Problème au bord pour les fonctions harmoniques

Karim Barigou Philippe Schram

Brussels Summer School of Mathematics, 2013

ULB

Plan

Le problème de Dirichlet

- X, E un ensemble fini de noeuds-arêtes, $\partial X \subset X$ un "bord"
- $f : \partial X \longrightarrow \mathbb{R}$ une condition au bord
- $\exists$? une solution au problème $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $u\,|_{\partial X} = f$ et $u(x) = MA(f(y) \mid (x, y) \in E)\ \forall x \in X \setminus \partial X$ avec MA la moyenne arithmétique.

Théorème

Sous des conditions appropriées (à préciser) sur ∂X, il existe une solution unique à ce problème, quelle que soit la fonction f donnée.

- On écrit $u(X \setminus \partial X)$ comme vecteur $Y = (y_1, \ldots, y_n)'$.
- La structure du graphe est donnée par une matrice A.
- Le problème s'écrit alors sous la forme matricielle $AY = b$ où b contient la condition au bord.
- Comment décider de l'existence/ unicité ?

Le problème discret

Solution algébrique

- On considère le problème auxiliaire avec la condition au bord $f \equiv 0$. Il existe la solution constante nulle.
- Propriété du min-max de la fonction u : y_k n'est jamais plus grand que la valeur maximale de ses voisins et n'est jamais plus petit que la valeur minimale de ses voisins !
- Cette propriété implique l'unicité de la solution, donc A est non singulière. La solution générale existe donc et est bien unique !

Le problème discret

Remarques

- Le bord doit intersecter toute partie de la partition connexe du graphe
- Si cette condition n'est pas vérifiée, il existe des contre-exemples triviaux.
- Malheureusement, cette preuve n'est pas générique...

Le problème discret

Preuve analytique

- Nous savons qu'il y a existence et unicité de la solution.
- Comme avant, soit $X \setminus \partial X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\partial X = \{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$.
- Posons $(y_1)_0 = (y_2)_0 = \cdots = (y_n)_0 = \min_j f(\rho_j)$ et $(y_{n+j})_0 = f(\rho_j)$.
- À chaque itération i, posons $(y_k)_i =$ la moyenne de tous les $(y_{k'})_{i-1}$ tels que $(k, k') \in E$ et $(y_{n+j})_i = f(\rho_j)$.

Théorème

Sous la condition sur le bord mentionnée auparavant, on a pour chaque $k = 1, \ldots, n+m$ que $(y_k)_i \xrightarrow{i\to\infty} u(k)$. En d'autres mots, l'algorithme décrit en haut converge vers la fonction unique u.

- Sans perte de généralité, on peut transformer le problème par translation, i.e. on remplace chaque $f(\rho_j)$ par $f(\rho_j) + \mu$ pour μ fixé.
- On choisit μ tel que $f(\rho_j) \geq 0$ pour tout j.
- Par récurrence, on montre que $\max_j f(\rho_j) \geq (y_i)_{n+1} \geq (y_i)_n \geq 0$ pour tout i, n.
- Chacune des suites est monotone et bornée, donc convergente vers $(y_i)_\infty$.
- Si on applique l'algorithme à $((y_1)_\infty, \ldots, (y_{n+m})_\infty)$, on reste stationnaire.
- Cette limite coïncide donc avec $u(X)$. $\square$

Définition

Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (avec $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$) est dite holomorphe sur l'ouvert Ω si elle est $\mathcal{C}^1$ et si elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann données par $\overline{\partial} f = 0$ où $\overline{\partial}$ est l'opérateur défini par $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. De même on définit $\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Exemple

La fonction exponentielle complexe définie sur $\mathbb{C}$ entier par $\exp(x, y) = (\cos(y) + i\sin(y))\, e^x$.

Définition

Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite harmonique sur l'ouvert Ω si elle admet des dérivées partielles continues du second ordre et si elle vérifie l'équation de Laplace $\triangle f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = 0$.

Remarque

Toutes les fonctions holomorphes sont forcément harmoniques. On remarque en effet que $\triangle f = 4\partial\overline{\partial} f$ et les équations de Cauchy-Riemann permettent de conclure.

Le problème de Dirichlet

- Soit Ω un ouvert borné et non vide de $\mathbb{R}^2$.
- Soit f une fonction continue sur $\partial\Omega$, la frontière de Ω.
- Peut-on alors trouver une fonction harmonique u continue sur $\overline{\Omega}$ qui vérifie les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- La décision nécessitera quelques résultats préliminaires...

Le problème continu (unicité)

La propriété du min-max

Théorème

La propriété du min-max affirme que si u est une fonction harmonique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors on a

$$\forall (x,y) \in \Omega : \min_{\partial\Omega} u \leq u(x,y) \leq \max_{\partial\Omega} u$$

Autrement dit, u est bornée sur Ω par sa valeur sur la frontière de Ω.

- Soit $m = \max_{\partial\Omega} u$ et supposons $M = \max_{\overline{\Omega}} u > m$.
- $\overline{\Omega}$ est compact, donc M atteint en $p \in \Omega$. Sans perte de généralité, on fixe $p = (0,0)$. Soit d le diamètre de Ω.
- Considérons la fonction g définie par

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto v(x,y) = u(x,y) + \frac{M-m}{2d^2}(x^2+y^2) \end{aligned}$$

- On constate que $v(0,0) = u(0,0) = M$.
- Pour $(x,y) \in \partial\Omega$, on trouve que $v(x,y) \leq m + \frac{M-m}{2} = \frac{m+M}{2} < M$.
- Par suite, v atteint son maximum en $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Omega$ et il vient $\triangle v(\tilde{x},\tilde{y}) = \underbrace{\triangle u(\tilde{x},\tilde{y})}_{0} + \frac{M-m}{d^2} > 0$, une contradiction.
- La propriété du minimum est obtenue en remplaçant u par $-u$. $\square$

Corollaire (Unicité de la solution)

Si la solution au problème de Dirichlet existe, alors elle est unique. En effet, si u_1, u_2 sont deux solutions au problème, alors $u_1 - u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$. Par suite, $0 \leq u_1 - u_2 \leq 0$, donc $u_1 = u_2$ sur Ω.

Définition

On définit le noyau de Poisson comme la fonction $P_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$ pour $0 \leq r < 1$ et t réel.

- Un calcul facile montre que

$$P_r(\theta - t) = \Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}$$

avec $z = re^{i\theta}$.

- On appellera dans la suite U le disque unité ouvert et T le cercle unité, donc la frontière de U.
- Nous travaillons pour l'instant dans le cas $\Omega = U$.

Définition

Soit T le cercle unitaire. On définit l'intégrale de Poisson F d'une fonction $f \in L^1(T)$ par la formule suivante : $F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt$, définie sur U par ce qui précède. On écrira dans la suite $F = P[f]$.

- Remarquons que si f est réelle, la formule précédente implique que

$$P[f] = \Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)dt\right).$$

- Dans ce cas, $P[f]$ est donc réelle. On a donc le

Théorème

Si $f \in L^1(T)$, alors $P[f]$ est harmonique sur U.

- À partir d'une fonction définie sur T, on a défini une fonction harmonique sur U.
- Il reste à vérifier qu'au niveau de la frontière, les morceaux "se collent" bien. On a le

Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}(T)$. On définit Hf sur le disque fermé $\overline{U}$ par

$$(Hf)(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}) & si \;\; r = 1 \\ P[f]\left(re^{i\theta}\right) & si \;\; 0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Alors $Hf \in \mathcal{C}(\overline{U})$.

- On trouve facilement que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$$

- On voit donc que $\forall g \in \mathcal{C}(T)$

$$\begin{aligned} \left|P[g]\left(re^{i\theta}\right)\right| &= \left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(t)dt\right| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|P_r(\theta - t)\right| dt}_{1} \cdot \sup_T |g(t)| \\ &= \|g\|_T \end{aligned}$$

- Dès lors, $\|Hg\|_{\overline{U}} = \|g\|_T$.

Le problème continu (existence)

Existence sur le disque unité

- Considérons le cas où g est un polynôme trigonométrique, i.e.

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}.$$

- On a alors facilement que

$$(Hg)(re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \text{ et donc } Hg \in \mathcal{C}(\overline{U})$$

- Finalement, prenons une suite g_k de polynômes trigonométriques telle que $\|g_k - f\|_T \xrightarrow{k\to\infty} 0$

- Des considérations précédentes, il vient

$$\begin{aligned} \|Hg_k - Hf\|_{\overline{U}} &= \|H(g_k - f)\|_{\overline{U}} \\ &= \|g_k - f\|_{T} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

- Hf est donc la limite de suites qui convergent uniformément.
- Par suite $Hf \in \mathcal{C}(\overline{U})$. $\square$

On conclut notamment l'existence d'une solution (unique) au problème de Dirichlet posé sur un cercle quelconque.

Définition

On dit qu'une fonction continue u sur un ouvert Ω a la "propriété de la moyenne" si à tout $z \in \Omega$ correspond une suite $\{r_n\}$ de réels > 0 telle que $r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(z + r_n e^{it}\right) dt.$$

Autrement dit, $u(z)$ est la valeur moyenne de u sur le cercle centré en z et de rayon r_n.

- Par tout ce qui précède, on a que si u est harmonique et réelle sur Ω et si $\overline{D}(z, R) \subset \Omega$, alors

$$u\left(z + re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u\left(z + Re^{it}\right) dt$$

Propriété de la moyenne

Condition nécessaire

- $u\left(z + re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u\left(z + Re^{it}\right) dt$
- En particulier, il vient que $\forall R \mid \overline{D}(z, R) \subset \Omega$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(a + Re^{it}\right) dt$$

- Donc si u est harmonique, u vérifie une propriété de la moyenne bien plus forte

Théorème

Si une fonction continue u a la propriété de la moyenne sur un ouvert Ω, alors u est harmonique sur Ω.

- On travaille sur des fonctions réelles u.
- Soit $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$. L'intégrale de Poisson fournit une fonction continue h sur $\overline{D}(a, R)$ telle que
  - h est harmonique sur $D(a, R)$.
  - $h = u$ sur $\partial D(a, R)$.
- On montre que $u = h$ sur $\overline{D}(a, R)$.

ULB

- Soit $v = h - u$, $m = \sup_{\overline{D}(a,R)} v$ et supposons $m > 0$.
- Posons $E = \overline{D}(a, R) \cap v^{-1}(m)$. C'est un fermé dans un compact $\Longrightarrow$ E est compact.
- Donc $\exists z_0 \in E$ tel que $|z_0 - a| \geq |z - a|$.
- Contradiction avec la propriété de la moyenne sur $D(z_0, r)$, r petit.
- Donc $m = 0$, $v \leq 0$ et alors $v = 0 \Leftrightarrow h = u$ sur $\overline{D}(a, R)$. $\square$

Exemple de non-unicité

- Il n'y a pas unicité si Ω est non borné !
- Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D(0,1)$.
- Soit $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x$.
- Les fonctions $u_1 : (x,y) \longmapsto x$ et $u_2 : (x,y) \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2}$ coïncident sur $\partial\Omega$ et sont harmoniques sur Ω !

Exemple de non-existence

- Contrairement au cas discret, il n'y a pas toujours existence d'une solution !
- Soit le problème de Dirichlet suivant :

Soit $\Omega = D(0,1) \setminus \{0\}$ (donc $\partial\Omega = \partial D(0,1) \cup \{0\}$).
On cherche u qui vérifie les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial D(0,1) \\ u = 1 & \text{sur } \{0\} \end{cases}$$

- Si un tel u existe, il se prolonge facilement en $\tilde{u}$ harmonique sur $D(0,1)$.
- Par le principe du min-max, $\tilde{u} = 0$ sur $D(0,1)$.
- Donc $u = 0$ sur Ω, ce qui viole la continuité.

Exemple d'application : l'équation de la chaleur

- On considère un disque en métal.
- Sur le bord du disque, on donne une distribution de chaleur f constante au cours du temps.
- Une question fréquente est de connaître la température en chaque point du disque.
- Le problème consiste alors à trouver u tel que

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{sur } D(0,1) \\ u = f & \text{sur } \partial D(0,1) \end{cases}$$

- On a trouvé la forme explicite de ce problème.
- Il y a donc un seul équilibre thermique possible.

- Sur le disque pointé, aucun équilibre n'est possible !

ULB

Résumé

- On a démontré l'existence et l'unicité dans le cas discret.
- On a démontré qu'il y a toujours unicité dans le cas continu.
- On a démontré l'existence dans le cas d'un domaine circulaire.
- On a montré la propriété de la moyenne, ainsi que son équivalence avec l'harmonicité.
- On a donné certains contre-exemples et un moyen d'application.

Bibliography

I. Chalendar
Analyse fonctionnelle : Fonctions Harmoniques, Classe de Nevanlinna, Espaces de Hardy, et une introduction aux operateurs de Toeplitz et de Hankel
2008.

W. Rudin.
Real and Complex Analysis.
Tata McGraw-Hill Education, 1987.

G. Stupfler
Fonctions harmoniques et distribution asymptotique des valeurs propres du laplacien (Thèse de mémoire)
2007.

Merci pour votre attention !