveau problème...

$$\inf_{v \in C^1(D^2, \mathbb{S}^1): v|_{\partial D^2} = g} \int_{D^2} \frac{|Dv|^2}{2} \dots \text{ sans solution.}$$

Idée 0

Rendre l'ensemble $\{v \in C^1(D^2, \mathbb{S}^1) : v|_{\partial D^2} = g\}$ plus grand. Candidat : l'espace de Sobolev $W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$.

Les fonctions de régularité $W^{1,2}$ **ne sont pas nécessairement continues**.

$W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$

- 1 Le W signifie *weak* pour dérivée *faible*.
- 2 Le 1 signifie une dérivée qu'on note Dv .
- 3 Le 2 signifie que cette dérivée est de carré intégrable ($|Dv| \in L^2(D^2)$).
- 4 g signifie qu'en un certain sens $v|_{\partial D^2} = g$.

Nouveau problème...

$$\inf_{v \in C^1(D^2, \mathbb{S}^1): v|_{\partial D^2} = g} \int_{D^2} \frac{|Dv|^2}{2} \dots \text{ sans solution.}$$

Idée 0

Rendre l'ensemble $\{v \in C^1(D^2, \mathbb{S}^1) : v|_{\partial D^2} = g\}$ plus grand. Candidat : l'espace de Sobolev $W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$.

Les fonctions de régularité $W^{1,2}$ **ne sont pas nécessairement continues.**

$W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$

- 1 Le W signifie *weak* pour dérivée *faible*.
- 2 Le 1 signifie une dérivée qu'on note Dv .
- 3 Le 2 signifie que cette dérivée est de carré intégrable ($|Dv| \in L^2(D^2)$).
- 4 g signifie qu'en un certain sens $v|_{\partial D^2} = g$.

Nouveau problème...

$$\inf_{v \in C^1(D^2, \mathbb{S}^1) : v|_{\partial D^2} = g} \int_{D^2} \frac{|Dv|^2}{2} \dots \text{ sans solution.}$$

Idée 0

Rendre l'ensemble $\{v \in C^1(D^2, \mathbb{S}^1) : v|_{\partial D^2} = g\}$ plus grand. Candidat : l'espace de Sobolev $W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$.

Les fonctions de régularité $W^{1,2}$ **ne sont pas nécessairement continues**.

$W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$

- 1 Le W signifie *weak* pour dérivée *faible*.
- 2 Le 1 signifie une dérivée qu'on note Dv .
- 3 Le 2 signifie que cette dérivée est de carré intégrable ($|Dv| \in L^2(D^2)$).
- 4 g signifie qu'en un certain sens $v|_{\partial D^2} = g$.

Définition de l'espace de Sobolev $W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$

$v \in W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$ si et seulement si $v : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et

- 1 il existe un objet appelé Dv qui est une fonction intégrable tel que pour tout $\phi \in C_c^\infty(D^2, \mathbb{R}^{2 \times 2})$,

$$\int_{D^2} Dv \odot \phi = - \int_{D^2} v \odot D\phi$$

- 2 $|Dv| \in L^2(D^2)$
- 3 pour presque tout $x \in D^2$ $|u(x)| = 1$
- 4 $u = g$ au bord dans un sens approprié pour les fonctions de Sobolev.

Proposition

| Il n'existe pas de champ de vecteurs de norme unité de régularité $W^{1,2}$ tangents à la sphère.

Proposition

| Si $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application de degré non nul, il n'existe pas de $v \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$ tel que $v = g$ au bord.

$$\iff W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1) = \emptyset$$

→ Ce résultat est remarquable en cela que une fonction de régularité $W^{1,2}$ n'est pas nécessairement continue.

Nouveau problème...

$$\inf_{v \in C^1(D^2, \mathbb{S}^1): v|_{\partial D^2} = g} \int_{D^2} \frac{|Dv|^2}{2} \dots \text{ toujours sans solution.}$$

Philosophie :

- 1 Approcher le problème impossible par une suite de problèmes possibles.
- 2 Chaque problème est indexé par un paramètre.
- 3 Trouver une solution du problème pour chaque valeur de paramètre.
- 4 Passer à la limite *via le paramètre sur la solution*.

Applications p -harmoniques

Remplaçons 2 par p dans la définition $W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$:

$v \in W_g^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)$ si et seulement si $v : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et

- 1 il existe un objet appelé Dv qui est une fonction intégrable tel que pour tout $\phi \in C_c^\infty(D^2, \mathbb{R}^{2 \times 2})$,

$$\int_{D^2} Dv \odot \phi = - \int_{D^2} v \odot D\phi$$

- 2 $|Dv| \in L^p(D^2)$
- 3 pour presque tout $x \in D^2$ $|u(x)| = 1$
- 4 $u = g$ au bord dans un sens approprié pour les fonctions de Sobolev.

Bonne nouvelle :

Pour tout $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, si $p < 2$, il existe un $v \in W^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)$ tel que $v = g$ au bord.

Applications p -harmoniques

Remplaçons 2 par p dans la définition $W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{S}^1)$:

$v \in W_g^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)$ si et seulement si $v : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et

- 1 il existe un objet appelé Dv qui est une fonction intégrable tel que pour tout $\phi \in C_c^\infty(D^2, \mathbb{R}^{2 \times 2})$,

$$\int_{D^2} Dv \odot \phi = - \int_{D^2} v \odot D\phi$$

- 2 $|Dv| \in L^p(D^2)$
- 3 pour presque tout $x \in D^2$ $|u(x)| = 1$
- 4 $u = g$ au bord dans un sens approprié pour les fonctions de Sobolev.

Bonne nouvelle :

Pour tout $g : \partial D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, si $p < 2$, il existe un $v \in W^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)$ tel que $v = g$ au bord.

Nouveau p -problème...

$\inf_{v \in W_g^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)} \int_{D^2} \frac{|Dv|^p}{2}$ avec une solution $u_p \in W_g^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)$!

Une solution :

Il existe un $u_* \in C^\infty(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \mathbb{S}^1)$ tel que $u_* = g$ au bord du disque et une suite $p_n \nearrow 2$ tel que $u_{p_n} \rightarrow u_*$. De plus u_* minimise,

$$E_{\text{ren}}^{1,2}(u) \doteq \lim_{\rho \searrow 0} \int_{D^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k D(a_i; \rho)} \frac{|Du|^2}{2} - \pi \deg(g)^2 \log \frac{1}{\rho}$$

parmi tous les u tels que $u = g$ au bord du disque pour lesquels cette quantité est finie.

Nouveau p -problème...

$\inf_{v \in W_g^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)} \int_{D^2} \frac{|Dv|^p}{2}$ avec une solution $u_p \in W_g^{1,p}(D^2, \mathbb{S}^1)$!

Une solution :

Il existe un $u_* \in C^\infty(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \mathbb{S}^1)$ tel que $u_* = g$ au bord du disque et une suite $p_n \nearrow 2$ tel que $u_{p_n} \rightarrow u_*$. De plus u_* minimise,

$$E_{\text{ren}}^{1,2}(u) \doteq \lim_{\rho \searrow 0} \int_{D^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k D(a_i; \rho)} \frac{|Du|^2}{2} - \pi \deg(g)^2 \log \frac{1}{\rho}$$

parmi tous les u tels que $u = g$ au bord du disque pour lesquels cette quantité est finie.

Nouveau problème...

Fixons $\epsilon > 0$.

$\inf_{v \in W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)} \int_{D^2} \frac{|Dv|^2}{2} + \frac{F(v)}{\epsilon^2}$ avec une solution $u_\epsilon \in W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$.

où $F(v) \asymp \text{dist}(v, \mathbb{S}^1)^2$ quand $|v| \asymp 1$ par exemple $F(v) = (1 - |v|^2)^2$.

Une solution :

Il existe un $u_* \in C^\infty(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \mathbb{S}^1)$ tel que $u_* = g$ au bord du disque et une suite $\epsilon_n \searrow 0$ tel que $u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$. On peut montrer que u_* minimise

$$E_{\text{ren}}^{1,2}(u) = \lim_{\rho \searrow 0} \int_{D^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k D(a_i; \rho)} \frac{|Du|^2}{2} - \pi \deg(g)^2 \log \frac{1}{\rho}$$

parmi tous les u tels que $u = g$ au bord du disque pour lesquels cette quantité est finie.

Nouveau problème...

Fixons $\epsilon > 0$.

$\inf_{v \in W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)} \int_{D^2} \frac{|Dv|^2}{2} + \frac{F(v)}{\epsilon^2}$ avec une solution $u_\epsilon \in W_g^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$.

où $F(v) \asymp \text{dist}(v, \mathbb{S}^1)^2$ quand $|v| \asymp 1$ par exemple $F(v) = (1 - |v|^2)^2$.

Une solution :

Il existe un $u_* \in C^\infty(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \mathbb{S}^1)$ tel que $u_* = g$ au bord du disque et une suite $\epsilon_n \searrow 0$ tel que $u_{\epsilon_n} \rightarrow u_*$. On peut montrer que u_* minimise

$$E_{\text{ren}}^{1,2}(u) = \lim_{\rho \searrow 0} \int_{D^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k D(a_i; \rho)} \frac{|Du|^2}{2} - \pi \deg(g)^2 \log \frac{1}{\rho}$$

parmi tous les u tels que $u = g$ au bord du disque pour lesquels cette quantité est finie.'

Question :

| Est-ce que tout problème du genre admet la même énergie renormalisée comme limite ?

Proposition

| Si $g(p) = p^\perp$ alors l'unique minimiseur v_* de l'énergie renormalisée est $v_*(p) = p^\perp/|p|$.

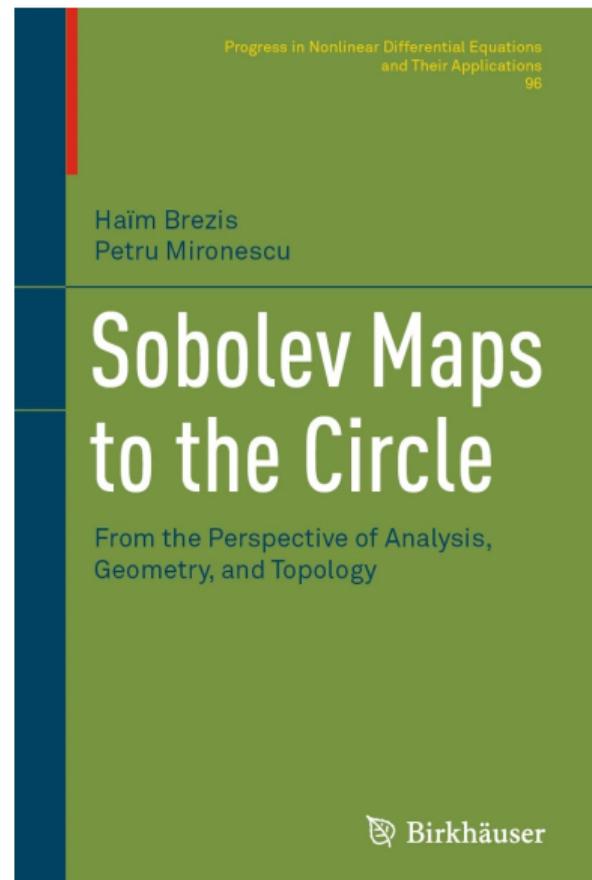
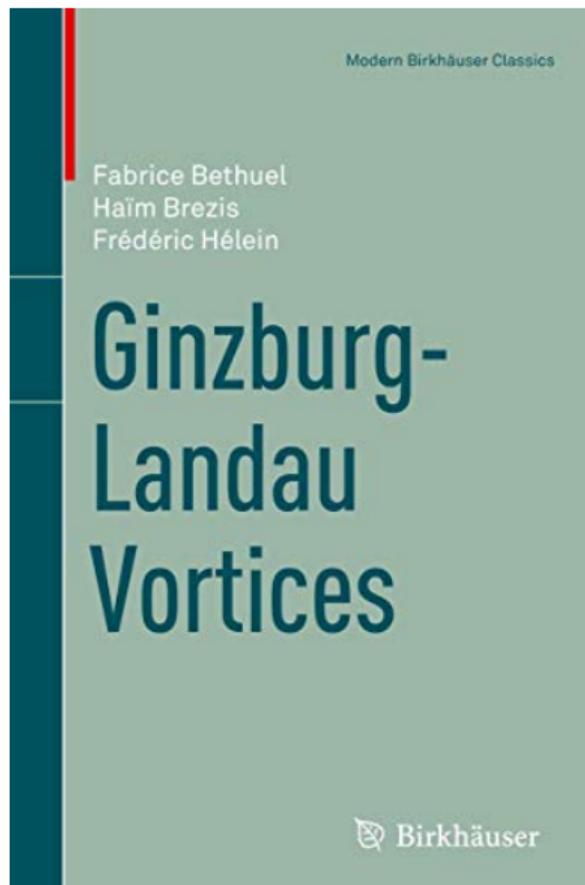
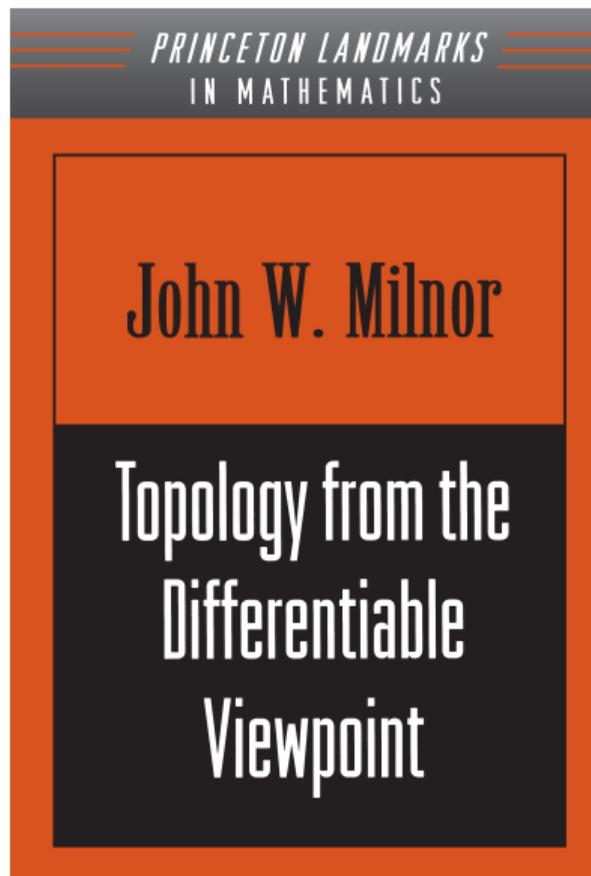
Question :

| Est-ce que tout problème du genre admet la même énergie renormalisée comme limite ?

Proposition

| Si $g(p) = p^\perp$ alors l'unique minimiseur v_* de l'énergie renormalisée est $v_*(p) = p^\perp / |p|$.

La sphère n'est pas carrelable, voici le théorème,
De la boule chevelue, la preuve en emblème.
Mais n'excluons point un champ, ses vecteurs tangents,
S'annulant en points, le remplaçant élégamment.



Merci à tous