Le problème de la corde de Dirac

Brussel summer school of mathematics 2013

Julien Federinov

Unité de géométrie différentielle et algèbre(ULB)

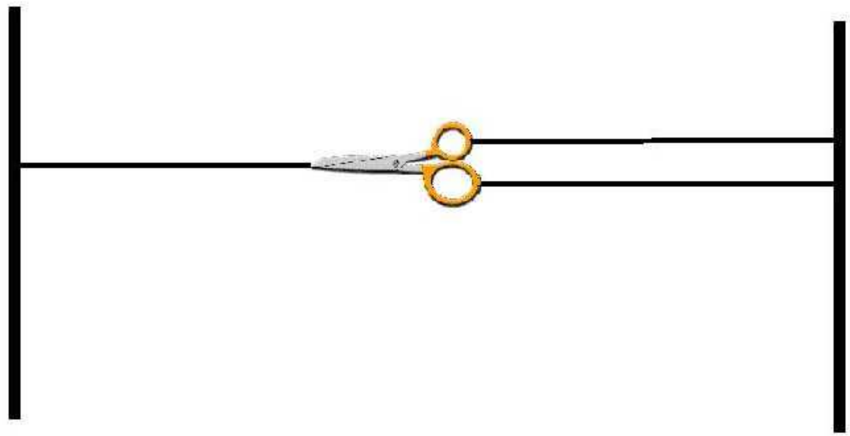
Institut de recherche en mathématique et physique(IRMP-UCL)

Institut Paul Lambin

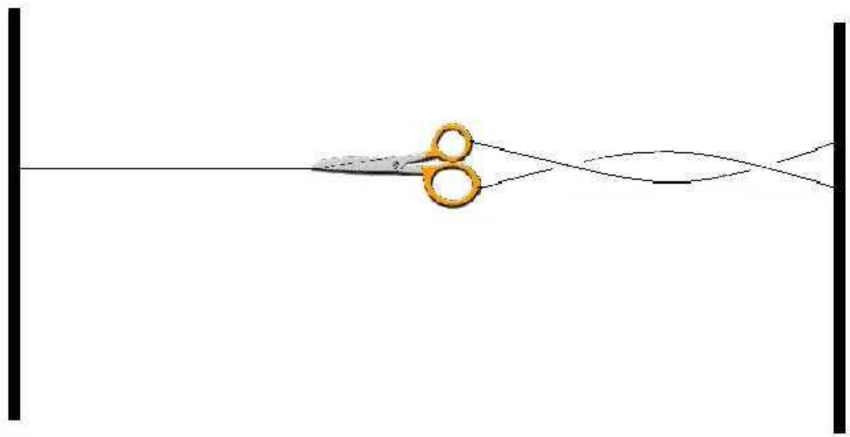
August 6, 2013

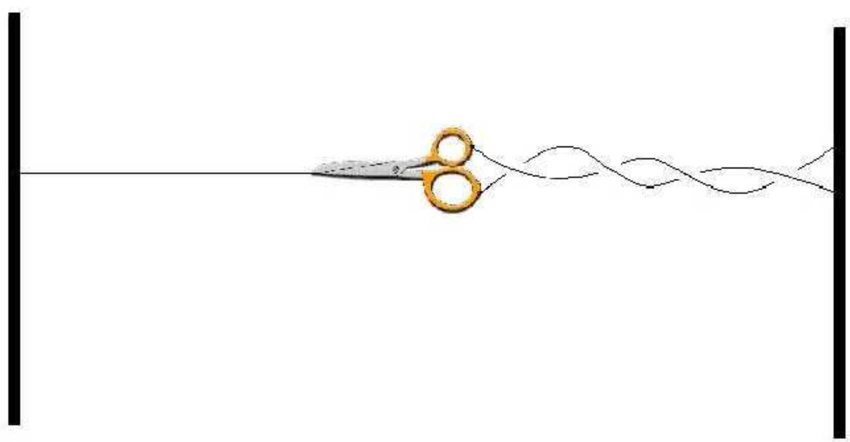
Le problème de la corde de Dirac

La position initiale

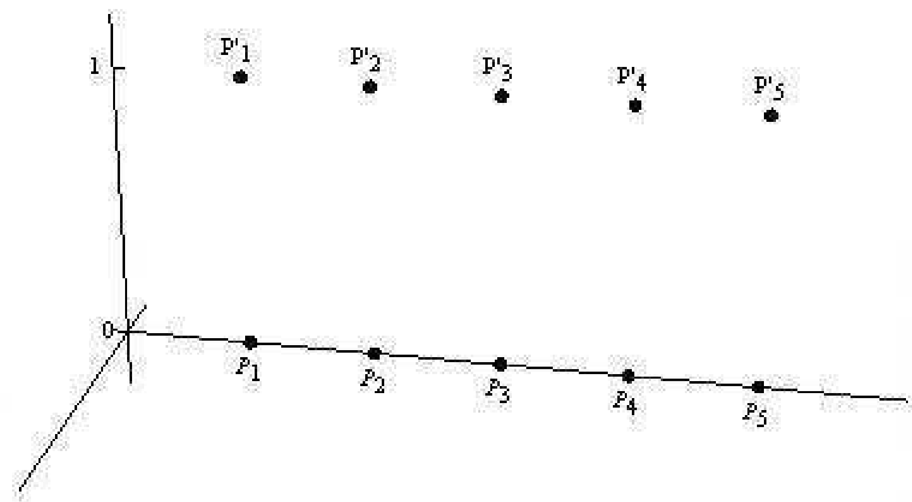


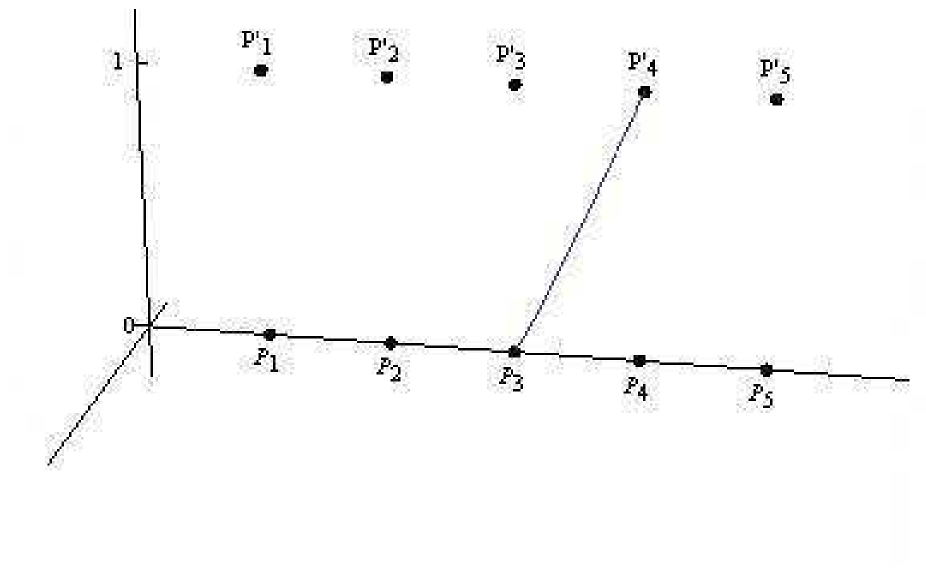
Après un tour



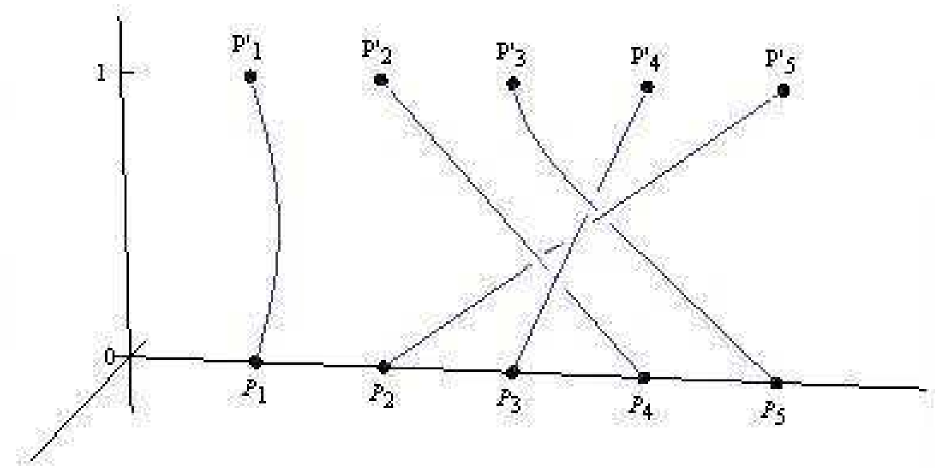


Les n-tresses de Artin


1
0
P'1
P'2
P'3
P'4
P'5
P1
P2
P3
P4
P5



1
0
P'1
P'2
P'3
P'4
P'5
P1
P2
P3
P4
P5


1
0
P'1
P'2
P'3
P'4
P'5
P1
P2
P3
P4
P5

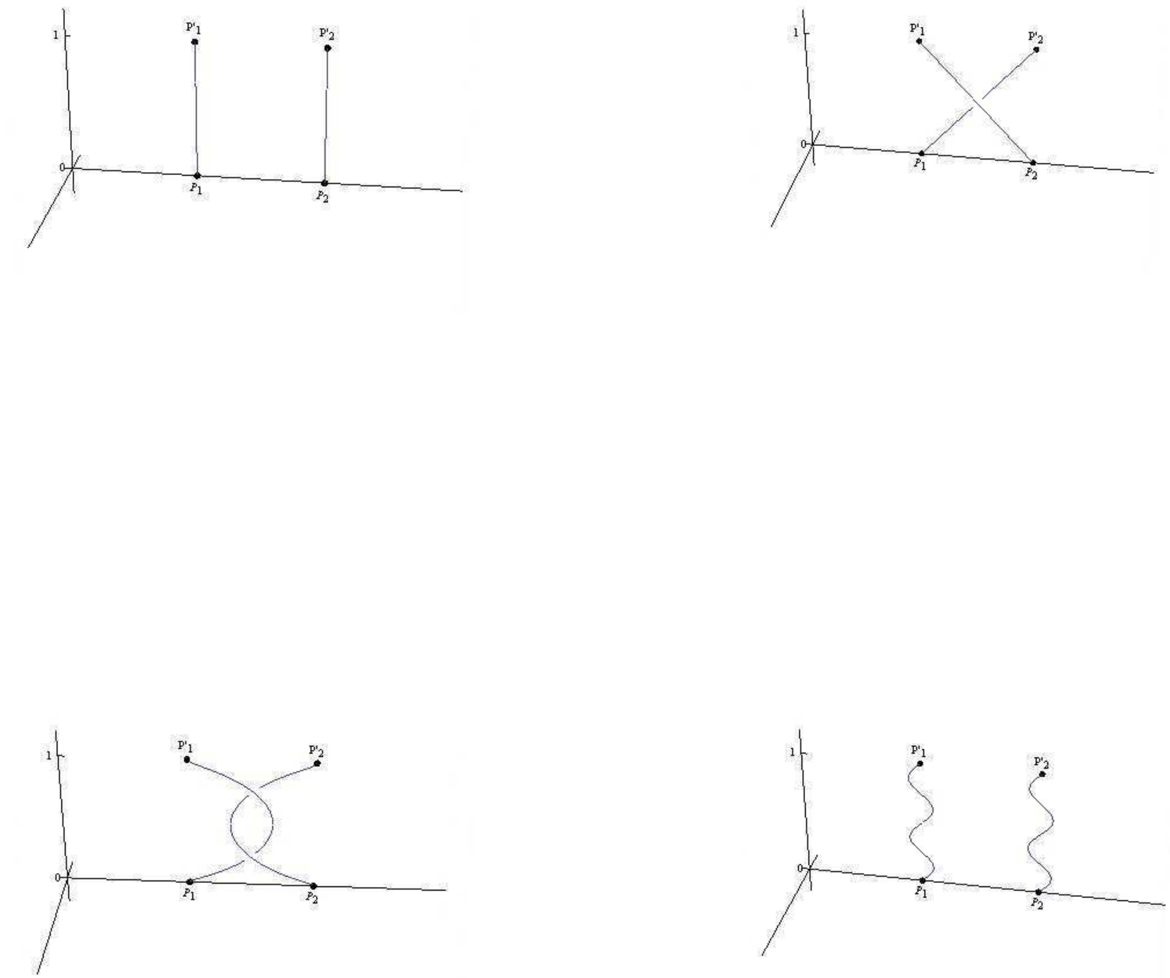
Definition: Soit $n \in \mathbb{N}$. Une n-tresse consiste en une permutation τ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et n applications continues

$$\alpha_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times [0,1] \quad \text{telles que pour tout } i$$

1. $\alpha_i(0) = (0, i, 0)$ et $\alpha_i(1) = (0, \tau(i), 1)$
2. $\forall t \in [0,1]$, $\alpha_i(t) \in \mathbb{R}^2 \times \{t\}$
3. Pour $i \neq j$, $\alpha_i([0,1]) \cap \alpha_j([0,1]) = \emptyset$

On appelle τ la permutation de la tresse et chaque α_i un brin de tresse.

Isotopie

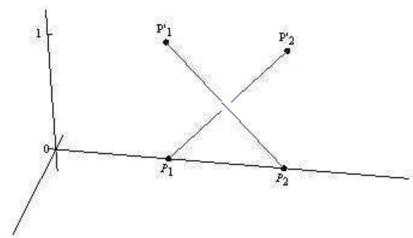


Definition: Deux $n-$tresses α et β sont isotopes si elles définissent la même permutation τ et s'il existe n applications continues

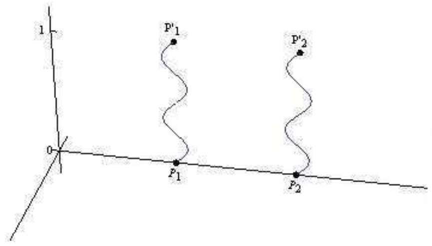
$$F_i : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0,1]$$

telles que pour chaque $i \in \{1, \dots n\}$

1. $\forall t \in [0,1], F_i(0,t) = \alpha_i(t)$
2. $\forall t \in [0,1], F_i(1,t) = \beta_i(t)$
3. $\forall s \in [0,1], F_i(s,0) = (0,i,0)$
4. $\forall s \in [0,1], F_i(s,1) = (0,\tau(i),1)$
5. $\forall s \in [0,1], \{F_1(s,t), \dots, F_n(s,t)\}$ est une $n-$tresse

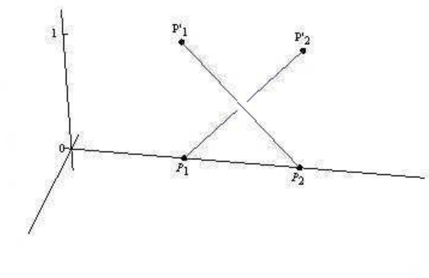


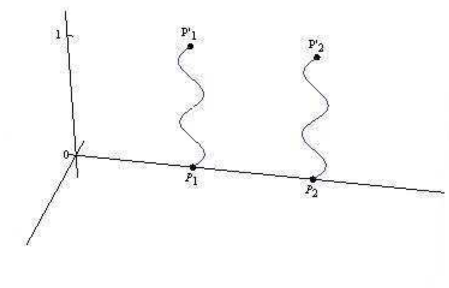
1
0
P'1
P'2
P1
P2

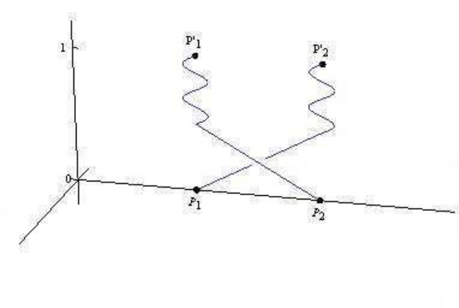


1
0
P'1
P'2
P1
P2

Produit de concatenation





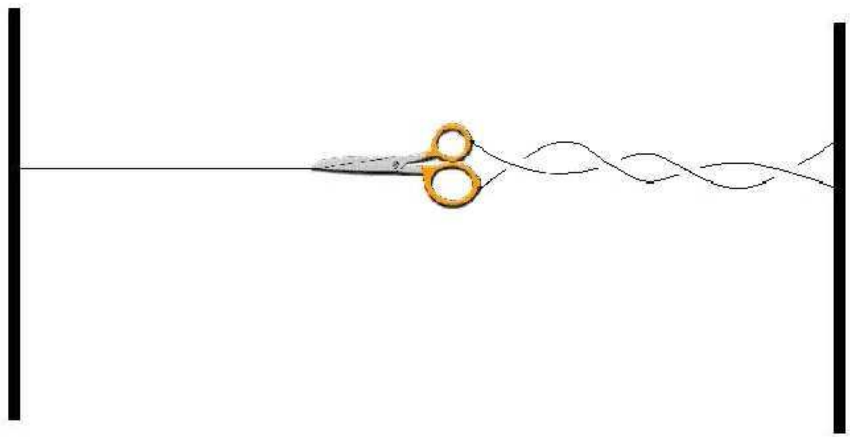


Soient $[\alpha]$ et $[\beta]$ deux $n-$tresses de permutation respective τ et σ. On pose $[\alpha][\beta] = [\alpha.\beta]$ où le brin i de la tresse $\alpha.\beta$ est défini par

$$(\alpha.\beta)_i(t) = \begin{cases} g_1 \circ \alpha_i(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_2 \circ \beta_{\tau(i)}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

avec $g_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g_j(a,b,c) = (a, b, \frac{c}{2} + \frac{j-1}{2})$ pour $j = 1, 2$.

Théorème: L'ensemble des $n-$tresses, muni du produit de concaténation forme un groupe appelé le groupe de Artin et noté $B(n)$.



Le groupe fondamental

Définiton Deux applications $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ sont homotopes ($\varphi_0 \sim \varphi_1$) si il existe une application continue $\phi : X \times I \to Y$ telle que $\phi(x, 0) = \varphi_0$ et $\phi(x, 1) = \varphi_1$.

Définiton Deux applications $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ sont homotopes ($\varphi_0 \sim \varphi_1$) si il existe une application continue $\phi : X \times I \to Y$ telle que $\phi(x, 0) = \varphi_0$ et $\phi(x, 1) = \varphi_1$.

Définiton Deux espaces topologiques X et Y ont même type d'homotopie ($X \sim Y$) si il existe des applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \sim id_X$ et $g \circ f \sim id_Y$.

Definition: Un chemin dans un espace topologique X est une application continue de $[0, 1]$ dans X.

Definition: Un chemin dans un espace topologique X est une application continue de $[0, 1]$ dans X.

Definition: Deux chemins f_0 et f_1 dans X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 sont homotopes s'il existe une homotopie entre f_0 et f_1 qui fixe les extrémités.

Definition: Si f et g désignent deux chemins dans X tels que $f(1) = g(0)$, on pose

$$[f][g] = [f.g]$$

où $f.g$ est le chemin de X défini par

$$f.g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Definition: Si X désigne un espace topologique et $x_0 \in X$, on dit que le chemin f est un lacet centré en x_0 si $f(0) = f(1) = x_0$

Definition: Si X désigne un espace topologique et $x_0 \in X$, on dit que le chemin f est un lacet centré en x_0 si $f(0) = f(1) = x_0$

Definition:

$$\pi_1(X, x_0) = \{\ [\text{lacets centrés en } x_0]\ \}$$

Proposition: Si l'espace topologique X est connexe par arcs, alors tous les $\pi_1(X, x_0)$ sont isomorphes.

Proposition: Si X et Y ont même type d'homotopie et sont connexes par arcs, alors, $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes.

Proposition: Si X et Y ont même type d'homotopie et sont connexes par arcs, alors, $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes.

Remarque: Si $f : X \to Y$ désigne l'éauivalence d'homotopie entre X et Y, l'application $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ definie par $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ est un isomorphisme de groupes

Espaces de configuration

Definition: Soit $n \geq 1$ un entier et M une variété topologique. Le sous-ensemble $F_n(M)$ du produit de n facteurs $M \times \ldots \times M$ défini par

$$F_n(M) = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \neq x_j \text{ pour tout } i \neq j\}$$

muni de la topologie induite est appelé espace de configuration pour un ensemble de n points ordonnés dans M.

Propriété: L'espace $F_n(M)$ est une variété topologique.

Propriété: Si M est une variété connexe par arcs de dimension au moins 2, alors, l'espace $F_n(M)$ est une variété topologique connexe par arcs.

$$\boxed{F_1(M) \cong M}$$

$$F_1(M) \cong M$$

$$F_2(\mathbb{R}^n) \sim S^{n-1}$$

$$F_1(M) \cong M$$

$$F_2(\mathbb{R}^n) \sim S^{n-1}$$

$$F_2(S^n) \sim S^n$$

Propriété: Si on note $PB(n)$ le sous-groupe des $n-$tresses de Artin de permutation $\tau = Id$, alors,

$$\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) = PB(n)$$

Les fibrations

Définition

Définition: Soient E et B deux espaces topologiques. Une application continue $p : E \to B$ est un fibré localement trivial s'il existe un espace topologique F, appelé la fibre, un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de B et, pour tout $i \in I$, des homéomorphismes $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "p"'] & U_i \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

L'application $p : \mathbb{R} \to S^1 : s \to (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ est un fibré localement trivial de fibre $\mathbb{Z}$.

Propriété de relèvement: Si $p : E \to B$ est un fibré localement trivial, $f_0 : Y \to B$, $f : Y \times I \to B$ une application continue et $\widetilde{f_0} : Y \to E$ une application telle que $p(\widetilde{f_0}) = f_0$, alors il existe une unique application continue $\widetilde{f} : Y \times I \to E$ telle que $f(y, 0) = \widetilde{f_0}(y)$ et $p(\widetilde{f}) = f$.

Lien avec le groupe fondamental

Définition: Si M est une variété, on pose $C_n(M) = F_n(M)/\sim$ où $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ s'il existe une permutation τ de $\{1, \ldots n\}$ telle que $x_{\tau(i)} = y_i$ pour tout i.

Définition: Si M est une variété, on pose $C_n(M) = F_n(M)/\sim$ où $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ s'il existe une permutation τ de $\{1, \ldots n\}$ telle que $x_{\tau(i)} = y_i$ pour tout i.

Proposition: L'application quotient $p : F_n(M) \to C_n(M)$ est un fibré localement trivial.

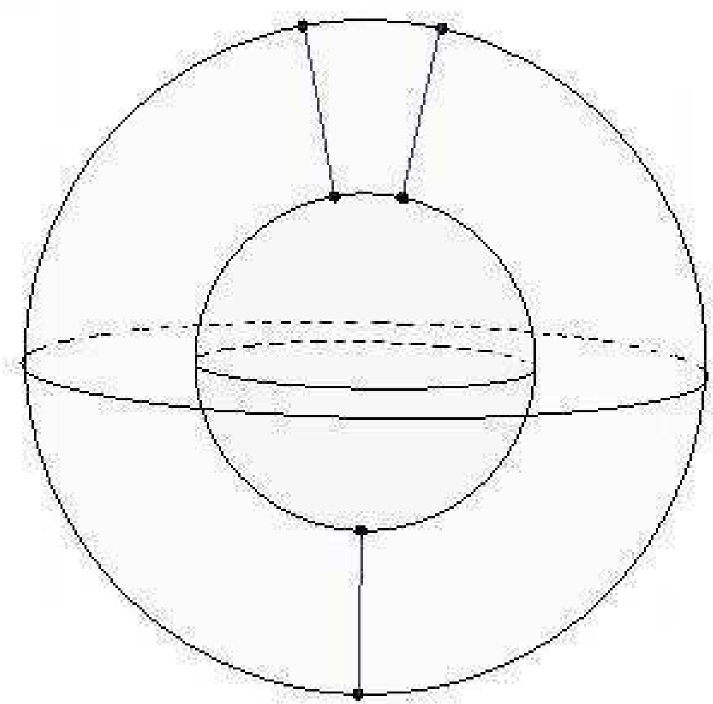
Définition: Si M est une variété, on pose $C_n(M) = F_n(M)/\sim$ où $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ s'il existe une permutation τ de $\{1, \ldots n\}$ telle que $x_{\tau(i)} = y_i$ pour tout i.

Proposition: L'application quotient $p : F_n(M) \to C_n(M)$ est un fibré localement trivial.

Proposition: Les groupes $B(n)$ et $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$ sont isomorphes.

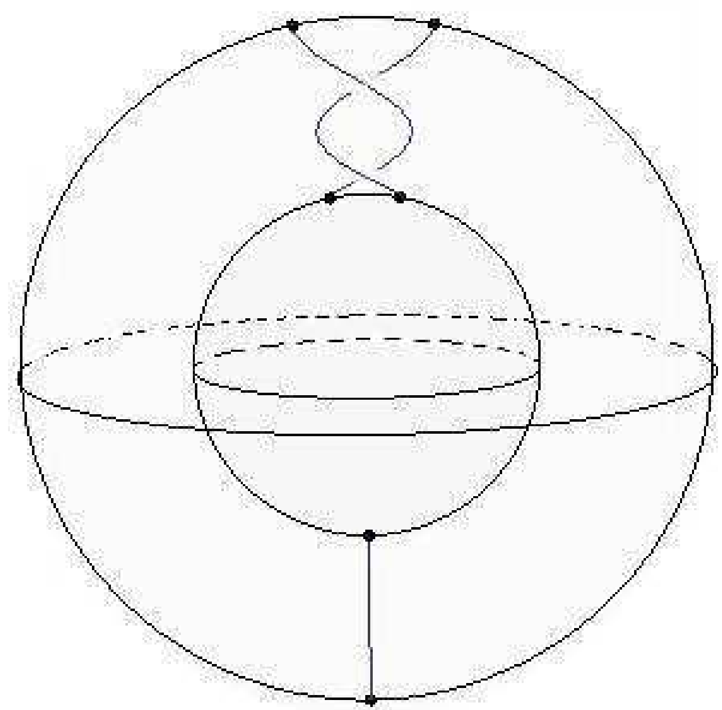
Retour sur le problème de Dirac

La position initiale de notre problème peut être pensé comme l'élément neutre du $\pi_1(F_3(S^2)) = PB_3(S^2)$.

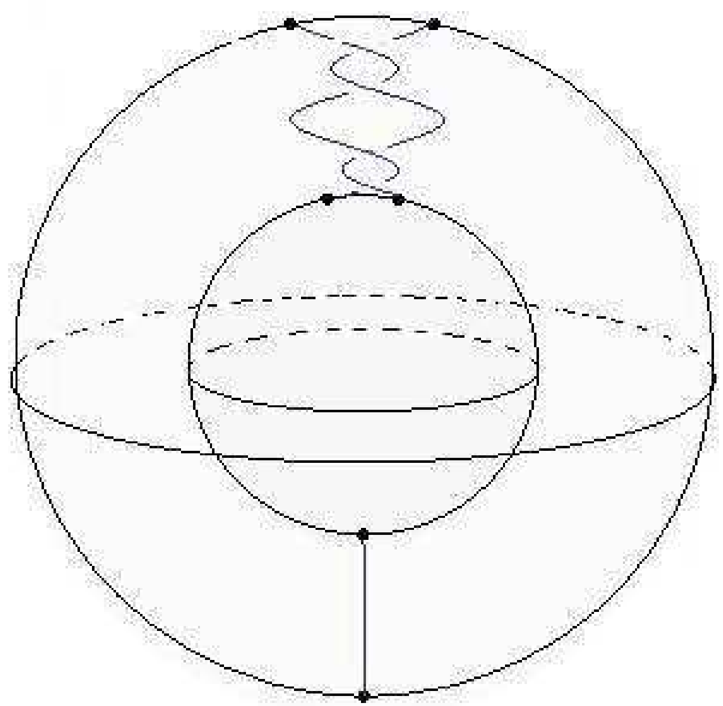


Position après un tour

La position après un tour de notre problème peut être pensé comme un élément Δ du $\pi_1(F_3(S^2)) = PB_3(S^2)$.



La position après deux tour de notre problème peut être pensé comme l'élément Δ^2 du $\pi_1(F_3(S^2)) = PB_3(S^2)$.



Définition: La variété de Stiefel $V_{3,2}$ est définie comme l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthonormés.

En route vers la solution

Définition: La variété de Stiefel $V_{3,2}$ est définie comme l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthonormés.

Proposition: Pour un $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ fixé, l'application $\varphi_\alpha : V_{3,2} \to F_3(S^2)$ définie par

$$\varphi_\alpha(v_1, v_2) = (v_1, \cos(\alpha)v_1 + \sin(\alpha)v_2, \cos(\alpha)v_1 - \sin(\alpha)v_2)$$

est une équivalence d'homotopie.

En route vers la solution

Corolaire: Les espaces $SO(3)$ et $F_3(S^2)$ ont même type d'homotopie et $\pi_1(SO(3)) = \pi_1(F_3(S^2))$

Groupe fondamental de $SO(3)$

Un générateur de $\pi_1(SO(3))$ est donné par la classe du lacet suivant :

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution

Proposition: Pour un $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ fixé, l'application

$$\varphi_\alpha : V_{3,2} \to F_3(S^2)$$

définie par

$$\varphi_\alpha(v_1, v_2) = (v_1, \cos(\alpha)v_1 + \sin(\alpha)v_2, \cos(\alpha)v_1 - \sin(\alpha)v_2)$$

est une équivalence d'homotopie.

Corolaire: Les espaces $SO(3)$ et $F_3(S^2)$ ont même type d'homotopie et $\pi_1(SO(3)) = \pi_1(F_3(S^2)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$F_k(S^2) \sim \begin{cases} S^2 & \text{si k=1,2} \\ SO(3) & \text{si k=3} \\ SO(3) \times F_{k-3}(\mathbb{R}^2 - \{(0,0),(1,0)\}) & \text{si k} \geq 4 \end{cases}$$

$$PB_k(S^2) = \begin{cases} 1 & \text{si k=1,2} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si k=3} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times PB_{k-3}(\mathbb{R}^2 - \{(0,0),(1,0)\}) & \text{si k} \geq 4 \end{cases}$$

Proposition: Pour un $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ fixé, l'application $\varphi_\alpha : V_{3,2} \to F_3(S^2)$ définie par

$$\varphi_\alpha(v_1, v_2) = (v_1, \cos(\alpha)v_1 + \sin(\alpha)v_2, \cos(\alpha)v_1 - \sin(\alpha)v_2)$$

est une équivalence d'homotopie.

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{\varphi_\alpha}"] & V_{3,2} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"] & S^2 \arrow[d, "Id"] \\
F_2(S^2 - P_N) \arrow[r, "j"] & F_3(S^2) \arrow[r, "\pi'"] & F_1(S^2)
\end{tikzcd}$$