

Contenu

Avant-propos	i
Préface	iii
Des solides de Platon BAPTISTE CHANTRAINE	1
Chaînes de Markov et Google SARAH DENDIEVEL, SOPHIE HAUTPHENNE	15
La fibration de Hopf LAURENT LA FUENTE-GRAVY, NAÏM ZENAÏDI	25
Quelques éléments de théorie musicale, du point de vue mathématique PASCAL ZEIHEN	37
À la recherche de primitives NICOLAS RICHARD	57
Groupes de Coxeter et kaléidoscopes : une bal(l)ade de l'autre côté du miroir AUDE NGUYEN	69
Nombres complexes et géométrie CHARLES LEYTEM	85
Remerciements	101

Avant-propos

Créée il y a trois ans durant les vacances académiques de 2008, la *Brussels Summer School of Mathematics (BSSM)* est le seul festival d'été à vocation mathématique dans le paysage culturel belge. À l'instar des organisateurs du *Pukkelpop* ou de *Rock Werchter* nous souhaitons apporter du divertissement au plus grand nombre ; la différence étant qu'au lieu d'assister à des concerts, nos festivaliers assistent à des exposés mathématiques.

Une *BSSM* consiste en une semaine de conférences sur différents sujets en probabilité, géométrie différentielle, statistique, combinatoire, etc. Un accent tout particulier est placé sur l'interactivité avec le public tout au long des exposés. Les orateurs sont tantôt des scientifiques aguerris et internationalement reconnus, tantôt des doctorants, des post-doctorants ou de jeunes docteurs issus des filières mathématiques ou physiques de l'ULB. L'école est ouverte à tous, sans hiérarchie de diplôme ou de qualification ; l'envie de venir est le seul critère de sélection que nous appliquons. Loin des mathématiques scolaires et peut-être trop rigides, nous cherchons ici à proposer des exposés décontractés et interactifs, au cours desquels le public peut découvrir une facette inattendue et passionnante d'une discipline souvent associée – à tort – à une certaine idée de l'ennui.

Nous sommes convaincus que le fait de voir des passionnés témoigner de leur métier avec enthousiasme ne peut qu'attirer un grand intérêt de la part d'un public trop souvent imperméable à la beauté de cette science, qu'il considère comme élitiste et éloignée de l'intérêt commun. Notre entreprise, si naïve et idéaliste soit elle, a donc pour but d'intéresser « les gens » à nos partitions mathématiques qui ne sont pas faites d'une litanie de formules sans sens ni intérêt, mais au contraire d'idées et de concepts dont la simplicité, si elle est convenablement expliquée, peut surprendre et intéresser même le public le plus réfractaire.

Christophe Ley
Yvik Swan
Germain Van Bever
Organisateurs

Préface

*The study of mathematics, like the Nile, begins in minuteness
but ends in magnificence.*
C.C. Colton (1780–1832)

Cet ouvrage rassemble les notes rédigées par les orateurs qui nous ont fait l'honneur de participer à la 3^e édition de la *Brussels Summer School of Mathematics (BSSM)*¹. Ces chercheurs confirmés ou débutants nous ont fait voyager, une semaine durant, d'une théorie mathématique à une autre, voguant au gré de leurs discours de la théorie des transfinis de Cantor à l'étude des distributions stationnaires de chaînes de Markov, en passant par le chaos et la théorie des immeubles, pour n'en citer que quelques-uns. Nous cherchons à recréer, dans ces pages, l'esprit de cette semaine qui fut riche en découvertes humaines et mathématiques. Le lecteur est invité à s'y plonger, par petites touches ou d'une traite, et ainsi à partager notre passion pour un monde encore mal connu. Plus encore qu'une introduction à une quelconque théorie, ces notes sont à lire comme une invitation au voyage dans un univers où les mathématiques ne sont plus un étranger au sabir incompréhensible, mais un conteur d'une bien belle histoire du monde.

Une vaste palette d'outils est abordée dans ces notes, et il n'y a, en particulier, que peu voire pas de lien d'un article à l'autre. Que le lecteur se rassure ! Il n'est évidemment pas attendu qu'il soit un expert dans tous les domaines mathématiques, et nous avons veillé à ce que même un néophyte puisse promener son esprit sans trop de danger parmi les objets présentés. Qu'il soit mathématicien confirmé ou débutant, professionnel ou simple amateur, le lecteur aura l'occasion, au fil des pages qui suivent, de visiter un bestiaire d'un genre nouveau, à la découverte d'objets et de créatures exotiques tels des icosaèdres dans lesquels on a creusé des puits et des vallées, des surfeurs aléatoires à la recherche de stationnarité, des œuvres primitives sans formule ou de la musique sans instrument.

Les pages qui suivent contiennent des notions avancées de probabilité, de topologie, de géométrie, de géométrie différentielle, d'algèbre et d'analyse. Chaque

1. Une *BSSM* durant 5 jours, à raison de 3 exposés par jour, un lecteur attentif connaissant sa table de 3 aura déjà remarqué que tous les exposés ne se retrouvent pas dans ce livre. Outre les auteurs de ces articles, nous avons également eu la chance d'écouter des exposés menés de main de maître par le Prof. Francis Buekenhout, les (récents) Drs. Céline Engelbeen et Maude Gathy, le Dr. Thierry Libert, ainsi que les futurs docteurs Jean Gutt, Cédric Troessart, Yves Dominicy et Kamel Alj.

article est d'un niveau relativement poussé, et est la résultante de la connaissance profonde qu'ont nos orateurs de leur discipline de prédilection. Ce livre constitue donc une sorte de guide touristique au travers de diverses régions du royaume mathématique. Le lecteur attentif remarquera peut-être des raccourcis ou des omissions ; nous le prions de ne pas s'en offusquer. Nous avons tenté, dans la mesure du possible, de contourner les difficultés techniques qui, loin d'apporter de l'intérêt au propos, en diluent le message dans l'océan de la technicité. Nous remercions les auteurs, dont pour certains il s'agit du premier article de type scientifique qu'ils rédigent, d'avoir fait l'effort de s'abstraire de l'abstrait pour dégager l'essence du sujet dont ils nous ont parlé.

Il n'est pas question de trouver ci-après des mathématiques « utiles », si leur utilité est à jager à l'aune de leur applicabilité lors d'un examen quelconque. Au contraire ce sont, simplement, de jolis concepts présentés de la façon la plus élémentaire possible. Nous ne cherchons pas à donner un traitement définitif de tel ou tel sujet. Nous souhaitons, plus modestement, apporter au lecteur un angle frais et neuf sur une discipline souvent considérée comme rébarbative. La lecture de cet ouvrage ne constitue, par conséquent, qu'un premier pas dans une bonne direction ; le lecteur intéressé de pousser plus loin la découverte est invité soit à consulter les ouvrages référencés dans les bibliographies attachées à chacun des articles soit, et c'est là que réside le fondement de notre métier, à venir discuter de ses questions avec nous, les mathématiciens.

Christophe Ley
Nicolas Richard
Yvik Swan
Éditeurs

Des solides de Platon

Baptiste Chantraine*
bchantra@ulb.ac.be

Résumé

Le but de ces notes est de mener le lecteur à une démonstration de la classification des polyèdres réguliers convexes en utilisant la caractéristique d'Euler d'une surface; cette démonstration n'étant finalement qu'un prétexte pour donner une introduction à la topologie des surfaces. L'article est articulé autour de nombreux exercices permettant au lecteur de développer son intuition en topologie et finalement résoudre le problème de la classification de solides de Platon. Dans un premier lieu, on retrouvera l'observation d'Euler que la somme du nombre de sommets avec la différence entre le nombre de faces et d'arêtes d'un polyèdre régulier convexe est constante. Des notions de théorie des surfaces sont ensuite introduites afin de définir le concept de caractéristique d'Euler, grâce à quoi nous prouvons que l'observation d'Euler provient d'une propriété topologique de la sphère et non de la géométrie des polyèdres. Cette dernière remarque permet de voir que l'observation d'Euler est suffisante pour compléter la classification des polyèdres réguliers convexes.

Sommaire

1	Introduction	2
2	Définitions et exemples de surfaces	4
3	Décomposition d'une surface	7
4	Classification des polyèdres réguliers	10
5	Solutions des exercices.	11

*L'auteur est Chargé de Recherches du FNRS auprès du Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles. Il est titulaire d'un Doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université de Montréal (Québec), et d'une Maîtrise de Mathématiques de l'Université de Savoie (France). Il travaille en géométrie de contact et symplectique; a sauvé la veuve et l'orphelin de multiples naufrages et a vu des rayons C briller dans l'obscurité près du portail de Tannhauser.

1 Introduction

Dans cet article nous introduisons des notions de topologie par le truchement d'un problème bien particulier, à savoir la classification des polyèdres réguliers convexes, peut-être mieux connus sous le nom de *solides de Platon*. Ce résultat, tellement ancien qu'on en retrouve des traces jusqu'en Grèce antique, stipule qu'il n'existe que 5 telles formes géométriques, à savoir le cube, le tétraèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Dans cet article nous montrons que cette observation provient de propriétés topologiques des surfaces.

L'objectif de cet article n'est pas de constituer un texte de référence sur le sujet, mais plutôt de stimuler l'imagination et l'intuition du lecteur. Il est constitué d'une succession d'exercices, chacun étant accompagné des définitions et explications nécessaires à sa compréhension, amenant le lecteur à la classification des polyèdres réguliers convexes par le biais des propriétés topologiques des surfaces. Le lecteur est invité à résoudre ces exercices, au moins intuitivement, avant de se référer aux réponses en fin de texte.

Ainsi, après avoir défini la notion de polyèdre régulier, nous définirons à la section 2 la notion de surface. Dans la section 3, nous parlerons de la notion de décomposition d'une surface et définirons la caractéristique d'Euler. Cette section sera un survol du sujet et ne contiendra pas de preuves rigoureuses. Un lecteur intéressé pourra se référer à une référence plus sérieuse, la matière étant couverte dans n'importe quel livre sur la topologie des surfaces. En dernier lieu (section 4), nous utiliserons la caractéristique d'Euler pour conclure la classification des polyèdres réguliers convexes.

Commençons tout d'abord par donner la définition d'un polyèdre régulier.

Définition 1. Un *polyèdre régulier convexe* est un solide P dans l'espace tel que :

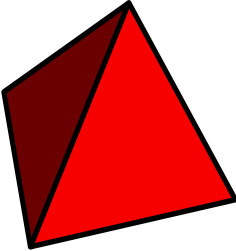
1. Toutes les faces sont des polygones réguliers identiques.
2. Tous les sommets sont identiques (i.e. le même nombre d'arêtes se rencontrent à chaque sommet).
3. Si $p, q \in P$ alors le segment $[p, q]$ est contenu à l'intérieur de P .

Les 3 conditions apparaissant dans la définition garantissent que le groupe de symétrie du solide est transitif sur les faces, les arêtes et les sommets. En termes moins sophistiqués, quelle que soit la manière de regarder un polyèdre régulier, vous voyez la même chose. Imaginons un dé sur lequel aucun chiffre n'est inscrit. Lancez ce dé. Quelle que soit la manière qu'il a de tomber vous voyez la même chose. Le dé est donc un polyèdre régulier (vous pouvez facilement vérifier qu'il satisfait les trois conditions de la définition précédente).

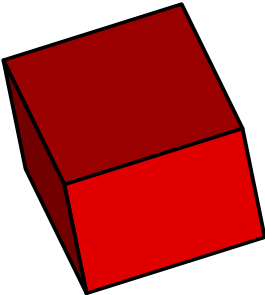
Sur la figure 1 vous pouvez voir 5 polyèdres réguliers convexes, ils sont appelés les *solides de Platon*.

On note F , A et S le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre régulier.

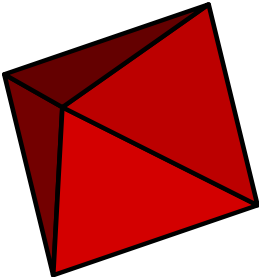
Exercice I. Pour chacun des solides de Platon, calculez le nombre $S - A + F$. Que remarquez-vous ?



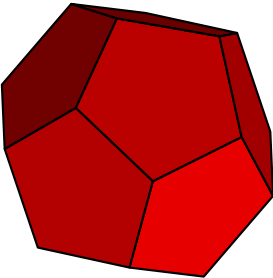
Tétraèdre



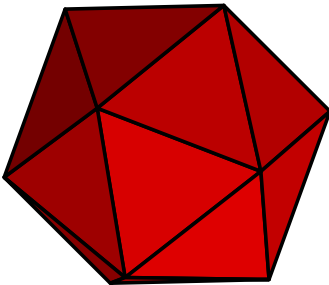
Cube



Octaèdre



Dodécaèdre



Icosaèdre

FIGURE 1 — Les solides de Platon

La formule calculée à l'exercice I est appelée la *formule d'Euler*. Nous verrons qu'elle provient en fait de propriétés topologiques des surfaces et non de la géométrie des polyèdres. Elle est suffisante pour démontrer la classification des polyèdres réguliers convexes (voir section 4).

2 Définitions et exemples de surfaces

Avant de donner la définition d'une surface, nous devons introduire les notions d'espace métrique et d'homéomorphisme.

Définition 2. Une *distance* sur un ensemble X est une fonction

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

1. $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;
3. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un couple (X, d) où d est une distance sur X est appelé un *espace métrique*.

Exemple. 1. Sur \mathbb{R} , la fonction d définie par $d(x, y) = |x - y|$ est une distance.

2. Sur \mathbb{R}^3 , la formule

$$d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad (1)$$

définit une distance.

3. Sur X quelconque, la fonction

$$d_{\text{discret}}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}: d_{\text{discret}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance.

Définition 3. Soient (X, d) un espace métrique, $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. La *boule ouverte de rayon ε centrée en x* est l'ensemble

$$B(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Définition 4. Soit $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une application entre deux espaces métriques.

1. On dit que f est *continue* en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ t.q. } d_X(x_0, x) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

2. On dit que f est *continue* si f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in X$.

Cette définition fait partie des définitions difficiles à saisir dès le premier abord dans un cours de topologie ou d'analyse. Pour développer une intuition du sens de celle-ci, résolvez l'exercice suivant :

Exercice II. Écrivez la condition qu'une fonction f ne soit pas continue en x_0 . Dessinez le graphe d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui n'est pas continue en 0.

Intuitivement, une fonction pas continue en x_0 semble devoir « déchirer » l'espace en x_0 . On peut donc imaginer les fonctions continues comme étant les déformations que l'on peut faire de notre espace sans le déchirer s'il était fait de pâte à modeler élastique (à l'infini).

Définition 5. Une fonction $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est un *homéomorphisme* si

1. f est continue ;
2. f est bijective ;
3. f^{-1} est continue.

Remarque. La condition 3 n'est pas superflue, bien qu'elle le semble de part notre intuition. Par exemple la fonction identité $\text{Id}: (\mathbb{R}, d_{\text{discret}}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ est continue mais son inverse n'est pas continue (la vérification est un bon exercice). Il existe donc des distances telles que certaines applications ne « déchirent » l'espace que dans un seul sens !

Remarque. On utilise le symbole \simeq pour désigner un homéomorphisme. Plus précisément, $X \simeq Y$ sous-entend qu'il existe un homéomorphisme $f: X \rightarrow Y$, et $f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ sous-entend que f est un homéomorphisme.

Nous sommes désormais en mesure de donner la définition d'une surface.

Définition 6. Une *surface* Σ est un espace métrique paracompact tel que

$$\forall p \in \Sigma, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B(p, \varepsilon) \text{ est homéomorphe à } D^2$$

où $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 < 1\}$.

Une surface est un espace tel que si nous nous imaginons « petits » sur la surface et que nous regardons autour de nous, nous avons l'impression d'être sur un plan. Un exemple explicite de surface est la terre, les humains étant très petits par rapport à la terre ont longtemps cru vivre sur un disque. Nous savons maintenant que ce n'est pas le cas.

On ne définira pas la notion de paracompact apparaissant dans la définition. C'est une condition technique qui permet que certains espaces « sauvages » ne soient pas des surfaces. La subtilité de la présence ou non de cette condition ne sera pas apparente dans le document.

Exercice III. Regroupez les surfaces de la figure 2 en classes d'homéomorphisme.

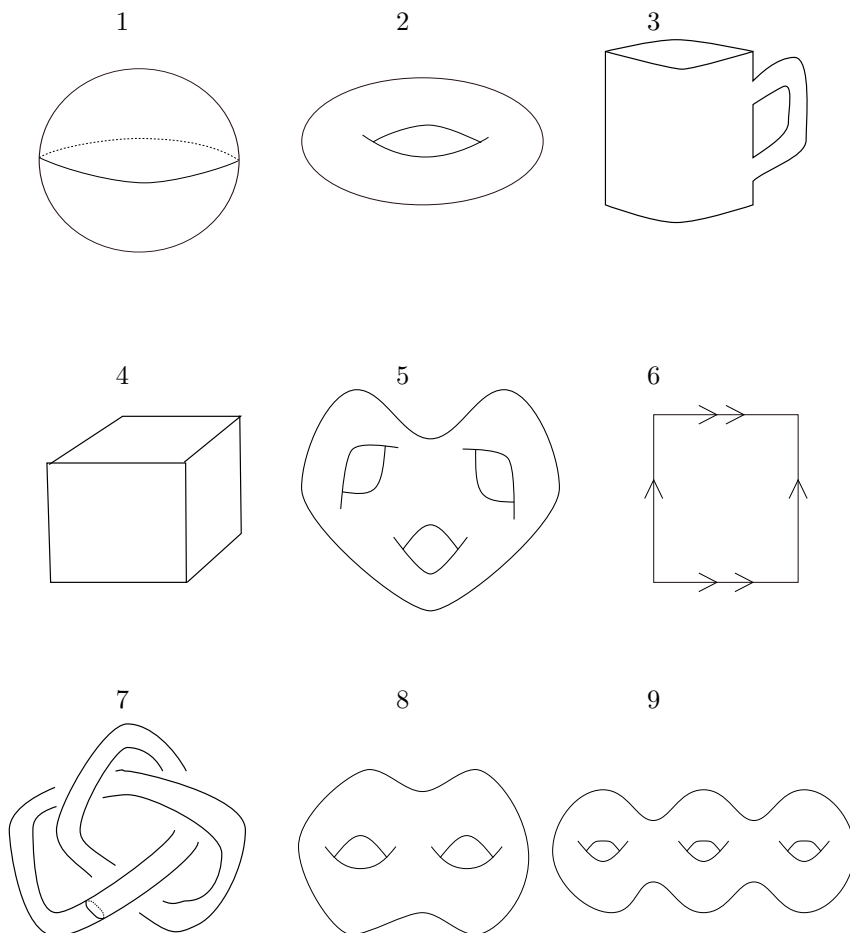


FIGURE 2 — Exemples de surfaces

Des explications sont peut-être nécessaires pour les dessins 3 et 6 de la figure 2.

Afin de pouvoir considérer la tasse comme une surface sans bord, l'intérieur et l'extérieur ne font pas partie des mêmes points. Le bord de la tasse n'est pas un cercle mais un bout de surface très courbé.

Dans le dessin 6, nous avons un carré et les flèches donnent une identification du bord. Imaginez un tel carré de pâte à modeler et recollez les bords suivant les flèches. Une feuille de papier est suffisante pour le premier recollement mais pour le deuxième vous devez « déformer » votre matière, ce qu'une feuille de

papier ne vous autorise pas à faire (un initié verra dans ce fait une manifestation de la différence entre la topologie et la géométrie).

3 Décomposition d'une surface

Définition 7. Soit Σ une surface. Une *décomposition* (finie) de Σ est une partition

$$\Sigma = \mathcal{S} \sqcup \mathcal{A} \sqcup \mathcal{F} \quad (2)$$

telle que

1. $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_S\}$, avec $x_i \in \Sigma$ et $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Les x_i sont appelés les *sommets* de la décomposition.
2. $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_A\}$, avec $e_i \subset \Sigma$ et $e_i \cap e_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et tel que $\forall i \exists f_i: [0, 1] \rightarrow \Sigma$ continue tel que $f_i(0), f_i(1) \in \mathcal{S}$ et $f_i|_{(0,1)}: (0, 1) \xrightarrow{\cong} e_i$. Les e_i sont appelés les *arêtes* de la décomposition.
3. $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_F\}$ et $f_i \cap f_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $f_i \simeq D^2$. Les f_i sont appelés les *faces* de la décomposition.

Exemple. La figure 3 donne un exemple de décomposition de la sphère.

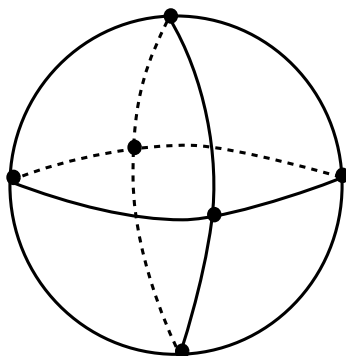


FIGURE 3 — Une décomposition de la sphère

Avant d'étudier plus précisément les décompositions des surfaces, nous devons vérifier qu'une telle décomposition existe.

Proposition 8. *Toute surface compacte admet une décomposition finie.*

Nous ne donnerons pas la définition de compact. C'est une certaine condition de « finitude » pour les espaces métriques. On peut imaginer une surface

compacte comme étant une surface « bornée » sans bord. La condition est cependant nécessaire pour avoir le résultat ; en effet, imaginez par exemple une surface qui s'en va à l'infini et qui possède une infinité de « trous » (voir figure 4). Nous ne pouvons pas obtenir une décomposition finie de celle-ci car nous devons découper chaque trou afin d'obtenir des faces.

Nous ne donnerons pas de preuve de la proposition 8. Par contre, nous allons donner une idée intuitive de comment trouver une telle décomposition.

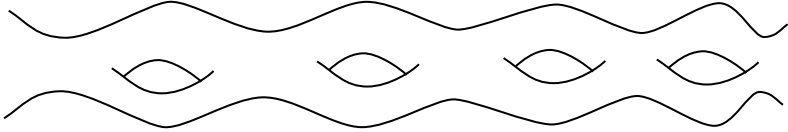


FIGURE 4 — Une surface avec une infinité de trous

Idée de preuve. Imaginons que vous observez un « écoulement » sur votre surface. Par exemple dessinez une surface dans \mathbb{R}^3 et observez de l'eau couler sur celle-ci. Si la surface est mise en position suffisamment générale, vous observez trois types de points où l'eau est stable (voir figure 5).

1. Les puits : toutes les gouttes proches du puits coulent vers le puits.
2. Les selles : une ligne de gouttes coule vers la selle, et une ligne de gouttes part de la selle. Celles qui partent de la selle vont s'écouler vers un puits.
3. Les sources : toutes les gouttes proches de la source partent de celle-ci et vont s'écouler vers une selle ou un puits.

À un tel dessin nous pouvons associer une décomposition de Σ . Les puits correspondent aux sommets, les selles ainsi que les gouttes qui partent de celles-ci correspondent aux arêtes, les sources et les gouttes qui partent de celles-ci correspondent aux faces.

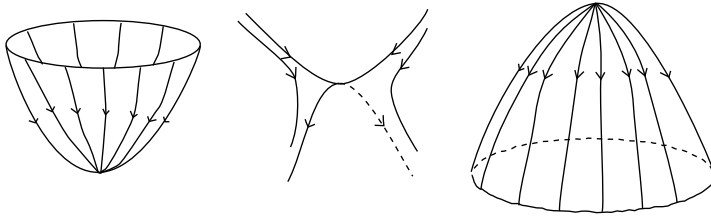


FIGURE 5 — Les différents points stables d'un écoulement sur une surface

Exercice IV. Trouvez la décomposition de la sphère donnée par le dessin de la figure 6.

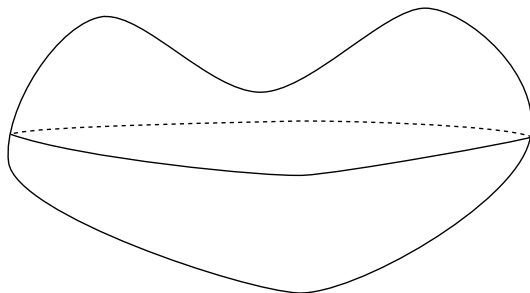


FIGURE 6 — Une sphère dans \mathbb{R}^3

Définition 9. Soit D une décomposition d'une surface Σ . La *caractéristique d'Euler* de D est le nombre

$$\chi(D) \stackrel{\text{def}}{=} F - A + S$$

où $F = \#\mathcal{F}$, $A = \#\mathcal{A}$ et $S = \#\mathcal{S}$.

Exercice V. Calculez la caractéristique d'Euler des décompositions des surfaces données dans la figure 7. Que remarquez-vous?

L'observation précédente est formalisée par le théorème suivant :

Théorème 10 (Euler-Poincaré). Soient D_1 et D_2 deux décompositions d'une même surface. Alors

$$\chi(D_1) = \chi(D_2). \quad (3)$$

Le théorème 10 ainsi que la proposition 8 nous permettent de proposer la définition suivante.

Définition 11. Soit Σ une surface compacte. La *caractéristique d'Euler* de Σ est

$$\chi(\Sigma) = \chi(D) \quad (4)$$

où D est une décomposition de Σ .

La proposition 8 nous garantit l'existence d'une telle décomposition et le théorème 10 nous dit que la définition ne dépend pas du choix de la décomposition. Nous ne donnons pas de preuve du théorème 10.

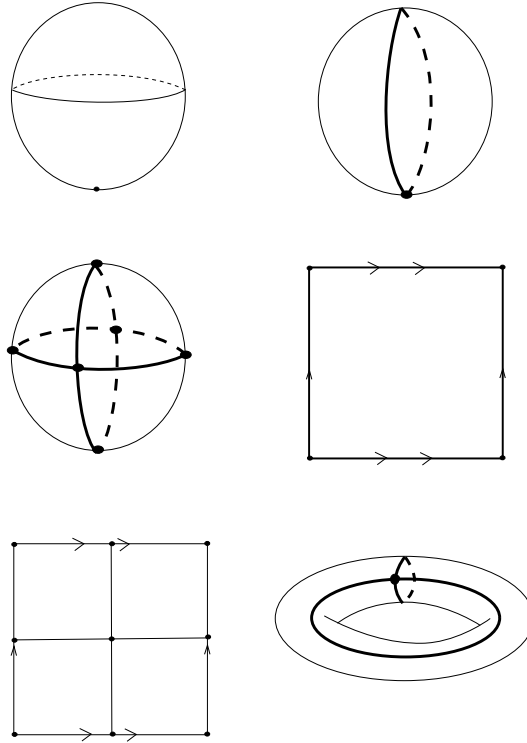


FIGURE 7 — Quelques décompositions de la sphère et du tore.

4 Classification des polyèdres réguliers

Revenons maintenant aux polyèdres réguliers. Un polyèdre P régulier convexe nous donne une décomposition de la sphère de la manière suivante : plaçons P de sorte qu'il contienne $0 \in \mathbb{R}^3$ et qu'il soit lui-même à l'intérieur de la sphère unité (il faut peut-être transformer P par une homothétie de sorte qu'il soit suffisamment petit). Définissons $f: P \rightarrow \mathbf{S}^2$ de la manière suivante : pour un point $p \in P$, traçons la demi-droite qui part de 0 et passe par p , et définissons $f(p)$ comme étant l'intersection de cette demi-droite avec \mathbf{S}^2 (voir figure 8).

Exercice VI.

1. Montrez que f est bien définie.
2. Montrez que f est injective et surjective.
3. Montrez que f est continue.

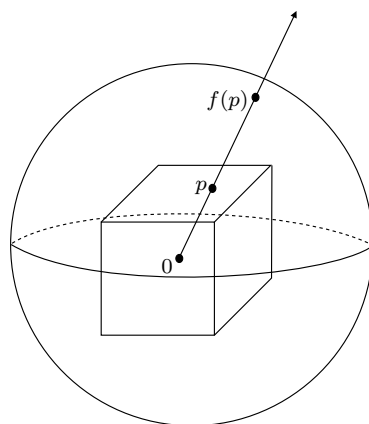


FIGURE 8 — Un homéomorphisme entre un polyèdre convexe et la sphère.

Notez l'importance de la condition de convexité dans cet exercice !

Ainsi, chaque polyèdre régulier donne une décomposition de la sphère où les sommets, les arêtes et les faces de la décomposition sont les images par f des sommets, arêtes et faces de P .

Maintenant soit P un polyèdre régulier de sorte que chaque face ait n arêtes et que de chaque sommet partent m arêtes.

Exercice VII.

1. Montrez que $nF = 2A$ et $mS = 2A$.
2. Utilisez le théorème 10 pour démontrer que $\frac{2}{A} + 1 = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$.
3. Déduisez-en que $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$.
4. De $n \geq 3$, déduisez-en que $m < 6$.
5. Concluez qu'il n'y a que 5 possibilités pour les couples (n, m) .

Ces 5 possibilités sont précisément les valeurs de (n, m) pour les solides de Platon. Vous avez donc démontré que les seuls polyèdres réguliers convexes sont les 5 solides de Platon !

5 Solutions des exercices.

Dans cette section nous discutons les solutions de certains des exercices. Nous nous contentons de donner des indications pour les exercices plus simples ou demandant simplement une solution intuitive. Certaines solutions complètes demanderaient un exposé plus détaillé de la matière.

Exercice I. Une manière efficace de dénombrer les arêtes et les sommets d'un polyèdre en connaissant le nombre et le type de faces est la suivante :

Supposons que chaque face soit un n -gone régulier. Alors chaque face touche n arêtes. Cependant chaque arête touche deux faces, donc le nombre nF correspond à $2A$.

De la même manière, si de chaque sommet partent m arêtes, chaque sommet touche m arêtes. Mais chaque arête touche deux sommets donc $mS = 2F = \frac{4A}{n}$. Nous obtenons donc :

1. Tétraèdre : $F = 4, A = 6, S = 4$.
2. Cube : $F = 6, A = 12, S = 8$.
3. Octaèdre : $F = 8, A = 12, S = 6$.
4. Dodécaèdre : $F = 12, A = 30, S = 20$.
5. Icosaèdre : $F = 20, A = 30, S = 12$.

Dans les 5 cas on trouve $S - A + F = 2$.

Exercice II. Il suffit de nier la phrase logique de la continuité. On rappelle que pour nier les phrases logiques on transforme les \exists en \forall , les \forall en \exists et les $(A \implies B)$ en $(A \text{ et non } B)$. Donc f n'est pas continue en x_0 si $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0 \exists y \in X$ tel que $d(x_0, y) < \delta$ et $d(f(x_0), f(y)) > \varepsilon$. En français, cela veut dire qu'il existe des points aussi proches que l'on veut de x_0 (loin étant à une distance plus grande que ε). Cela se représente dans les réels par un « saut » dans le graphe de la fonction. On peut imaginer une « déchirure » de notre espace.

Exercice III. Les surfaces 1 et 4 sont homéomorphes. Les surfaces 2, 3, 6 et 7 sont homéomorphes. La surface 8 n'est homéomorphe à aucune autre. Finalement les surfaces 5 et 9 sont homéomorphes.

Probablement le fait que la surface 7 soit homéomorphe à la surface 2 est surprenant. En effet, on ne semble pas être en mesure de déformer l'une vers l'autre. C'est en fait une limitation de notre esprit, on veut déformer ces deux surfaces dans l'espace tri-dimensionnel dans lequel on les a représentées. Cependant, une surface est un objet abstrait qui existe indépendamment de l'espace dans lequel on le représente. Découper la surface 7 le long du lacet dessiné permet de « dénouer » celle-ci et de voir un cylindre, lequel cylindre apparaît après la première identification dans la surface 6. Il existe diverses manières de voir que les surfaces sont les mêmes. Vous pouvez par exemple aussi essayer de déformer l'une vers l'autre et quand vous êtes obligés de « superposer » deux points vous pouvez utiliser une éventuelle quatrième dimension...

Finalement, nous n'avons pas montré que les surfaces de différents groupes ne sont pas homéomorphes. L'intuition nous dicte que deux surfaces homéomorphes doivent avoir le même nombre de « trous ». Cependant la notion de trou n'est pas rigoureusement définie ici. Nous verrons dans la suite de l'exposé un invariant de surface qui permet de distinguer ces différents groupes (la caractéristique d'Euler, voir section 3).

Exercice IV. On observe 2 sources, 1 selle et 1 puits. La décomposition obtenue est en fait la deuxième de la figure 7.

Exercice V.

1. On trouve $S = 1, A = 0$ et $F = 1$ et donc $\chi = 2$.
2. On trouve $S = 1, A = 1$ et $F = 2$ et donc $\chi = 2$.
3. On trouve $S = 6, A = 8$ et $F = 4$ et donc $\chi = 2$.
4. On trouve $S = 1, A = 2$ et $F = 1$ et donc $\chi = 0$ (attention aux arêtes et sommets identifiés que l'on ne compte qu'une seule fois!).
5. On trouve $S = 4, A = 8$ et $F = 4$ et donc $\chi = 0$.
6. On trouve $S = 1, A = 2$ et $F = 1$ et donc $\chi = 0$ (c'est en fait la même que la quatrième après identification).

Exercice VI.

1. N'importe quelle demi-droite issue de l'origine est paramétrisée par tv avec $t \in [0, \infty)$ et $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Et $tv \in \mathbf{S}^2$ si et seulement si $\|tv\| = 1$, i.e. $t = 1/\|v\|$. Donc f est bien définie.
2. Supposez que deux points p_1, p_2 de P sont envoyés sur le même point p de la sphère. Que pouvez-vous dire du segment $[p_1, p_2]$? Quelle partie de la définition de polyèdre convexe ceci contredit-il? Pour la surjectivité remarquez que le segment reliant un point de la sphère à 0 doit intersecter P puisque le point de la sphère est à l'extérieur de P et 0 est à l'intérieur.
3. La fonction f est en fait une restriction d'une fonction de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sur \mathbf{S}^2 qui à un vecteur v associe $v/\|v\|$. Une telle fonction est continue. La restriction d'une fonction continue à un sous-espace est continue.

Exercice VII.

1. C'est exactement l'argument du premier exercice pour compter le nombre d'arêtes et de sommets.
2. On a remarqué dans l'exercice V que $\chi(\mathbf{S}^2) = 2$ et donc $S - A + F = 2$. Il suffit maintenant de remplacer S et F par les valeurs trouvées à la question précédente.
3. Il suffit d'utiliser le fait que $A > 0$.
4. $n \geq 3 \implies -1/n \geq -1/3$.
5. Par la question précédente (et par symétrie de m et n), on obtient que m et n ne peuvent prendre que les valeurs 3, 4 et 5. Pour chacun des 9 couples (m, n) on calcule le nombre d'arêtes (à partir de la formule de la question 2) et on obtient le tableau suivant :

$m \backslash n$	3	4	5
3	6	12	30
4	12	0	-20
5	30	-20	-10

Le nombre d'arêtes doit évidemment être un nombre strictement positif; il n'y a donc que 5 couples possibles.

Chaînes de Markov et Google

Sarah Dendievel*
sdendiev@ulb.ac.be

Sophie Hautphenne**
sophiemh@unimelb.edu.au

Résumé

Les notes qui suivent résument un exposé consacré à l'étude de l'algorithme de classification des pages web par le moteur de recherche Google. L'objectif principal de notre exposé n'est pas d'entrer dans les détails du fonctionnement de cet algorithme, mais plutôt de l'utiliser comme excuse pour introduire une théorie mathématique importante : la théorie des chaînes de Markov. Dans ces notes vous ne trouverez toutefois pas une introduction rigoureuse, mais plutôt une source d'intuition sur le sujet. Nous ne présentons en effet que les résultats nécessaires à la compréhension de l'algorithme, généralement sans preuve. Un lecteur intéressé de pousser plus en avant son étude de cette branche des probabilités trouvera certainement satisfaction dans l'excellent livre de Nelson (1995).

Sommaire

1	Introduction	16
2	Définitions et propriétés	17
3	Loi stationnaire	19
4	Application au moteur de recherche Google	20
5	Bibliographie	24

*Sarah Dendievel est Assistante au Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles. Elle est titulaire d'une Licence en Sciences Mathématiques de l'Université de Mons-Hainaut. Elle travaille dans le domaine des probabilités appliquées, plus précisément sur des questions de sensibilité des processus QBD.

**Sophie Hautphenne est chercheur post-doctoral à l'Université de Melbourne (Australie). Elle est titulaire d'un Doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles, et travaille dans le domaine des probabilités appliquées, plus précisément sur la modélisation stochastique de systèmes biologiques et de télécommunications (processus de branchement, files d'attente, files fluides, . . .).

1 Introduction

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires X_0, \dots, X_n, \dots qui décrit l'évolution au cours du temps d'un phénomène aléatoire. Toutes ces variables aléatoires prennent donc leurs valeurs dans le même ensemble, que nous appelons l'*espace des états* associé.

Exemple. Tout phénomène dynamique (i.e. tout phénomène dont l'état évolue au cours du temps) peut être modélisé grâce à un processus aléatoire :

1. En météorologie, on peut définir X_n comme étant la température (en degré Celsius, par exemple) en un lieu donné au jour n ; l'espace des états associé est l'intervalle $E = [-273,15 ; +\infty)$.
2. En assurance, X_n peut être le montant total des indemnités versées par une compagnie d'assurance pour des sinistres survenus le mois n ; sans hypothèses supplémentaires l'espace des états associé est $E = \mathbb{R}^+$.
3. Au cours d'un jeu de dé, X_n peut être le nombre affiché au n^{e} lancer ; l'espace des états associé est $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
4. En épidémiologie, X_n peut compter le nombre d'individus infectés par une maladie contagieuse au bout de n jours ; l'espace des états associé est

$$E = \{0, 1, 2, \dots, 6\,903\,176\,226^1\}.$$

Il est bien entendu possible et utile de construire des processus indexés en temps continu. Nous n'en parlerons pas ici, car leur étude nécessiterait des outils trop développés. Pour la même raison nous nous restreindrons à l'étude de processus aléatoires dont l'espace des états est de cardinal fini.

L'intérêt d'une modélisation mathématique d'un phénomène dynamique via un processus aléatoire est de pouvoir prédire –avec plus ou moins de précision– l'état futur en fonction d'informations sur le passé. Si l'état, au n^{e} instant, est totalement indépendant du passé, alors il est impossible de prédire quoi que ce soit ; ce cas n'a donc aucun intérêt. Nous aurons donc à cœur d'étudier des phénomènes pour lesquels il y a une certaine dépendance entre le futur et le passé. Malheureusement si cette dépendance est trop forte, la description devient infiniment compliquée et il devient mathématiquement impossible de prédire quoi que ce soit. Il nous faut donc regarder des situations où (i) il y a dépendance entre X_n et X_1, \dots, X_{n-1} , mais (ii) cette dépendance est facile à étudier. Il existe une famille de processus qui satisfait ces deux contraintes et qui, de plus, s'est révélée d'un grand intérêt tant du point de vue mathématique que du point de vue des applications. Cette famille est connue aujourd'hui sous le nom de *chaînes de Markov*.

1. population mondiale le 10/02/2011 à 14h24.

2 Définitions et propriétés

Commençons par rappeler la notion de probabilité conditionnelle. Étant donné un événement A de probabilité non-nulle, pour tout événement B , la *probabilité de B sachant A* (ou *conditionnellement à A*), notée $\mathbb{P}(B | A)$, est définie par

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Avec cette définition nous sommes en mesure de définir les *chaînes de Markov*.

Définition 1. Soit X_1, X_2, \dots un processus aléatoire dont l'espace des états, E , est de cardinal fini. Ce processus est une *chaîne de Markov* si pour $n \in \mathbb{N}$ et pour toute valeur des états $i, j, x_0, \dots, x_{n-1} \in E$ on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (1)$$

Interprétons cette définition. L'équation (1) nous enseigne que, pour être une chaîne de Markov, un processus doit jouir d'une propriété de dépendance très particulière : l'état X_{n+1} , à l'instant $n + 1$, ne dépend pas de toutes les variables X_0, \dots, X_n mais seulement de l'état au dernier instant, à savoir de X_n . Cette propriété, appelée *propriété de Markov*, peut se résumer comme suit : *le futur du processus ne dépend de son passé qu'au travers de son présent*. En d'autres termes, la prédiction du futur X_{n+1} , sachant le présent X_n , n'est pas rendue plus précise par l'apport d'informations supplémentaires concernant le passé X_0, \dots, X_{n-1} car toute l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus.

Exemple.

1. Soit X_n le résultat affiché lors du n^{e} lancer d'un dé. Si les lancers se font de manière indépendante, X_n est indépendant de X_1, X_2, \dots, X_{n-1} . Le processus est donc une chaîne de Markov, mais un exemple trivial.
2. Soit S_n la somme des résultats affichés lors des n premiers lancers d'un dé. Alors, bien entendu, la loi de S_{n+1} connaissant S_n ne dépend pas des variables aléatoires S_1, S_2, \dots, S_{n-1} . La suite des S_n forme donc bien une chaîne de Markov non triviale.

Dans la suite nous nous restreindrons aux chaînes de Markov *homogènes*, c'est-à-dire celles dont le mécanisme de transition ne change pas au cours du temps. La propriété de Markov prend alors la forme

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

dont on déduit en particulier l'égalité

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i).$$

Cette dernière égalité nous donne une clé pour l'étude des chaînes de Markov, à savoir l'introduction du concept de matrice de transition.

Définition 2. Le nombre $\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$, noté P_{ij} , est appelé probabilité de transition (en un pas) de l'état i vers l'état j . La matrice $m \times m$ (où $m = \#E$; on note $1, \dots, m$ les éléments de E)

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{pmatrix}$$

est la *matrice des probabilités de transition* de la chaîne de Markov. Cette matrice est *stochastique*, c'est-à-dire que $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1$ et $P_{ij} \geq 0$, pour $i, j \in E$.

La loi d'une chaîne de Markov homogène n'est pas uniquement caractérisée par P , sa matrice de transition. Il nous faut en effet encore connaître le point de départ du processus, à savoir X_0 . Nous introduisons donc la *loi initiale* de la chaîne donnée par

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2), \dots, \mathbb{P}(X_0 = m)).$$

La loi d'une chaîne de Markov est donc caractérisée par le couple $(P, \boldsymbol{\alpha})$.

Exemple. Considérons l'état d'une ligne de téléphone

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si la ligne est libre à l'instant } n, \\ 1 & \text{si la ligne est occupée à l'instant } n. \end{cases}$$

Supposons que sur chaque intervalle de temps, il y a une probabilité p qu'un appel arrive. Si la ligne est déjà occupée, l'appel est perdu. Supposons également que si la ligne est occupée au temps n , il y a une probabilité q qu'elle se libère au temps $n + 1$.

Avec ces hypothèses, nous pouvons modéliser le phénomène via une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0, 1\}$, de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

L'affirmation que la loi du processus est entièrement caractérisée par le couple $(P, \boldsymbol{\alpha})$ n'est pas faite à la légère, comme en témoignent les deux propriétés suivantes.

Propriété 3. Pour $x_0, \dots, x_n \in E$, on a

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{n-1} x_n}.$$

La preuve est laissée en exercice.

Propriété 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i, j \in E$:

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = (P^n)_{ij},$$

où $(P^n)_{ij}$ est la « composante ij » de la n^e puissance de la matrice P .

La preuve est laissée en exercice également.

Cette dernière propriété est particulièrement frappante. En effet, elle nous apprend que pour connaître les possibilités de transition au n^e pas, il nous suffit de regarder les entrées de la n^e puissance de P , la matrice des transitions « one-step ». Le futur du processus est donc entièrement contenu dans P , la matrice qui décrit son premier pas !

Corollaire 5. La loi de X_{n+k} est donnée par

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = j) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_n = i) (P^k)_{ij}.$$

En écriture matricielle, si $p_{n,i} = \mathbb{P}(X_n = i)$ et $\mathbf{p}_n = (p_{n,1}, \dots, p_{n,m})$, nous avons :

$$\mathbf{p}_{n+k} = \mathbf{p}_n P^k.$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X_k = j) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_0 = i) (P^k)_{ij},$$

et

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_0 P^k = \boldsymbol{\alpha} P^k.$$

3 Loi stationnaire

Étudier la distribution de X_n quand $n \rightarrow \infty$ revient à étudier la suite de matrices P^n quand $n \rightarrow \infty$. Le vecteur $\boldsymbol{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n$ (où chaque composante π_i correspond à $\mathbb{P}(X_\infty = i)$, $i \in E$) est appelé la *distribution stationnaire* du processus si $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$ (ou autrement dit, si $\boldsymbol{\pi}^t \mathbf{1} = 1$ avec $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$). Remarquons qu'en prenant $k = 1$ dans le corollaire 5 ci-dessus, nous avons $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n P$ et en prenant la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, nous obtenons que $\boldsymbol{\pi}$ peut aussi se caractériser par l'équation de point fixe $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$ (c'est-à-dire $\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}$, quel que soit $j \in E$).

La question qui se pose est de savoir sous quelles conditions la distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ existe et est unique. Pour y répondre nous énonçons les deux théorèmes suivants sans les démontrer ; il est à noter que leur démonstration est loin d'être triviale.

Théorème 6. Pour que la solution au système linéaire

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}^t \mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

existe et soit unique, il faut et il suffit que la chaîne de Markov soit irréductible (c'est-à-dire que tout état de la chaîne soit atteignable en un ou plusieurs pas, et ce à partir de n'importe quel autre état).

Théorème 7. Soit une chaîne de Markov sur un espace fini, avec pour matrice de transition P . S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que les coefficients de P^k sont tous strictement positifs, alors il existe une unique probabilité stationnaire π . De plus, quelle que soit la distribution initiale $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de la chaîne, on a

$$\pi = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} P^n.$$

Remarquons que la liberté dans le choix de la distribution initiale permet en particulier de prendre $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, $\alpha = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... Ceci implique que $(P^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, quand $n \rightarrow \infty$, vers une matrice dont chaque ligne est l'unique distribution stationnaire π .

Avant de s'attaquer à l'application de ces résultats dans le fonctionnement du moteur de recherche Google, il sera utile de s'entraîner à la manipulation des différentes notions que nous venons de définir via l'exercice suivant.

Exercice I. Un hamster ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était entrain de faire :

- quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante ;
- quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice ;
- le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose ;
- après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir ;
- courir est fatiguant, il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon, il continue son footing !

Questions :

- Représenter le graphe de transition de cette chaîne de Markov.
- Écrire la matrice de transition de la chaîne de Markov.
- En faisant l'hypothèse que le hamster dort lors de la première minute de l'étude, que peut-on prédire au bout d'une minute ? au bout de 2 minutes ? au bout de n minutes ?
- Calculer la distribution stationnaire. Que peut-on en conclure ?

4 Application au moteur de recherche Google

Le moteur de recherche Google a connu un succès fulgurant depuis sa création en 1998. Son point fort est qu'il trie par ordre d'importance les résultats d'une requête, c'est-à-dire les pages web associées aux mots-clés cherchés. L'étonnante

efficacité de cette méthode a fait le succès de Google et la fortune de ses fondateurs, Sergey Brin et Lawrence Page. L'idée, née lors de leur thèse de doctorat, est essentiellement basée sur la résolution d'un grand système d'équations linéaires et, étonnamment, l'algorithme itératif qui en découle est aussi simple que puissant.

La grande innovation apportée par Google en 1998 est le tri des pages par ordre d'importance. Ce qui est frappant est que cet ordre correspond assez précisément aux attentes des utilisateurs. L'importance d'une page doit donc être déterminée de manière automatisée, par un algorithme. Comment est-ce possible ? Le principe fondamental sur lequel repose cet algorithme est l'utilisation d'une particularité des documents *hypertexte* qui composent les différentes pages web que l'on peut trouver sur internet : ils contiennent tous des liens permettant de voyager d'une page vers une autre. Aucune page n'existe donc « seule », et on peut donc considérer le web comme un immense graphe, dont chaque page web i est un sommet et chaque lien $i \rightarrow j$ est une arête.

Dans la suite on numérote les pages par $1, 2, 3, \dots, m$ et on écrit $i \rightarrow j$ si la page i pointe vers la page j (au moins une fois ; on ne compte pas les liens multiples). Ainsi chaque page i émet un certain nombre ℓ_i de liens vers des pages « voisines ». À noter que les arêtes sont orientées : si l'on a $i \rightarrow j$, on n'a pas forcément le sens inverse $j \rightarrow i$.

L'idée est d'associer à chaque page j une mesure d'importance π_j . Plus explicitement, on souhaite que cette mesure soit un nombre réel non négatif avec la convention que plus π_j est grand, plus la page j est « importante ».

Le principe est le suivant : *une page j est importante si beaucoup de pages importantes pointent vers j* . Ainsi on est amené à définir l'importance π_j de manière récursive comme suit :

$$\pi_j = \sum_{i \rightarrow j} \frac{1}{\ell_i} \pi_i. \quad (2)$$

La somme compte chaque lien reçu par j avec poids $\frac{1}{\ell_i} \pi_i$: ceci tient compte de l'importance π_i de la page d'origine i , et du nombre ℓ_i des liens qui en sont émis. Après réflexion, l'équation (2) n'est rien d'autre qu'un système d'équations linéaires. Plus explicitement, pour tout couple d'indices $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, on définit P_{ij} par

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\ell_i} & \text{si } i \rightarrow j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient ainsi une matrice $P = (P_{ij})$, et notre équation s'écrit sous forme matricielle comme

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P.$$

Cette équation linéaire ne nous est pas totalement étrangère : elle ressemble très fort à l'équation de point fixe satisfaite par la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov de matrice de transition P , et ce n'est pas par hasard (exercice : vérifier que P est bien une matrice stochastique).

On peut en effet interpréter les m pages web comme les différents états d'une chaîne de Markov, et la quantité P_{ij} comme la probabilité d'aller de la page i à la page j , en suivant un des ℓ_i liens au hasard.

Notre modèle admet ainsi une étonnante interprétation probabiliste : on peut imaginer un surfeur aléatoire, qui est un utilisateur imaginaire d'internet allant de page en page toujours en avant (c'est-à-dire sans jamais utiliser le bouton retour à la page précédente) et qui, lorsqu'il ouvre une page, choisit pour aller à la suivante un lien au hasard sur la page affichée. Ce choix s'opère en tirant au sort l'un des liens présents sur la page courante, sans en favoriser aucun.

Un tel surfeur imaginaire qui parcourt indéfiniment Internet passera plus de temps sur les pages citées par un grand nombre de pages (i.e. les pages importantes), et moins sur les autres. La quantité π_j n'est donc rien d'autre que la probabilité asymptotique que le surfeur aléatoire se retrouve sur la page j , c'est-à-dire la probabilité stationnaire de l'état j de la chaîne de Markov.

Le vecteur de distribution stationnaire de la chaîne de Markov est donc un excellent candidat pour la classification des pages web. Soulignons donc que ce n'est pas le contenu des pages web qui est pris en compte pour le calcul de « l'importance », mais uniquement la structure du graphe formé par les pages et les liens entre elles.

Rappelons néanmoins que le vecteur π de distribution stationnaire n'existe de manière unique que si la chaîne de Markov est irréductible. Or, dans le cas où les états de la chaîne correspondent à des pages web, le processus n'est clairement pas irréductible car toute page web n'est clairement pas atteignable à partir de n'importe quelle autre. Le modèle tel qu'il est souffre donc encore d'un grave défaut. Pour cette raison Google utilise un modèle plus raffiné, dépendant d'un paramètre $c \in [0, 1]$ appelé *coefficient d'échappement* :

- avec probabilité c , le surfeur abandonne la page actuelle et recommence sur une des m pages du web, choisie de manière équiprobable.
- avec probabilité $1 - c$, le surfeur suit un des liens de la page actuelle i , choisi de manière équiprobable parmi tous les ℓ_i liens émis (c'est la marche aléatoire discutée ci-dessus.)

Les probabilités de transition sont donc modifiées pour devenir

$$\tilde{P}_{ij} = (1 - c) P_{ij} + \frac{c}{m},$$

et la matrice de transition de la nouvelle chaîne est donc donnée par

$$\tilde{P} = (1 - c) P + \frac{c}{m} I,$$

où I est une matrice $m \times m$ dont tous les coefficients valent 1. La matrice \tilde{P} est toujours stochastique et la chaîne de Markov correspondante est maintenant irréductible. Les théorèmes énoncés précédemment garantissent donc l'existence et l'unicité du vecteur de distribution stationnaire π qui nous fournit le classement des pages web.

Remarque. La valeur $1/c$ est le nombre moyen de pages visitées (= liens suivis plus 1) avant de recommencer sur une page aléatoire. En général, on choisira la

constante c positive mais proche de zéro. Par exemple, $c = 0.15$ correspond à suivre environ 6 liens en moyenne.

Le fait que la solution soit unique est fondamental : une fois que le modèle est établi, les théorèmes 6 et 7 nous garantissent une unique mesure π , sans équivoque. Mieux encore, rappelons que la suite itérative \mathbf{p}_n converge toujours vers π , indépendamment du point de départ. En l'absence de toute autre information on pourra donc démarrer avec $\mathbf{p}_0 = (1/m, \dots, 1/m)$ pour calculer la limite π .

Remarquons à ce propos que Google est obligé de mettre à jour ses données régulièrement, car le web change sans cesse. Disons que Google met à jour le vecteur π chaque semaine. Pour ce calcul, il serait maladroit de recommencer par $\mathbf{p}_0 = (1/m, \dots, 1/m)$. Il est sans doute plus avantageux de recycler l'information déjà obtenue : on choisira $\mathbf{p}_0 = \pi_{ancien}$, la mesure de la semaine d'avant. Ainsi peu d'itérations suffiront pour réajuster π , en supposant que le graphe n'est que légèrement modifié.

Pour obtenir le classement des pages web, il suffit donc simplement d'itérer

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} \tilde{P} = (1-c) \mathbf{p}_{n-1} P + \frac{c}{m} \mathbf{1}, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

jusqu'à la convergence de la suite. Notons que le produit matriciel de \mathbf{p}_{n-1} et P demande à l'ordinateur d'effectuer m^2 opérations :

$$(\mathbf{p}_n)_j = \sum_{1 \leq i \leq m} (\mathbf{p}_{n-1})_i P_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Rappelons aussi que la matrice P représentant le web est très grande : en 2004 Google affirmait que « le classement est effectué grâce à la résolution d'une équation de 500 millions de variables et de plus de 3 milliards de termes. » Comment les calculs sont-ils donc rendus possibles en pratique ?

Dans notre cas la plupart des coefficients de P valent zéro car une page n'émet que quelques douzaines de liens typiquement. Dans ce cas, il suffit de stocker les coefficients non nuls, dont le nombre est d'ordre m et non m^2 . Une telle matrice est appelée *creuse* (ou *sparse* en anglais).

Les pages sont numérotées de $1, \dots, m$ et, pour chaque page j , on énumère tous les liens i_1, i_2, \dots, i_ℓ pointant vers j . Notons $L_j = \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$ leur ensemble et $\#L_j$ le nombre de liens pointant vers la page j . À noter que m peut être très grand alors que $\#L_j$ est en général très petit.

Le calcul (3) est donc réduit à

$$(\mathbf{p}_n)_j = \sum_{i \in L_j} (\mathbf{p}_{n-1})_i \frac{(1-c)}{\ell_i} + \frac{c}{m}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

La complexité de cet algorithme est optimale dans le sens que l'on traite chaque lien $i \rightarrow j$ exactement une fois : le nombre total d'opérations est donc proportionnel à $\sum_j \#L_j$. Autrement dit, si en moyenne $\bar{\ell} = \frac{1}{m} \sum_j \#L_j$ liens pointent vers une page donnée, nous avons à effectuer $m\bar{\ell}$ opérations au total, au lieu de m^2 pour une matrice dense.

À noter aussi que notre algorithme n'utilise que les deux vecteurs \mathbf{p}_n et \mathbf{p}_{n-1} : la matrice P ne figure pas explicitement dans l'implémentation. Effectivement, la construction explicite d'une matrice de taille $m \times m$ allouerait trop de mémoire et serait catastrophique quand m est grand !

5 Bibliographie

- [1] Nelson, R. (1995) *Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory: The Mathematics of Computer Performance Modeling*, Springer, New York.

La fibration de Hopf

Laurent La Fuente-Gravy*
llafuent@ulb.ac.be

Naïm Zenaïdi**
nzenaidi@ulb.ac.be

Résumé

La fibration de Hopf est célèbre en topologie algébrique car c'est la première application non-triviale entre la sphère \mathbf{S}^3 et la sphère \mathbf{S}^2 . L'objectif de ce texte est de présenter quelques aspects spectaculaires de la géométrie et de la topologie de la sphère \mathbf{S}^3 de dimension 3. En effet, contrairement à la plupart des sphères, cette dernière admet une structure de fibré en cercles au-dessus de la sphère \mathbf{S}^2 . Ce texte est une tentative d'explication de ce phénomène surprenant, en ayant recours à des méthodes élémentaires d'algèbre et de géométrie.

Sommaire

1	Introduction	26
2	Rotations dans \mathbb{R}^3	26
3	La fibration de Hopf	29
4	Visualisation de la fibration de Hopf	32
5	Bibliographie	36

*Laurent La Fuente-Gravy est Aspirant FNRS au Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles. Il est titulaire d'un Master en Sciences Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles, et travaille en géométrie symplectique.

**Naïm Zenaïdi est boursier FRIA au Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles. Il est titulaire d'un Master en Sciences Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles, et travaille en topologie de contact.

1 Introduction

La fibration de Hopf est une application de la sphère \mathbf{S}^3 dans la sphère usuelle \mathbf{S}^2 donnée par la formule

$$H: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2 : (a, b, c, d) \mapsto (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)).$$

Elle a été étudiée pour la première fois par Heinz Hopf en 1931 et constitue un des premiers exemples de ce qu'on appelle *fibré en cercles non-trivial*.

La fibration de Hopf admet une interprétation en termes de rotations. Afin de mieux comprendre le lien entre ces deux notions, nous aurons besoin d'un outil algébrique développé par Hamilton, les quaternions, qui font l'objet de la première partie de ces notes. La seconde partie sera alors consacrée à l'étude de la fibration de Hopf proprement dite. Cette étude s'inspire (très) fortement de l'article de D.W. Lyons [1] et d'un des paragraphes du cours de deuxième bachelier enseigné par le Professeur P. Lecomte à l'Université de Liège.

2 Rotations dans \mathbb{R}^3

Une rotation de \mathbb{R}^3 est la donnée d'un vecteur directeur v (pour l'axe) et d'un angle de rotation θ . Cette donnée n'est pas univoque puisque par exemple (v, θ) et $(\lambda v, \theta + 2\pi)$ représentent la même rotation (à condition, bien sûr, que $\lambda > 0$).

En pratique, cette représentation n'est peut-être pas optimale pour mener les calculs. Par exemple, si l'on compose deux rotations, obtient-on toujours une rotation, et si oui, comment déterminer son axe et son angle en fonction des rotations données ?

Dans le plan, les nombres complexes (unitaires) permettent de réaliser simplement les rotations. En effet, la rotation R_θ d'angle θ autour de l'origine est la multiplication par $e^{i\theta}$. De plus, la composée de deux rotations est déterminée par la multiplication des nombres complexes.

Le mathématicien Hamilton se demanda s'il existe une multiplication sur \mathbb{R}^3 analogue à la multiplication complexe sur \mathbb{R}^2 . Malgré de nombreux essais, il ne parvint pas à munir \mathbb{R}^3 d'une telle multiplication. Finalement, alors qu'il se promenait avec sa femme le 16 octobre 1843, Hamilton a eu l'idée de passer par une multiplication dans \mathbb{R}^4 . Il a bien eu raison d'abandonner son projet dans \mathbb{R}^3 : en effet, il fut démontré plus tard que sur \mathbb{R}^3 ce n'est pas possible d'avoir une multiplication qui a les propriétés souhaitées par Hamilton.

2.1 Les quaternions

Pour définir la multiplication de deux vecteurs de \mathbb{R}^4 , Hamilton énonça les règles suivantes. Si on note $1, i, j, k$ les vecteurs de la base usuelle de \mathbb{R}^4 (1 représente le vecteur $(1, 0, 0, 0)$, i représente $(0, 1, 0, 0)$, etc.), alors

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i \text{ et } ik = -j.$$

On constate que le produit n'est pas commutatif. Le produit de deux éléments quelconques de \mathbb{R}^4 se déduit de ces règles par distributivité (en faisant bien

attention à la non-commutativité). Pour retenir la règle de produit entre les vecteurs de base i, j et k , on peut les placer successivement sur un cercle, et le sens dans lequel on parcourt le cercle donne le signe.

On note \mathbb{H} l'espace muni de cette multiplication, en l'honneur de Hamilton. C'est l'ensemble des quaternions.

2.2 Propriétés des quaternions

Nous allons maintenant énoncer des propriétés de base des quaternions. Pour un quaternion $q = a + bi + cj + dk$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$, on note $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ son conjugué. Les quaternions ont alors les propriétés suivantes :

1. La multiplication est associative.
2. La multiplication est non-commutative (mais néanmoins les réels commutent avec tous les quaternions).
3. Si q, q' sont des quaternions, alors $\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q}$.
4. Le produit $q\bar{q}$ vaut $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, c'est donc un réel positif quel que soit $q \in \mathbb{H}$.
5. Tout élément non-nul est inversible.
6. L'équation $x^2 + 1 = 0$ possède une infinité de racines.

Les quatre premières propriétés sont immédiates. Pour l'inversibilité des éléments non-nuls, cela résulte du fait que $q\bar{q}$ est un réel positif, de sorte que l'inverse de q est $\frac{\bar{q}}{q\bar{q}}$. Notons que la racine carrée positive de $q\bar{q}$ est appelée la norme ou le module de q et notée $|q|$.

Concernant l'équation $x^2 + 1 = 0$, si x est un quaternion tel que $x^2 = -1$, alors $|x| = 1$. Donc $x\bar{x} = 1$, et en multipliant l'équation par x (à gauche), on obtient $x = -\bar{x}$. On en déduit facilement que tout quaternion pur (de la forme $bi + cj + dk$) de norme 1 est solution de cette équation.

On constate donc que les quaternions partagent pas mal de propriétés avec les nombres complexes. Toutefois, la deuxième et la dernière propriété sont propres aux quaternions.

Proposition 1. *Si q est un quaternion, alors il existe un réel θ et un quaternion h avec $h^2 = -1$ tel que q s'écrit $q = |q|(\cos(\theta) + h\sin(\theta))$.*

Démonstration. En divisant q par sa norme, on peut se contenter de regarder q de norme 1. En écrivant $q = (a, b, c, d)$, on en déduit que a vaut entre -1 et 1 , et donc qu'il existe θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = \sin(\theta)$.

Lorsque θ n'est pas un multiple entier de π , on pose $h = \frac{q - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$. Puisque h est alors quaternion pur de norme 1, son carré vaut -1 et on obtient facilement la propriété voulue. Lorsque θ est un multiple de π , la propriété est immédiate. \square

2.3 Quaternions purs et géométrie

On va maintenant identifier \mathbb{R}^3 à l'ensemble des quaternions purs, noté \mathbb{H}_{pur} , qui est l'ensemble des quaternions p tels que $p + \bar{p} = 0$. L'identification est simplement $(x, y, z) \mapsto xi + yj + zk$. à tout quaternion q non-nul, on associe l'application

$$r_q: \mathbb{H}_{\text{pur}} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{pur}} : p \mapsto qpq^{-1}.$$

On vérifie aisément que l'image par r_q d'un quaternion pur est un quaternion pur ; r_q agit donc sur \mathbb{R}^3 par identification.

La structure multiplicative des quaternions permet de munir \mathbb{R}^3 de deux produits remarquables. Soit $p = bi + cj + dk$ et $p' = b'i + c'j + d'k$ deux éléments de \mathbb{H}_{pur} . Leur produit vaut

$$pp' = -(bb' + cc' + dd') + (cd' - dc')i + (db' - bd')j + (bc' - cb')k,$$

qu'on peut interpréter comme

$$-p \cdot p' + p \times p'$$

où le premier terme est le produit scalaire entre p et p' et le deuxième s'appelle le produit vectoriel de p et p' . Notons que ce dernier produit provient historiquement de ce calcul dans les quaternions.

Définition 2. Soient v et w des vecteurs de l'espace. Leur produit vectoriel $v \times w$ est un vecteur tel que

- $v \times w \perp v$ et $v \times w \perp w$.
- $\|v \times w\| = |v||w| \sin \theta$ où θ désigne l'angle formé par v et w .
- Le sens du produit vectoriel est donné par la fameuse règle de la main droite.

Nous concluons cette section par un théorème décrivant l'application r_q .

Théorème 3. Soit q un quaternion quelconque non-nul, noté $q = |q|(\cos(\theta) + h \sin(\theta))$. Alors l'application r_q est une rotation d'angle 2θ et d'axe h . De plus $r_q \circ r_{q'} = r_{qq'}$ pour tous q, q' quaternions non-nuls. Enfin, pour q et q' de norme 1, on a $r_q = r_{q'}$ si et seulement si $q = \pm q'$.

Démonstration. On note d'abord que $r_q = r_{\frac{q}{|q|}}$, ce qui permet de supposer que q est de norme 1. On en déduit

$$\begin{aligned} r_q(p) &= qpq^{-1} \\ &= (\cos(\theta) + h \sin(\theta))p(\cos(\theta) - h \sin(\theta)) \\ &= \cos^2(\theta)p + \sin(\theta) \cos(\theta)(hp - ph) - \sin^2(\theta)hph. \end{aligned} \quad (1)$$

Notons d'abord que

$$hp - ph = -h \cdot p + h \times p - (-p \cdot h + p \times h) = 2h \times p.$$

et en comparant ph et hp , on a

$$hph = h(-p \cdot h + p \times h) = h(-hp - 2p \cdot h) = -h^2p - 2h(p \cdot h) = p - 2h(p \cdot h).$$

En réinjectant ces deux derniers résultats dans l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned} r_q(p) &= \cos^2(\theta)p + 2\sin(\theta)\cos(\theta)(h \times p) - \sin^2(\theta)p + 2\sin^2(\theta)h(h \cdot p) \\ &= \cos(2\theta)p + \sin(2\theta)(h \times p) + 2\sin^2(\theta)h(h \cdot p). \end{aligned}$$

On en déduit (en posant $p = h$ et utilisant $h \times h = 0$) que

$$r_q(h) = h,$$

et donc l'axe h est fixé. Si maintenant p est perpendiculaire à h , nous obtenons

$$r_q(p) = \cos(2\theta)p + \sin(2\theta)(h \times p).$$

On voit (en faisant un dessin) qu'il s'agit d'une rotation d'angle 2θ .

La propriété de composition de r_q avec $r_{q'}$ est un calcul immédiat, et on vérifie aussi facilement que $r_q = r_{q'}$ si et seulement si $q = \pm q'$. \square

La propriété de composition $r_q \circ r_{q'} = r_{qq'}$ définit en fait un morphisme de groupes. Ici, on dira que l'application

$$r: \mathbb{H} \setminus \{0\} \rightarrow \text{SO}(3) : q \mapsto r_q,$$

où $\text{SO}(3)$ désigne le groupe des rotations de \mathbb{R}^3 , est un morphisme de groupes, ce qui établit alors le lien entre les quaternions et la géométrie.

3 La fibration de Hopf

3.1 Qu'est-ce qu'un fibré en cercles ?

La notion de fibré est une notion très générale en géométrie dont l'origine remonte aux travaux de H. Whitney, H. Hopf et E. Stiefel au début des années 1930. Il s'agit d'espaces géométriques qui, localement, ressemblent à des produits (cf. condition (b) dans la définition ci-dessous). Pour ne pas alourdir le texte sans raison, voici la définition dans le cas où les fibres du fibré considéré sont des cercles.

Définition 4. Un espace E (l'espace total) est un *fibré en cercles* au-dessus d'un espace B (l'espace de base) s'il existe une application surjective $p: E \rightarrow B$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) $\forall b \in B, p^{-1}(b)$ est un cercle.
- (b) $\forall b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b tel que $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbf{S}^1$.

Bien qu'abstraite, cette définition n'en demeure pas moins très géométrique. Un fibré en cercles apparaît comme une famille de cercles paramétrée par la base B : au-dessus de chaque point b de la base, la fibre $p^{-1}(b)$ est un cercle (cf. condition (a)). La condition (b) quant à elle exprime le fait que les phénomènes d'intérêt sont globaux : localement tous les fibrés sont triviaux (i.e. un produit d'un ouvert de la base par la fibre).

Pour rendre cette définition plus digeste, quelques exemples s'imposent.

Exemple. 1. Considérons la projection $p: \mathbb{R} \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout point du produit associe sa coordonnée selon \mathbb{R} . Cette application définit une structure de fibré en cercles sur le cylindre $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^1$. En effet, pour chaque $r \in \mathbb{R}$, $p^{-1}(r) = \{r\} \times \mathbf{S}^1$ et la condition (b) est vérifiée globalement. On voit ainsi que le cylindre est un fibré en cercles (trivial) au-dessus de \mathbb{R} .

2. On procède de la même manière pour se convaincre que le tore $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ est lui aussi un fibré en cercles au-dessus de \mathbf{S}^1 .

Les deux exemples ci-dessus sont triviaux dans le sens où la condition (b) de la définition est satisfaite globalement. Il est important d'insister sur le fait que ce n'est pas toujours le cas ! L'application de Hopf qui est introduite au paragraphe suivant définit une structure de fibré en cercles non-triviale sur \mathbf{S}^3 .

3.2 L'application de Hopf

L'algèbre des quaternions permet de donner une jolie définition de l'application de Hopf. Il s'agit en fait d'une application surjective de la sphère \mathbf{S}^3 dans \mathbf{S}^2 . Voici comment elle est construite : nous avons vu (voir théorème 3) que tout quaternion unité q induit une rotation de la sphère unité dans l'ensemble des quaternions purs. L'image de q sous l'action de l'application de Hopf est simplement l'image du quaternion pur i par la rotation r_q . En résumé, l'application de Hopf est définie par

$$H: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2$$

$$q \mapsto r_q(i) = qi\bar{q}.$$

Identification des fibres

Cette formulation concise et élégante permet de bien se figurer comment opère cette application. Néanmoins, pour déterminer la fibre au dessus d'un point quelconque, il est commode de l'exprimer en coordonnées. On identifie \mathbb{R}^4 avec l'ensemble des quaternions et \mathbb{R}^3 avec l'ensemble des quaternions purs. Si $q = a + bi + cj + dk$, on a alors

$$H(a, b, c, d) = (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk)$$

$$= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(bc + ad), 2(bd - ac)). \quad (2)$$

Remarquons que, du fait de l'identification énoncée ci-dessus, nous pouvons passer sans crainte de la notation $a + bi + cj + dk$ à la notation vectorielle (a, b, c, d) . Dans la suite, nous utiliserons les deux écritures de façon équivalente.

Forts de l'expression (2), nous sommes maintenant en mesure d'identifier la fibre au-dessus de chaque point de la sphère. Pour commencer, cherchons à déterminer celle qui se trouve au-dessus de i . Nous devons donc résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 1 \\ bc + ad = 0 \\ bd - ac = 0. \end{cases}$$

Si on prend en compte le fait que le quaternion $q = (a, b, c, d)$ est de norme 1, on voit sans peine que le système ci-dessus admet une infinité de solutions et qu'elles sont toutes de la forme $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0, 0)$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi, si on appelle (x, y, z, t) les coordonnées dans \mathbb{R}^4 , la fibre au-dessus de i est le grand cercle intersection de \mathbf{S}^3 et du 2-plan d'équation $z = t = 0$.

Nous venons donc de voir que la fibre au dessus de $i \in \mathbf{S}^2$ est un cercle. En est-il de même pour les autres points de la 2-sphère? La réponse est affirmative et le calcul qui suit justifie cette assertion. Supposons en effet que q_1 et q_2 sont deux quaternions unitaires ayant la même image par H , autrement dit supposons que $r_{q_1}(i) = r_{q_2}(i)$. On en déduit $i = r_{\overline{q_2}} \circ r_{q_1}(i) = r_{\overline{q_2}q_1}(i)$. Vu ce qu'on a démontré juste avant, on a $\overline{q_2}q_1 = e^{i\theta}$ et finalement $q_1 = q_2 e^{i\theta}$, pour un certain $\theta \in [0, 2\pi]$. Cette dernière égalité montre que la fibre au-dessus d'un point quelconque de \mathbf{S}^2 est un cercle et finit de prouver que la condition (a) de la définition est bien satisfaite. Chacun de ces cercles est appelé *cercle de Hopf*.

La condition de trivialité locale

Pour s'assurer que l'application de Hopf définit bel et bien une structure de fibré en cercles sur \mathbf{S}^3 au-dessus de \mathbf{S}^2 , il reste à vérifier que la condition (b) de la définition est bien vérifiée. On va voir ci-dessous que l'ouvert $U \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}^2 \setminus \{-i\}$ est un ouvert trivialisant, c'est-à-dire un ouvert au-dessus duquel la fibration est triviale. Pour ce faire, commençons par établir une formule permettant d'exprimer la fibre au-dessus de n'importe quel point de U .

Proposition 5. *Soit $p \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2, p_3)$ un point de \mathbf{S}^2 . La fibre au-dessus de p est le cercle paramétré par $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto w e^{i\theta}$ où w est le quaternion défini par*

$$w = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} ((1+p_1)i + p_2j + p_3k).$$

Démonstration. Pour comprendre ce résultat, il faut se rappeler que la rotation r_q induite par le quaternion $q = \cos(\theta) + h \sin(\theta)$ est une rotation d'angle 2θ autour de l'axe dont la direction est donnée par h . Cela étant, la rotation dont la direction de l'axe est donnée par $i + (p_1, p_2, p_3) = (1+p_1)i + p_2j + p_3k$ et dont l'angle est égal à π envoie clairement le point $i = (1, 0, 0)$ sur $p = (p_1, p_2, p_3)$. Le quaternion unité

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{(1+p_1)i + p_2j + p_3k}{|(1+p_1)i + p_2j + p_3k|} = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} ((1+p_1)i + p_2j + p_3k)$$

se trouve donc dans la fibre au-dessus de p . Les conclusions de la section précédente nous permettent alors d'affirmer que cette fibre est de la forme $\{we^{i\theta}\}$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$. \square

La proposition précédente va nous permettre d'arriver à nos fins. En effet, l'application

$$f: U \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^3 \setminus H^{-1}(-i)$$

$$\left((p_1, p_2, p_3); e^{i\theta} \right) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} ((1+p_1)i + p_2j + p_3k) e^{i\theta}$$

fournit une identification entre \mathbf{S}^3 privée de la fibre au-dessus de $-i$ et le produit $U \times \mathbf{S}^1$. L'apparition de l'expression $1+p_1$ au dénominateur dans les formules précédentes est une indication du fait que l'application f ne peut pas être étendue à $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$: en effet, si $(p_1, p_2, p_3) = (-1, 0, 0)$, l'application n'est pas définie. Ainsi, on commence à pressentir que le fibré de Hopf n'est pas trivial, i.e. ne peut pas être identifié au produit $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$.

3.3 Une rapide digression : la droite projective complexe

Considérons l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^2 . Une question que les géomètres se sont posée il y a déjà bien longtemps est de savoir s'il est raisonnable de considérer l'ensemble des droites vectorielles (i.e. passant par l'origine) comme un espace géométrique à part entière. Une réponse affirmative à cette question, et les (nombreux) développements ultérieurs qui en ont découlé, constitue ce que l'on connaît désormais sous le nom de *géométrie projective réelle*. Dans une telle situation, une droite vectorielle de \mathbb{R}^2 représente un point de l'espace considéré. L'ensemble de ces points est noté $\mathbb{R}P^1$, et est appelé l'espace projectif réel de dimension 1 ou encore la droite projective réelle ; on peut démontrer que c'est espace est en fait un cercle \mathbf{S}^1 .

Comme dans le cas réel, on définit la droite complexe D_λ de \mathbb{C}^2 de coefficient $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par

$$D_\lambda = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ t.q. } \frac{z_2}{z_1} = \lambda \right\}.$$

Par analogie, on appelle espace projectif complexe de dimension 1 l'ensemble des droites complexes de \mathbb{C}^2 . On le note $\mathbb{C}P^1$. Les cercles de Hopf dont il a été question plus haut apparaissent alors naturellement comme intersection de la sphère \mathbf{S}^3 avec les droites complexes de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, et les résultats des paragraphes précédents se résument simplement en disant que l'espace projectif complexe de dimension 1 n'est ni plus ni moins que la sphère \mathbf{S}^2 . En d'autres termes, on a

$$\mathbf{S}^2 \simeq \mathbb{C}P^1.$$

4 Visualisation de la fibration de Hopf

Jusqu'à présent, nous avons étudié quelques aspects de l'application de Hopf et nous avons essayé de comprendre un peu mieux pourquoi et comment la

sphère \mathbf{S}^3 se fibre au-dessus de \mathbf{S}^2 . Dans la suite, nous allons essayer de nous familiariser encore un peu plus avec ce fibré. Pour ce faire, nous avons besoin d'outils géométriques nous permettant de scruter à l'intérieur d'une sphère. De tels outils existent comme nous le verrons bientôt. Cette section s'inspire d'un des paragraphes du livre de W.P. Thurston [3].

4.1 Inversions géométriques

Pour introduire la notion d'inversion géométrique, nous allons nous contenter de travailler dans le plan \mathbb{R}^2 . Néanmoins, cette notion admet une généralisation immédiate au cas des dimensions supérieures.

Définition 6. Soit $\mathcal{C}(O, r)$ le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon r dans le plan Euclidien. L'*inversion par rapport au cercle \mathcal{C}* est la transformation $i_{\mathcal{C}}$ qui associe à tout point A du plan privé de l'origine l'unique point A' défini par les deux conditions suivantes :

1. $(OA) \parallel (OA')$
2. $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'} \rangle = r^2$.

Les inversions géométriques sont des transformations riches en propriétés. Parmi celles-ci, les deux suivantes nous seront particulièrement utiles dans la suite.

Propriété 7. Notons $A' \stackrel{\text{def}}{=} i_{\mathcal{C}}(A)$ et $B' \stackrel{\text{def}}{=} i_{\mathcal{C}}(B)$ les images respectives des points A et B par l'inversion géométrique $i_{\mathcal{C}}$. Alors les triangles OAB et $OB'A'$ sont semblables.

Démonstration. Par définition, on a

$$\|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OA'}\| = \|\overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OB'}\| = r^2,$$

et donc

$$\frac{\|\overrightarrow{OA}\|}{\|\overrightarrow{OB'}\|} = \frac{\|\overrightarrow{OB}\|}{\|\overrightarrow{OA'}\|}.$$

□

Propriété 8. Les inversions sont des transformations qui préservent les cercles.

Démonstration. Gardons les notations de la propriété 7. Soit \mathcal{C}' un cercle du plan centré en C . Nous devons distinguer deux cas.

Si le cercle \mathcal{C}' contient l'origine, son image par l'inversion $i_{\mathcal{C}}$ est une droite perpendiculaire à la droite OC . Si nous convenons de considérer les droites comme étant des cercles de rayon infini, on voit que l'énoncé du résultat est valide.

Si l'origine est en dehors du cercle \mathcal{C}' , nous pouvons faire la chose suivante. Considérons trois points A, D et E du cercle \mathcal{C}' choisis de manière à ce que les

points O, D et E soient alignés. On voit déjà que $|\widehat{DAE}| = \frac{\pi}{2}$. De plus, les triangles OAD et $OD'A'$ sont semblables. Il en va de même pour les triangles OAE et $OE'A'$. En utilisant certaines propriétés élémentaires des triangles et la propriété 7, on a

$$|\widehat{OAE}| = |\widehat{OE'A'}| = |\widehat{E'A'D'}| + |\widehat{OD'A'}|,$$

et donc

$$|\widehat{OAE}| = |\widehat{OAD}| + |\widehat{DAE}| = |\widehat{OAD}| + \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'amplitude de l'angle $|\widehat{E'A'D'}| = \frac{\pi}{2}$. Le fait de pouvoir répéter cet argument pour n'importe quel $A \in C'$ conclut la démonstration. \square

Remarque. Comme annoncé au début de cette section, la notion d'inversion se généralise mot pour mot au cas des sphères de dimensions supérieures. En particulier, on peut parler d'inversion par rapport à une sphère de dimension 3 et on démontre de la même manière qu'une telle transformation préserve, elle aussi, les cercles.

4.2 La projection stéréographique et son lien avec les inversions

Pour fixer les idées, commençons par détailler le cas le plus simple, à savoir celui de la projection stéréographique depuis le point $N = (1, 0)$ du cercle \mathbf{S}^1 d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans \mathbb{R}^2 .

Cette application associe à chaque point A de $\mathbf{S}^1 \setminus \{N\}$ l'intersection de la droite (NA) avec l'axe des ordonnées $x = 0$. En coordonnées, cette application est donnée par

$$P_{\mathbf{S}^1} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \left(0, \frac{y}{1-x}\right).$$

On procède de manière tout à fait similaire pour définir la projection stéréographique de la sphère \mathbf{S}^3 depuis $(1, 0, 0, 0)$. On obtient comme ci-dessus que

$$P_{\mathbf{S}^3}(x, y, z, t) = \left(\frac{y}{1-x}, \frac{z}{1-x}, \frac{t}{1-x}\right). \quad (3)$$

Nous allons maintenant démontrer que les projections stéréographiques, tout comme les inversions, préservent les cercles. Ce n'est pas un hasard, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 9. *Notons S et K les sphères de \mathbb{R}^4 d'équations respectives $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ et $(x-1)^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2$. La projection stéréographique de*

S depuis le point $N = (1, 0, 0, 0)$ est la restriction à $S \setminus \{N\}$ de l'inversion i_K par rapport à la sphère K . Autrement dit, on a

$$P_S = (i_K)|_{S \setminus \{N\}}.$$

Démonstration. L'énoncé paraît ardu mais il suffit de se convaincre que $i_K(S)$ est l'hyperplan d'équation $x = 0$. \square

La propriété annoncée de la projection stéréographique est donc une conséquence immédiate de la propriété 8 des inversions. Elle va se révéler déterminante dans notre prochaine étude de l'enlacement des fibres de la fibration de Hopf.

4.3 Visualisation de la fibration de Hopf via la projection stéréographique

Nous sommes à présent en mesure d'utiliser la projection stéréographique pour tenter de *voir* la fibration de Hopf.

Appelons F_1 (resp., F_2) la projection stéréographique de la fibre au-dessus de i (resp., $-i$). Pour rappel, nous avons vu précédemment que F_1 est le cercle de \mathbb{R}^4 paramétré par $\theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), 0, 0)$. Par (3) on voit que son image par la projection stéréographique est donnée par le paramétrage $\theta \mapsto (\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}, 0, 0)$. Ainsi, l'image de cette fibre est l'axe des abscisses. De manière similaire, on voit que l'image de F_2 est le cercle paramétré par $\theta \mapsto (0, \sin(\theta), \cos(\theta))$.

Afin de mieux comprendre comment les fibres s'agencent les unes par rapport aux autres, nous allons projeter stéréographiquement la fibre F au-dessus du point $p = (p_1, p_2, p_3) = p_1i + p_2j + p_3k$ et essayer de visualiser comment elle s'enlace avec F_1 et F_2 .

Rappelons que l'expression de la fibre au-dessus de p est donnée par

$$\frac{(p+i)}{|p+i|} e^{i\theta} = \frac{(p_1+1)i + p_2j + p_3k}{\sqrt{2(p_1+1)}} (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

qui s'écrit également

$$\left(\frac{-\sin(\theta)(p_1+1)}{\sqrt{2(p_1+1)}}, \frac{(p_1+1)\cos(\theta)}{\sqrt{2(p_1+1)}}, \frac{p_2\cos(\theta) + p_3\sin(\theta)}{\sqrt{2(p_1+1)}}, \frac{p_3\cos(\theta) - p_2\sin(\theta)}{\sqrt{2(p_1+1)}} \right).$$

Comme ci-dessus, on trouve que la projection de cette fibre est paramétrée par

$$\frac{1}{\sqrt{2(p_1+1)} + \sin(\theta)(p_1+1)} ((p_1+1)\cos(\theta), p_2\cos(\theta) + p_3\sin(\theta), p_3\cos(\theta) - p_2\sin(\theta)).$$

La première composante de cette expression ne s'annule que si θ vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$: les intersections de la projection de la fibre avec le plan d'équation $x = 0$ sont donc les points $\frac{1}{\sqrt{2(p_1+1)} + p_1+1} (0, p_3, -p_2)$ et $\frac{1}{\sqrt{2(p_1+1)} - p_1-1} (0, -p_3, p_2)$. Un

calcul élémentaire montre que les vecteurs déterminés par ces coordonnées ont même direction mais pointent dans des sens opposés. De plus, la norme du premier est strictement inférieure à 1 alors que celle du second est strictement supérieure à 1. Ces informations signifient que la fibre F et les fibres F_1 et F_2 sont enlacées.

La discussion menée ci-dessus permet d'aller encore un peu plus loin et d'annoncer que *deux fibres distinctes s'enlacent toujours*. Pour s'en convaincre, considérons les fibres F et F' au-dessus de p et p' respectivement. Nous allons définir une transformation continue de la sphère \mathbf{S}^3 préservant les fibres –ce qui signifie que chaque fibre est envoyée sur une autre fibre– et envoyant la fibre F sur celle se situant au-dessus de k . Une telle application peut être définie comme

$$f: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^3$$

$$q \mapsto (kp^{-1})q.$$

Les vérifications sont assez immédiates. Au vu de ce qui précède, nous savons que l'image de la fibre F' enlace la fibre au-dessus de k . Et puisque la transformation f est continue, on en déduit que les fibres F et F' doivent elles-mêmes s'enlacer. Un tel entrelac s'appelle un entrelac de Hopf (voir figure 1).

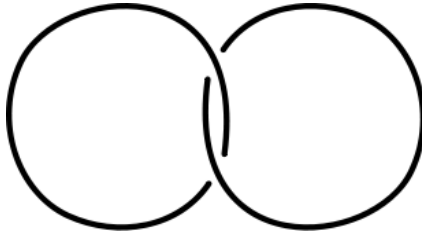


FIGURE 1 — Un entrelac de Hopf.

5 Bibliographie

- [1] Lyons, D.W. (2003) An elementary introduction to the Hopf fibration, *Mathematics Magazine* 76, 87 – 98.
- [2] Needham, T. (1997) *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press.
- [3] Thurston, W.P. (1997) *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton Mathematical Series, 35.

Quelques éléments de théorie musicale, du point de vue mathématique

Pascal Zeihen *
pascal.zeihen@education.lu

Résumé

Dans un premier temps, nous rappelons les sujets principaux de la théorie musicale tels qu'abordés par les mathématiciens. Nous étudions ensuite l'espace des fréquences de sons en présentant quelques tempéraments musicaux qui jouent un rôle essentiel dans la musique occidentale. La comparaison de leurs avantages et inconvénients nous amène à une propriété fondamentale mettant en relation les sons en consonance et les rapports simples de leurs fréquences. L'utilité de cette propriété est illustrée par son application à deux problèmes : la décomposition d'un signal sonore en son spectre de fréquences et la fabrication d'enceintes haute-fidélité dont la forme minimise les résonances acoustiques gênantes.

Sommaire

1	Introduction : théorie musicale – volet mathématique . . .	38
2	Espace des fréquences de sons	39
3	Application : transformation de signaux	44
4	Application : résonances acoustiques	48
5	Bibliographie	56

*L'auteur enseigne les mathématiques et l'informatique au Lycée Classique de Diekirch et est tuteur dans ces matières à l'Université du Luxembourg. Il organise, avec Charles Leytem, les compétitions de mathématiques nationales et internationales au Luxembourg. Il est en outre pianiste au Conservatoire de Musique du Nord et directeur de chorale.

1 Introduction : théorie musicale – volet mathématique

Dans cet article, nous résumons la matière exposée lors de notre conférence à la BSSM. Comme les sujets abordés sont assez vastes, nous nous limitons le plus souvent à énoncer les résultats principaux, tout en renvoyant le lecteur intéressé aux ouvrages de la bibliographie.

Les graphiques dont l'origine n'est pas indiquée par une référence explicite proviennent de [wikipedia](#).

Le volet *mathématique* de la théorie musicale étudie de manière purement scientifique :

- les paramètres musicaux, à savoir les sons, rythmes, harmoniques, fréquences, durées, volumes, timbres de sons et d'instruments, etc. ;
- les structures musicales : il s'agit tout d'abord d'une analyse de la structuration des œuvres musicales, mais aussi d'une classification des interprétations d'œuvres et de l'étude des techniques de composition, dont certaines se basent elles-mêmes directement sur des principes mathématiques.

1.1 Quelques paramètres musicaux

Il est essentiel de distinguer en musique occidentale les sons fondamentaux et les harmoniques y associées. À un son fondamental de fréquence f_1 correspondent en principe une infinité d'harmoniques de fréquences respectives $f_n = n \cdot f_1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. En pratique, l'étude se limite aux harmoniques d'indice n assez faible, dont la borne supérieure est déterminée en fonction de l'instrument qui a émis le son étudié. La première harmonique est identique au son fondamental, par construction.

Les fréquences de différents sons forment le plus souvent des rapports rationnels ou plutôt *presque rationnels* ; nous verrons plus loin que le fameux tempérament égal (voir page 43) ne permet d'obtenir aucun rapport parfaitement rationnel.

Les rythmes décrivent les durées des sons consécutifs ; il s'agit le plus souvent de parties rationnelles des unités de temps définies par les mesures et battements qui composent la partition de l'œuvre.

L'étude des timbres des sons et des instruments de musique nous amène directement à l'analyse mathématique supérieure : pour décrire le spectre des sons et des harmoniques engendrées, il faut décomposer le signal sonore en ses composantes de fréquences différentes. Ce sujet sera esquissé dans la 3^e section de cet article.

La modélisation mathématique des paramètres musicaux est réalisée à l'aide d'ensembles et d'espaces appropriés. Ce sujet est abordé en détail dans [8] ; une approche plus physiologique, basée sur le fonctionnement du cerveau humain, a été choisie dans [5].

1.2 Quelques structures musicales

Il est possible de comparer des œuvres musicales à des constructions géométriques, voire architecturales : on y rencontre des effets de translation (répéti-

Gamme chromatique ascendante :



Gamme chromatique descendante :

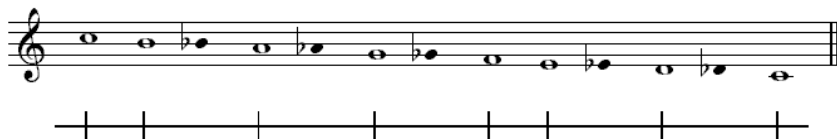


FIGURE 1 — Gammes chromatiques ascendante et descendante

tion d'éléments-clés), de symétrie (schéma A-B-A ou A-B-C-B-A d'une mélodie ou d'un mouvement entier d'une œuvre), d'homothétie, etc.

Quant aux interprétations des œuvres, la version théorique définie par la partition est remplacée et enrichie par les idées des interprètes; cela revient à substituer des approximations judicieusement choisies aux valeurs « exactes » des paramètres décrits dans la partition.

L'approche mathématique des techniques de composition est souvent facile à mettre en évidence. Par exemple, plusieurs techniques du XX^e siècle, la dodécaphonie et la musique sérielle, traitent certains paramètres musicaux comme des suites de nombres devant vérifier des règles définies avec une rigueur mathématique. Les suites ainsi construites subissent au cours de l'œuvre divers traitements qui font penser à nouveau aux transformations géométriques (translations, symétries, homothéties).

Même la classification globale des œuvres musicales et des interprétations existantes a été envisagée par des mathématiciens. Le lecteur intéressé pourra consulter encore [8] et la bibliographie incluse dans cet ouvrage.

2 Espace des fréquences de sons

Par fréquence, on entend le nombre d'oscillations des ondes acoustiques par unité de temps. L'unité de mesure des fréquences est le *Hertz* : $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Les sons audibles ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

Les fréquences de certains sons sont fixées par convention, pour permettre un accordage efficace et consistant des instruments de musique. Ainsi, le *la* du diapason a généralement une fréquence fixée à 440 Hz ou 442 Hz. Rarement, on préfère donner une valeur fixée d'avance (264 Hz) au *do* plutôt qu'au *la*. Dans la figure 1, le *la* susmentionné est la 10^e note de la gamme ascendante, tandis que le *do* à 264 Hz en est la première (à gauche).

La figure 2 représente comme première note (à gauche) un son fondamental de fréquence f_1 . En l'occurrence, on a $f_1 = 66$ Hz.

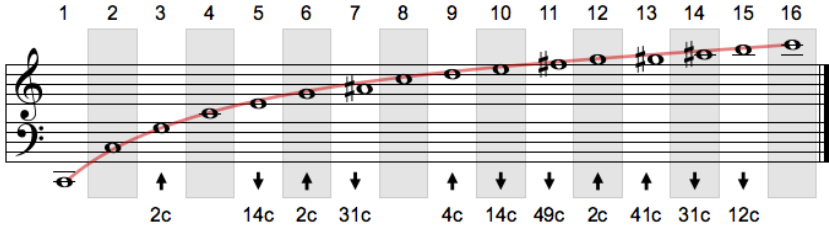


FIGURE 2 — Son fondamental et harmoniques correspondantes

Sur cette figure, on voit également les seize premières harmoniques, de fréquences respectives $f_n = n \cdot f_1$, avec $n = 1, 2, \dots, 16$. À vrai dire, les notes utilisées ne correspondent pas exactement aux fréquences des harmoniques, lorsqu'on utilise le tempérament égal (voir page 43). Les corrections nécessaires, exprimées en centièmes de l'intervalle séparant deux notes consécutives dans une gamme chromatique, sont indiquées au-dessous des notes en question, ainsi que la direction de la correction à effectuer en partant de la note imprimée.

Les harmoniques jouent un rôle évident pour certains instruments à vent en cuivre : par exemple, une trompette (en *si♭*, c'est-à-dire avec un son fondamental de fréquence $f_1 = 233$ Hz) sans pistons et coulisses peut produire uniquement les harmoniques f_2, f_3, \dots, f_{11} , tandis que le son fondamental ainsi que tous les sons se trouvant entre deux harmoniques consécutives ne peuvent pas être joués.

Le *tempérament* définit les rapports de fréquences entre les différentes notes d'une gamme. Dans la suite, nous comparerons quelques tempéraments classiques.

2.1 Tempérament par quintes ascendantes

La construction qui va suivre était déjà connue par Pythagore et porte son nom encore aujourd'hui.

On a vu sur la figure 2 que la 2^e harmonique forme avec le son fondamental un intervalle appelé *octave*, avec $f_2/f_1 = 2$. Ensuite, la 3^e harmonique forme avec la précédente un intervalle appelé *quinte* (ou *quinte pure*), avec $f_3/f_2 = 3/2$.

Ainsi, il paraît logique d'imposer à chaque *quinte ascendante* d'une gamme de notes le rapport de fréquences $3/2$. On obtient la construction de la figure 3. Les flèches bleues indiquent les quintes ascendantes, tandis que les flèches vertes visualisent les octaves descendantes nécessaires pour revenir à l'ensemble de notes considéré (c'est d'ailleurs le même que sur la figure 1).

En calculant successivement les rapports de fréquences en partant du *do* inférieur, on obtient le tableau suivant :

do	do♯	re	re♯	mi	fa	fa♯	sol	sol♯	la	la♯	si	do
1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2

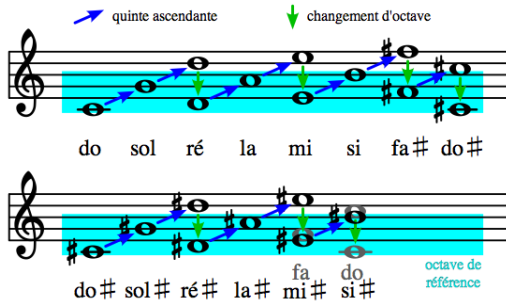


FIGURE 3 — Construction d'une gamme par quintes ascendantes (Pythagore)

Par exemple, on passe de *sol* à *re* en multipliant la fréquence du *sol* par $\frac{3}{2}$ (quinte ascendante) et en divisant encore par 2 (octave descendante). On passe de *re* à *la* en multipliant la fréquence du *re* uniquement par $\frac{3}{2}$, et ainsi de suite.

En assimilant *si#* au *do* supérieur (dernière note de la figure 3 et dernière colonne du tableau précédent), on espère trouver encore une quinte pure entre *fa* et *do* supérieur, mais ce n'est évidemment pas le cas, car

$$\frac{3^{12}}{2^{18}} = \frac{531441}{262144} \approx 2,027 \neq 2.$$

Comme la fréquence du *do* supérieur doit être exactement le double de celle du *do* inférieur, la quinte entre *fa* et *do* supérieur est légèrement diminuée et elle sonne affreusement fausse à nos oreilles : les musiciens l'appellent *quinte-loup*. La figure 4 illustre le phénomène décrit.

Remarquons encore qu'on aurait bien sûr pu faire une construction similaire par quintes descendantes, à partir du *do* supérieur. Les rapports de fréquences ainsi obtenus sont les suivants :

do	reb	re	mib	mi	fa	solb	sol	lab	la	sib	si	do
$\frac{1}{2}$	$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{2^{15}}{3^{10}}$	$\frac{2^4}{3^3}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2^{17}}{3^{11}}$	$\frac{2^6}{3^4}$	$\frac{2^{14}}{3^9}$	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	1

On a assimilé *dob* à *si* (avant-dernière colonne), et la quinte-loup réapparaît cette fois-ci entre le *do* inférieur et le *sol*.

Lors de l'accordage des instruments à cordes, on se base directement sur les quintes pures, de rapports de fréquences $\frac{3}{2}$. Ainsi, par exemple, les quatre cordes d'un violon sont accordées sur les fréquences

$$\begin{cases} c_3 = 440 \text{ ou } 442 \text{ Hz} \\ c_4 = \frac{3}{2} \cdot c_3 \\ c_2 = \frac{3}{2} \cdot c_3 \\ c_1 = \frac{3}{2} \cdot c_2 = \frac{4}{9} \cdot c_3. \end{cases}$$

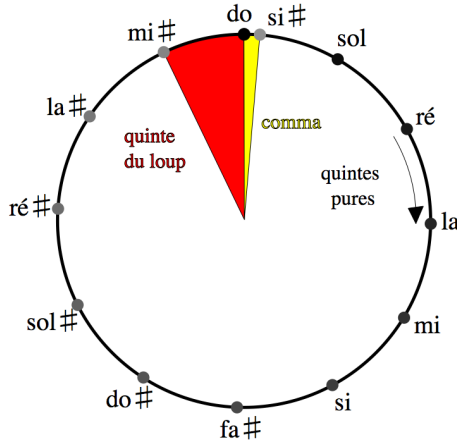


FIGURE 4 — Apparition de la quinte-loup entre *fa* (*mi*♯) et *do*

Il revient au violoniste de jouer les différentes notes si habilement qu'un intervalle impur comme la quinte-loup ne se fasse jamais entendre. Pour y arriver, il devra modifier légèrement le tempérament par quintes ascendantes.

La quinte-loup n'est pas le seul problème lié au tempérament par quintes ascendantes. Considérons l'intervalle de *do* à *mi*, que les musiciens appellent *tierce majeure* ascendante.

- Sur la figure 3, l'intervalle s'obtient à partir de quatre quintes ascendantes et de deux octaves descendantes, c'est-à-dire

$$\frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64} \approx 1,266.$$

- Sur la figure 2, l'intervalle s'obtient entre la 4^e et la 5^e harmonique, c'est-à-dire

$$\frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

On a donc le choix entre deux rapports de fréquences qui sont tous les deux raisonnables, car mathématiquement fondés.

En refaisant le même raisonnement pour d'autres intervalles, on aboutit à un nombre de choix possibles de plus en plus élevé. Durant les siècles passés, les musiciens en ont testé beaucoup, et les tempéraments correspondants portent des noms comme Pythagore, Silbermann-Sorge, Werckmeister, Kimberger, Vallotti, Neidhardt. Parmi ceux essayés, il faut surtout retenir celui qui est utilisé de nos jours sur de nombreux instruments : le **tempérament égal**, donnant lieu à la gamme dite tempérée.

2.2 Tempérament égal et gamme tempérée

Revenons à la gamme chromatique ascendante de la figure 1. Les treize notes (du *do* inférieur au *do* supérieur inclus) ont des fréquences¹ notées f_0, f_1, \dots, f_{12} . Ces treize notes forment successivement douze petits intervalles, que les musiciens appellent *seconde mineure* (ou *prime augmentée*, ce qui revient au même, concernant les rapports de fréquences en tempérament égal). On impose à **tous** ces intervalles successifs le même rapport de fréquences :

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \dots = \frac{f_{12}}{f_{11}}.$$

Comme $\frac{f_{12}}{f_0} = 2$, on obtient $\frac{f_{i+1}}{f_i} = \sqrt[12]{2} \approx 1,0595$.

Quelles en sont les conséquences ? Tout d'abord, les intervalles purs (quinte pure, tierce majeure pure) n'existent plus :

- quinte en tempérament égal : $(\sqrt[12]{2})^7 \approx 1,4983 \neq \frac{3}{2}$;
- tierce majeure en tempérament égal : $(\sqrt[12]{2})^4 \approx 1,2599 \neq \frac{5}{4}$.

Afin d'éviter des intervalles carrément faux (comme la quinte-loup), le compromis réalisé par le tempérament égal est nécessaire lors de l'accordage de nombreux instruments de musique, comme le piano, la harpe et la plupart des instruments à vent en bois.

Quant aux instruments à vent en cuivre, nous avons mentionné plus haut qu'il faut avoir recours à des coulisses pour jouer les notes qui ne coïncident pas avec les harmoniques du son fondamental de l'instrument. Ainsi, par exemple, les trompettes modernes disposent de trois coulisses à piston dont chacune allonge le tube que l'air doit traverser et diminue la fréquence du son produit en conséquence :

- sans activation de coulisse : harmonique de fréquence f ;
- activation de la coulisse du 1^{er} piston :

$$f / (\sqrt[12]{2})^2 \quad \text{ou} \quad f \cdot \frac{8}{9} ;$$

- activation de la coulisse du 2^e piston :

$$f / \sqrt[12]{2} \quad \text{ou} \quad f \cdot \frac{15}{16} ;$$

- activation de la coulisse du 3^e piston :

$$f / (\sqrt[12]{2})^3 \quad \text{ou} \quad f \cdot \frac{5}{6}.$$

1. Attention, ce ne sont plus des fréquences d'harmoniques, même si la notation choisie y ressemble.

Il revient au fabricant de l'instrument de choisir soit le tempérament égal soit le tempérament de Pythagore. De plus, le musicien a encore la possibilité d'ajuster manuellement la longueur des différentes coulisses, afin de modifier le tempérament si bon lui semble.

Les différents tempéraments, leur utilisation à travers des siècles passés et leur application lors de la fabrication d'instruments de musique peuvent être étudiés en détail dans l'ouvrage de référence musicale [4].

2.3 Conclusion

En musique occidentale, les intervalles les plus utilisés sont basés sur des rapports de fréquences égaux (ou très proches) de

$$N \cdot 2^{-p_1} \cdot 3^{-p_2} \cdot 5^{-p_3}, \quad (1)$$

où N et les exposants p_i sont des nombres naturels peu élevés.

Les sons qui en résultent sont dits en *consonance* (harmonie totale) : on peut définir la *consonance* comme étant la cohérence d'un ensemble de sons, d'accords ou d'intervalles entendus simultanément ou successivement. Les consonances sont d'autant plus fortes que les exposants p_i se rapprochent de 0. L'oreille humaine, habituée dès la naissance aux sons consonants et depuis quelques siècles aussi au tempérament égal, détecte des déviations avec une précision surprenante et les interprète comme erreurs ou *dissonances*.

3 Application : transformation de signaux

En musique, et plus généralement en acoustique, on est souvent confronté au problème suivant : un signal sonore perçu comme un son unique (provenant par exemple d'un seul instrument) est en réalité composé d'un son fondamental et de nombreuses harmoniques correspondantes. Comment peut-on décomposer le signal en son spectre de fréquences, tout en précisant les amplitudes relatives aux fréquences constituantes ?

Au cours des deux derniers siècles, de nombreuses techniques mathématiques ont été développées qui permettent de résoudre ce problème. Mentionnons à titre d'exemples représentatifs :

- la transformation de Fourier continue ;
- la transformation de Fourier discrète (DFT) ;
- la transformation de Fourier (discrète) rapide (FFT) ;
- la transformation en cosinus discrète (DCT) ;
- la transformation en cosinus discrète modifiée (MDCT, utilisée p. ex. pour l'encodage des fichiers mp3).

Le lecteur intéressé trouvera de nombreux détails, omis ici, dans les ouvrages [3, 11, 12].

3.1 Transformation de Fourier continue

En pratique, il s'agit de décomposer, ou plutôt d'approcher, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de carré intégrable (de classe L^2) et de période 2π , par

$$g_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

tout en minimisant la norme L^2 calculée sur un intervalle de longueur 2π :

$$\|g_n - f\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [g_n(x) - f(x)]^2 dx}.$$

Les coefficients (tous réels) sont donnés par

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx & (k = 0, 1, \dots, n), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

En appliquant la règle des trapèzes, avec la largeur uniforme $h = \frac{2\pi}{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_k^* &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \cos(kx_j) & (k = 0, 1, \dots, n), \\ b_k^* &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \sin(kx_j) & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

En remplaçant l'intégrale définie par une somme finie de termes, on a *discrétisé* la transformation.

3.2 Transformation de Fourier discrète (DFT)

Lorsqu'on parle de DFT, on ne pense généralement pas aux dernières formules de la sous-section précédente, mais on travaille le plus souvent avec des nombres complexes.

Rappelons la notation $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$.

La transformée de Fourier discrète du vecteur complexe

$$a = (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$$

est le vecteur

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$$

avec

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i j k / N} a_j \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

À partir de \hat{a} , on peut retrouver a par la transformation inverse

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j k / N} \hat{a}_j \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

3.3 Transformation de Fourier rapide (FFT)

Les calculs de la sous-section précédente peuvent être accélérés de manière extrême si

$$N = 2^p \quad (p \in \mathbb{N}^*).$$

Cette accélération reste encore significative si N n'est pas une puissance de 2, mais se décompose en facteurs premiers petits. Si N est grand, le nombre de facteurs premiers (égaux ou non) devra également être élevé en conséquence.

Des calculs montrent par exemple que pour $N = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, le nombre de multiplications complexes nécessaires est réduit de $360^2 = 129\,600$ (pour DFT) à 3420 (pour FFT), voir [12]. C'est l'un des avantages majeurs de travailler directement avec des nombres complexes, et non pas avec des nombres tous réels.

Il reste à étudier comment transformer un signal donné, dont les mesures donnent évidemment une suite de nombres tous réels et non pas complexes, en une suite de nombres complexes, pour pouvoir appliquer la transformation de Fourier rapide.

Or, on constate que N nombres réels $f(x_j)$ peuvent être transformés en $n = \frac{N}{2}$ nombres complexes :

$$y_j \stackrel{\text{def}}{=} f(x_{2j}) + i f(x_{2j+1}) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Cette transformation est appelée *complexification* d'un signal réel. On calcule ensuite

$$c_k = \hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-2\pi i j k / n} y_j \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

où on peut profiter des accélérations FFT susmentionnées, si N a été bien choisi.

Il nous reste à décomposer le spectre de fréquences complexe, pour obtenir les fréquences réelles du signal initial. On récupère (avec encore $n = \frac{N}{2}$)

$$a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cos(kx_j) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$b_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sin(kx_j) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

à partir des égalités

$$a_k - i b_k = \frac{1}{2} (c_k + \bar{c}_{n-k}) + \frac{1}{2i} (c_k - \bar{c}_{n-k}) e^{-ik\pi/n},$$

$$a_{n-k} - i b_{n-k} = \frac{1}{2} (\bar{c}_k + c_{n-k}) + \frac{1}{2i} (\bar{c}_k - c_{n-k}) e^{ik\pi/n}$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$ en posant $b_0 = b_n = 0$ et $c_n = c_0$.

3.4 Transformation en cosinus discrète (DCT)

La transformation de Fourier, décrite ci-dessus avec quelques variantes et accélérations, décompose le signal en une somme de fonctions cosinus et sinus. Pour de nombreuses applications, il n'est pas nécessaire de distinguer les deux types de fonctions (dont l'une n'est en fait que l'autre déphasée de $\frac{\pi}{2}$), et on se limite alors à décomposer le signal en une somme de fonctions cosinus.

Pour y arriver, on a le choix entre plusieurs formules. On en rencontre généralement quatre dans la littérature, et nous nous limitons dans la suite à celle utilisée le plus souvent aujourd'hui, voir [11].

La transformée en cosinus discrète du vecteur réel

$$a = (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$$

est le vecteur réel

$$\hat{a} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$$

avec

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

À partir de \hat{a} , on peut retrouver a par la transformation inverse

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{a}_j \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

3.5 Principe d'incertitude

Comme dans d'autres domaines en physique, il existe un principe d'incertitude qui s'applique aux transformations de signaux par les méthodes précitées.

On suppose que les mesures d'amplitude du signal se font à intervalles de temps réguliers. Par exemple, pour échantillonner un signal de qualité CD, on effectue 44 100 mesures par seconde. Le nombre de mesures N dépend donc essentiellement de la durée du signal mesuré.

- Si le signal à décomposer est de longue durée (N est un grand nombre), alors on obtient une décomposition fine du signal en de nombreuses fréquences. En effet, le vecteur transformé (vecteur des fréquences) a la même dimension que le vecteur initial (vecteur des mesures). Par contre, on obtient une imprécision dans le temps, car la méthode utilisée suppose qu'on a affaire à un signal périodique. Le vecteur transformé indique bien les fréquences importantes du signal initial, mais ne précise pas si elles apparaissent au début, au milieu, à la fin ou durant tout le signal.
- Si le signal à décomposer est de courte durée (N est relativement faible), alors on obtient forcément une indication précise dans le temps, compte tenu du court intervalle de temps considéré. Par contre, le spectre de fréquences devient imprécis, car le vecteur transformé (vecteur des fréquences) est de dimension pas très élevée.

Pour pallier à l'inconvénient du spectre imprécis, les harmoniques décrites dans la section précédente peuvent être utilisées : elles permettent d'affiner la fréquence du son fondamental déterminé approximativement par le spectre. Par exemple, le spectre des fréquences indique

$$f_1 \approx 40 \text{ Hz}, \quad f_3 \approx 121 \text{ Hz}, \quad f_5 \approx 202 \text{ Hz}.$$

On peut alors affiner la fréquence f_1 en remplaçant l'approximation de 40 Hz par 40.4 Hz, pour améliorer les rapports $\frac{f_3}{f_1} \approx 3$ et $\frac{f_5}{f_1} = 5$.

D'autre part, il est également possible de déduire les harmoniques non identifiées dans le spectre à partir de la fréquence du son fondamental. Par exemple, supposons que l'on connaît la fréquence $f_1 \approx (60 \pm 0,5) \text{ Hz}$. Sachant que la 5^e harmonique joue un rôle important, on peut prévoir sa fréquence en estimant $f_1 \in [59,5 ; 60,5]$ et ensuite $f_5 \in [297,5 ; 302,5]$.

De même, dans le but d'améliorer l'harmonie tonale d'un accord de sons en consonance, on peut éventuellement ajuster des fréquences dont les rapports sont proches de

$$N \cdot 2^{-p_1} \cdot 3^{-p_2} \cdot 5^{-p_3},$$

voir l'équation (1) à la page 44. La puissance des ordinateurs et logiciels actuels permet d'implémenter de telles optimisations dans les processeurs de signaux digitaux et les égaliseurs interactifs de sons.

4 Application : résonances acoustiques

La perturbation d'ondes émises par des haut-parleurs est due principalement aux problèmes suivants :

- la forme de l'enceinte provoque des résonances inévitables, par des ondes tournant autour de l'enceinte et entrant en phase avec celles de même fréquence ou d'une harmonique ;
- les défauts inhérents des haut-parleurs détériorent la qualité du son émis ;
- il en est de même si les vibrations de l'enceinte deviennent trop importantes ;
- les sons subissent diverses réflexions et absorptions par l'environnement des enceintes ;
- les signaux originaux sont déformés lors du transport vers et à l'intérieur de l'enceinte, de sorte que les haut-parleurs émettent dès le début un signal déjà détérioré.

Pour étudier les résonances locales près de l'enceinte et leur effet sur la qualité du son émis (« est-il suffisamment équilibré sur tout l'intervalle des fréquences audibles ? »), les ingénieurs en acoustique effectuent souvent des mesures par holographie au laser et par audiométrie en champ libre. Ils obtiennent alors un diagramme de mesures comme par exemple la figure 5.

Sur le diagramme, on reconnaît d'un côté des crêtes près de 100 Hz, 300 Hz, 650–700 Hz, 800 Hz et 1,3–1,4 kHz, et de l'autre côté une chute non négligeable près de 4.2 kHz.

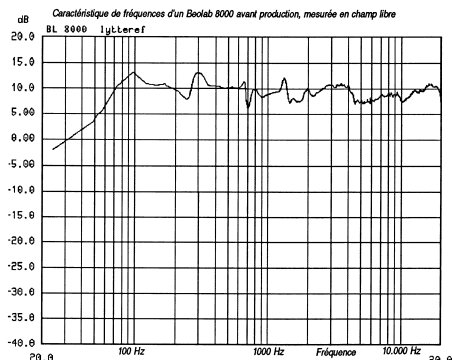


FIGURE 5 — Audiométrie en champ libre de l'enceinte Beolab 8000, voir [1]

4.1 Énoncé du problème

Dans la suite nous étudions la perturbation d'ondes rencontrant un obstacle, ainsi que les effets de résonance qui en résultent. Notre approche sera purement mathématique et ne se basera nullement sur des mesures physiques.

La théorie de la diffusion (ou *théorie du scattering*, voir l'ouvrage classique [7]) indique que la forme de l'obstacle décrit entièrement les perturbations des ondes et que réciproquement il est possible de décrire la forme de l'obstacle entièrement à partir des perturbations d'ondes constatées.

L'obstacle est modélisé mathématiquement par un ouvert connexe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{O}}$ soit aussi connexe, pour éviter l'existence de cavités intérieures isolées qui seraient inutiles dans notre étude.

La propagation des ondes acoustiques dans l'ouvert Ω est décrite par l'équation classique

$$\Delta u(t, x) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(t, x) = 0,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace, $u(t, x)$ est le potentiel acoustique et c la vitesse de propagation des ondes dans Ω . Pour ne pas devoir traîner des constantes à travers tous nos développements, nous posons $c \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

À cette équation il faut évidemment ajouter des conditions limites : on appelle *problème mixte pour l'opérateur des ondes* dans $\mathbb{R} \times \Omega$ le problème

$$\begin{cases} (-\Delta + \partial_t^2) u(t, x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega \\ u(0, x) = f(x) \\ \partial_t u(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (2)$$

La théorie de Hille-Yosida, [13], montre que ce problème admet une solution unique u continue et dérivable lorsque les fonctions f et g sont choisies dans les

bons espaces. Aucune contrainte n'a été formulée sur l'ouvert Ω ; son bord $\partial\Omega$ n'a donc pas besoin d'être lisse.

La solution u a été étudiée en détail dans [14]. Une solution $u(t, x)$ non identiquement nulle du problème mixte est appelée « sortante » lorsqu'il existe $T \geq 0$ tel que $u(t, x) = 0$ pour tout $t > T$ et tout x vérifiant $|x| < t - T$. Une solution sortante u est appelée « immédiatement sortante » lorsque $T = 0$ convient dans la condition précédente. Les ondes s'éloignent alors de l'obstacle sans jamais y revenir ; cette situation est idéale, car des ondes quittant définitivement l'obstacle ne pourront plus y engendrer des résonances.

Soit maintenant $\mu \in \mathbb{C}$ donné. Si la fonction v suffisamment régulière vérifie l'équation des ondes réduite

$$(-\Delta + \mu^2)v(x) = 0,$$

la solution du problème (2) admettant $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \mu v \end{pmatrix}$ comme conditions initiales s'écrit

$$u(t, x) = e^{\mu t} v(x).$$

Cette solution u est alors dite séparable.

On appelle *problème stationnaire* pour l'opérateur des ondes le problème

$$\begin{cases} (-\Delta + \mu^2)v(x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

En pratique, on ajoute souvent à (3) la condition supplémentaire

$$v(x) \sim \frac{e^{-\mu|x|}}{|x|} \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty,$$

appelée *condition de radiation de Sommerfeld*. Cette condition technique assure l'unicité de la solution du problème stationnaire. En particulier, la solution triviale et non intéressante $v = 0$ est ainsi écartée.

On peut montrer qu'une solution séparable $u(t, x) = e^{\mu t} v(x)$ est sortante si et seulement si v vérifie la condition de radiation de Sommerfeld, voir [7]. D'autre part, le comportement de toute solution u du problème mixte est asymptotiquement égal à une somme (infinie) de fonctions u_k séparables. Cela justifie le passage du problème mixte au problème stationnaire, plus facile à étudier car ne dépendant plus de la variable t .

4.2 Pôles de résonance

Le phénomène de résonance se manifeste par des ondes « tournant » autour de l'obstacle. Une onde résonnante séparable u s'écrit $u(t, x) = e^{\mu t} v(x)$ avec $\mu \in \mathbb{C}$. La valeur de $\Re\mu$, forcément négative, exprime la décroissance de l'onde tandis que $|\Im\mu|^2$ et précise sa fréquence. Les nombres μ pour lesquels il existe

2. On note, dans la suite, $\Re\mu$, respectivement $\Im\mu$, la partie réelle, respectivement imaginaire, du nombre complexe μ .

des ondes stationnaires v non nulles vérifiant l'équation des ondes réduite sont appelés *pôles de résonance*. Ils dépendent évidemment de la forme de l'obstacle et leur calcul numérique constitue le cœur des pages suivantes.

Comme déjà annoncé dans la sous-section précédente, les valeurs μ désirées sont celles pour lesquelles le problème stationnaire

$$\begin{cases} (-\Delta + \mu^2)u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \text{ le bord de l'obstacle} \end{cases}$$

admet une solution non triviale, vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld. Les pôles décrivent aussi le comportement asymptotique des solutions du problème mixte pour l'opérateur des ondes dans l'ouvert non borné Ω .

De plus, les pôles de résonance apparaissent sous de nombreuses formes dans la littérature, voir [2, 7] : ce sont notamment les valeurs μ à partie réelle strictement négative pour lesquelles il existe une fonction non nulle v sur le bord de l'obstacle telle que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{e^{-\mu|x-y|}}{|x-y|} v(y) d\sigma(y)$$

est une fonction en x identiquement nulle sur $\partial\Omega$ (à noter que $d\sigma(\cdot)$ désigne la mesure uniforme sur la surface considérée).

Nous utilisons cette caractérisation des pôles dans les calculs numériques. Notre méthode est donc du type BEM (*Boundary Elements Method*), car tous les calculs sont ramenés au bord de l'obstacle.

Pour résoudre numériquement un tel problème, on discrétise généralement le bord $\partial\Omega$ en arêtes droites et surfaces planes, comme sur la figure 6.

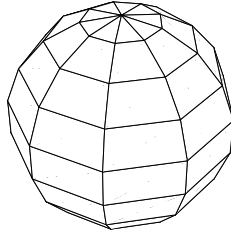


FIGURE 6 — Sphère discrétisée en arêtes droites et surfaces planes, voir [10]

Comme base d'éléments approchant v , on peut choisir des fonctions faciles à manipuler (constantes, linéaires ou quadratiques sur chaque élément de surface). Les calculs associés à cette méthode, appelée FEM (*Finite Elements Method*),

peuvent être implémentés aisément et rapidement. Mais l'utilisation de paramètres et d'éléments de base qui ne sont même pas continûment dérivables partout sur le bord limite d'avance les ordres de convergence de la méthode. Les ordres trouvés dans les publications sont majorés par $\frac{3}{2}$ (voir [9] par exemple); ils sont souvent inconnus si la méthode utilisée est compliquée, [10].

Définissons l'opérateur de simple couche

$$(K_\mu u)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-\mu|x-y|}}{|x-y|} u(y) d\sigma(y).$$

Alors K_μ est bijectif si et seulement si $\mu \in \mathbb{C}_-$ n'est pas un pôle (\mathbb{C}_- étant l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est négative). Pour une description complète de l'opérateur ainsi que des espaces de fonctions entre lesquels il agit, nous renvoyons le lecteur intéressé à [16].

4.3 Exemple résolu : les pôles de la boule

Si $\partial\Omega = \mathbf{S}^2$, il est possible de calculer les pôles de la boule-unité de manière exacte, voir [6] : ce sont les zéros des polynômes

$$p_m(x) = 2^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{(2m-k)! 2^k}{(m-k)! k!} x^k \quad (m \in \mathbb{N}^*).$$

La figure 7 montre quelques pôles; ceux du polynôme p_{13} sont reliés entre eux pour illustrer leur répartition dans le plan de Gauss. On montre après calculs, voir [6], que K_μ est diagonal dans la base des fonctions *harmoniques sphériques*

$$\left\{ H_m^{(n)}(\theta, \phi) \text{ t.q. } m \in \mathbb{N}, |n| < m \right\},$$

où θ et ϕ désignent les coordonnées sphériques, le rayon valant 1.

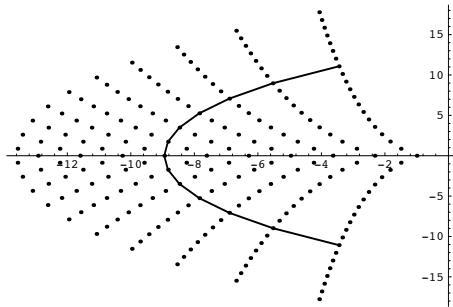


FIGURE 7 — Quelques pôles de la boule-unité, voir [6, 16]

4.4 Autres cas : résolution par approximation numérique

Le calcul de $K_\mu u$ nécessite une intégration double. Pour tester efficacement si $(K_\mu u) \equiv 0$ sur $\partial\Omega$, on applique la méthode de *collocation de Galerkin* : on calcule la matrice A carrée de dimension finie dont les entrées correspondent à

$$A_{j,k} = \langle K_\mu v_k, t_j \rangle_{L^2(\partial\Omega)},$$

où t_j représente la j ème fonction-test.

Le nombre $\mu \in \mathbb{C}$ est un pôle si et seulement si la plus petite valeur singulière de A est nulle.

Le calcul des éléments $A_{j,k}$ demande l'évaluation d'intégrales quadruples, avec une singularité faible dans l'intégrand pour $x = y$. Il paraît donc plus facile de choisir plutôt $A_{j,k} = (K_\mu v_k)(x_j)$ avec $x_j \in \partial\Omega$, mais alors la vitesse de convergence est assez faible.

Toute l'astuce consiste à choisir les bonnes fonctions-tests de base régulières, adaptées au bord $\partial\Omega$. Considérons une transformation bijective $T: \partial\Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$; on prend comme fonctions régulières des fonctions du type $H_m^{(n)} \circ T$:

$$v_m^{(n)}(\eta, \psi) = e^{in\psi} P_m^{(n)}(\cos \eta).$$

On construit ainsi la base $\mathcal{V}_M = \left\{ v_m^{(n)} \text{ t.q. } 0 < m < M, |n| < m \right\}$ et, comme fonctions-tests, on choisit les mêmes fonctions : $\mathcal{T}_M = \mathcal{V}_M$. Les enveloppes $\rangle \mathcal{V}_M \langle$ et $\rangle \mathcal{T}_M \langle$ sont alors de dimensions $(M+1)^2$.

Une telle approche a été envisagée pour la première fois de façon rudimentaire dans [9] et a été développée et adaptée à l'espace à trois dimensions dans [15, 16]. En effet, l'opérateur K_μ , les fonctions de base et les fonctions-tests vérifient les bonnes conditions de la théorie de collocation. Il en résulte des théorèmes de convergence, démontrés en détail dans [16].

Nous appelons *pôles numériques* les valeurs de $\mu \equiv \mu(M)$ déterminées par notre méthode de calcul, tandis que les valeurs exactes μ_0 sont nommées *pôles théoriques*. Par convergence, nous entendons que pour une méthode d'intégration numérique donnée, $\mu \rightarrow \mu_0$ si $M \rightarrow \infty$.

- Si $\mu \in \mathbb{C}_-$ n'est pas un pôle théorique, il existe $M_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $M > M_0$, μ n'est pas non plus un pôle numérique. Ainsi notre méthode ne produit pas de pôles parasites.
- Si μ est un pôle théorique, il existe $M_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_M > 0$ tels que

$$|\mu_M - \mu| < \theta_M$$

dès que $M > M_0$. De plus, $\theta_M = o(M^{-p})$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Comme p peut être choisi arbitrairement, les ordres de convergence obtenus sont **optimaux**, limités uniquement par la précision numérique de la méthode d'intégration choisie (p.ex. Gauss-Legendre) et le temps de calcul accordé. Il faut cependant préciser que ces ordres optimaux n'ont plus lieu lorsque l'obstacle considéré n'a pas de bord régulier. De plus, il reste à tester si la constante M_0 (dont l'existence, mais pas la valeur précise, est donnée par le théorème) s'avère raisonnablement petite.

4.5 Résultats numériques

En calculant numériquement les pôles de la boule, connus d'avance, on vérifie l'exactitude et l'efficacité de l'algorithme implémenté.

Dans une deuxième étape, on choisit comme obstacle un objet invariant par rotation. Cela permet de réduire significativement la quantité des calculs, car la plupart des éléments $A_{j,k}$ de la matrice de collocation s'annulent alors. En représentant graphiquement les pôles d'un ellipsoïde de révolution, on peut même vérifier les courbes de régression $\Re z = c + d |\Im z|^{1/3}$, dont deux sont indiquées sur la figure 8. Ces résultats ont été prévus de façon purement théorique dans [2].

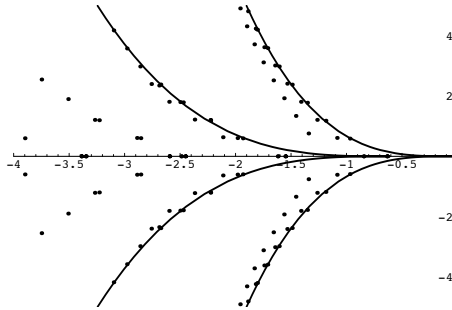


FIGURE 8 — Pôles d'un ellipsoïde de régression et courbes de régression, voir [16]

Dans tous les calculs entrepris, la constante M_0 susmentionnée s'avère assez petite et n'entrave pas la convergence rapide.

4.6 Application aux enceintes acoustiques

Nous avons tenté de comparer les pôles numériques calculés sur base des dimensions physiques de l'enceinte Beolab 8000 aux résultats publiés par le fabricant. L'audiométrie en champ libre a donné lieu au diagramme de la figure 5 à la page 49, tandis que nos calculs ont abouti à la figure 9.

Compte tenu des explications techniques fournies par le fabricant, l'interprétation suivante des résultats paraît raisonnable :

- les crêtes près de 100 Hz et 300 Hz sont provoquées en partie par l'égalisation active des graves (basses fréquences) ;
- la crête près de 300 Hz et la chute près de 4.2 kHz sont l'effet dû au filtrage au voisinage des fréquences de chevauchement ;
- il reste à étudier les crêtes près de 650–700 Hz, 800 Hz et 1300–1400 Hz. Ces fréquences correspondent à des valeurs de $|\Im \mu|$ égales à 1,23–1,33, 1,52 et 2,47–2,66 respectivement. Les pôles de résonance $\mu_1 \approx -0,71 \pm 1,20i$, $\mu_2 \approx -1,49 \pm 1,25i$, $\mu_3 \approx -1,09 \pm 1,33i$, $\mu_4 \approx -0,92 \pm 1,52i$, $\mu_5 \approx -1,16 \pm 1,53i$, $\mu_6 \approx -1,17 \pm 2,45i$ et $\mu_7 \approx -1,46 \pm 2,65i$ mettent en relation ces irrégularités du spectre sonore avec la forme de l'enceinte.

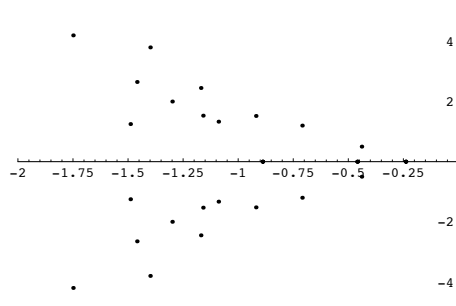


FIGURE 9 — Pôles de l'enceinte Beolab 8000, voir [16]

Ainsi tous les pôles numériques dont la partie réelle n'est pas trop éloignée de 0 et dont la partie imaginaire est non nulle, ont été pris en considération, à l'exception du pôle $\mu_8 \approx -0,44 \pm 0,50i$, de fréquence associée $f \approx 263,5$ Hz. L'effet de résonance provoqué par ce pôle se superpose à l'effet de l'égalisation active des graves susmentionnée.

Cet exemple montre bien la corrélation entre les crêtes du diagramme audiométrique et les pôles de résonance numériques. En résumé, toutes les irrégularités dans le spectre sonore peuvent être expliquées, voire anticipées mathématiquement, sans qu'on ne doive même fabriquer des prototypes d'enceinte !

4.7 Lien avec l'espace des fréquences

Comme dans le secteur automobile, il devient de plus en plus fréquent dans le secteur de la haute-fidélité de réaliser des études détaillées sur les qualités et défauts des enceintes ayant telle ou telle forme, avant même de construire physiquement des prototypes.

Dans tous ces raisonnements, il convient d'éviter des pôles de résonance μ_k tels que les $|\Im\mu_k|$ forment des rapports proches de

$$N \cdot 2^{-p_1} \cdot 3^{-p_2} \cdot 5^{-p_3},$$

voir l'équation (1) à la page 44. Sinon, des sons fondamentaux sont détériorés ensemble avec leurs propres harmoniques respectives, ce qui risque de se faire remarquer même par des auditeurs non avertis. Les techniques actuellement utilisées comprennent l'égalisation sur de nombreuses bandes rétrécies de fréquences et l'adaptation active des graves. Il en résulte des enceintes haute-fidélité dont le spectre sonore ne présente aucune crête ou chute significative (on les appelle ainsi dès qu'elles dépassent 3 dB) sur tout l'intervalle des fréquences audibles, c'est-à-dire de 20 Hz à 20 kHz.

5 Bibliographie

- [1] Bang & Olufsen (1991–1996), *Informations produit : enceintes actives*, Rapport technique (cahier des charges), Bogtrykkergården.
- [2] Bardos, C., Lebeau, G. and Rauch, J. (1987) Scattering Frequencies and Gevrey 3 Singularities, *Inventiones mathematicae* 90, 77-114.
- [3] Dahmen, W. and Reusken, A. (2008) *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, 2^e édition, Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Finscher, L. and Blume, F. (2010) *Die Musik in Geschichte und Gegenwart (MGG). Allgemeine Enzyklopädie der Musik*, 2^e édition, 29 volumes, Bärenreiter & Metzler (dernière mise à jour).
- [5] Jourdain, R. (1998) *Das wohltemperierte Gehirn*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- [6] Laubin, P. and Zeihen, P. (1995-1996) *Etude théorique du phénomène de scattering et caractérisation des pôles de la diffusion*, Notes de séminaire, Université de Liège.
- [7] Lax, P. and Phillips, R. (1967) *Scattering Theory*, Pure and Applied Mathematics 26, Academic Press, New York.
- [8] Mazzola, G. (1990) *Geometrie der Töne. Elemente der mathematischen Musiktheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [9] Poisson, O. (1992) *Calculs des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques en dimension 2*, Thèse de doctorat, Université de Paris IX Dauphine.
- [10] Do Rêgo Silva, J. (1994) *Acoustic and Elastic Wave Scattering Using Boundary Elements*, Computational Mechanics Publications 18, Southampton.
- [11] Salomon, D. (2004) *Data Compression*, 3^e édition, Springer-Verlag, New York.
- [12] Schwarz, H. (1997) *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart.
- [13] Yosida, K. (1974) *Functional Analysis*, Grundlehren 123, Springer-Verlag, New York.
- [14] Zeihen, P. (1995) *Potentiels de surface et résolution du problème de Dirichlet dans des ouverts polygonaux*, Mémoire de licence, Université de Liège.
- [15] Zeihen, P. (1997) *Résonances associées à la diffraction d'ondes*, Bulli 3/97, Association Nationale des Étudiants Ingénieurs Luxembourgeois, Luxembourg.
- [16] Zeihen, P. (2002) *Diffusion d'ondes dans l'espace à trois dimensions. Calcul des pôles de résonance et application en acoustique*, Thèse de doctorat, Université de Liège.

À la recherche de primitives

Nicolas Richard *
nrichard@ulb.ac.be

Résumé

Les pages qui suivent tentent de mettre en avant quelques définitions et théorèmes afin de comprendre à quel point l'acte de recherche d'une primitive est difficile par rapport à celui du calcul d'une dérivée.

Le but de ces notes est d'être compréhensibles par des étudiants intéressés par les mathématiques et ayant terminé leur dernière année du secondaire. À ce titre, et comme c'est d'ailleurs l'usage en général, je n'hésiterai pas à prendre des raccourcis, quitte à manquer souvent de généralité, de rigueur, voire même d'exactitude (mais alors tout à fait involontairement).

Sommaire

1	Définitions	58
2	Algorithme d'Euclide et conséquences	61
3	Recherche de primitives	64
4	Bibliographie	67

*L'auteur est Assistant au Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles. Il est titulaire d'un Doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles et travaille sur la théorie des espaces symétriques en géométrie symplectique.

1 Définitions

Si le calcul de dérivées a quelque chose de « mécanique », avec une recette simple qui permet de dériver toutes les fonctions qu'on connaît, le calcul de primitives semble composé d'une myriade de recettes qui fonctionnent toutes dans certains cas très particuliers. Pire encore, un étudiant un peu curieux aura certainement remarqué que certaines fonctions, pourtant d'apparence simple, « n'admettent pas de primitive ». Nous allons, dans les quelques pages qui suivent, tenter de donner des clés pour la compréhension de cette problématique via les deux questions suivantes : (i) que signifie le fait de « ne pas admettre de primitive » ?, et (ii) pourquoi la fonction e^{x^2} n'admet-elle pas de primitive ?

Commençons par rappeler en quoi la dérivation est si facile : les règles de dérivation, bien connues, sont

1. $(f + g)' = f' + g'$,
2. $(fg)' = f'g + fg'$, et
3. $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$, mieux connue sous la forme $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Comme mentionné plus haut, une simple application des trois règles énoncées ci-dessus permet d'obtenir une expression explicite de la dérivée de *toutes* les fonctions auxquelles on peut penser dès que l'on connaît les dérivées de « fonctions élémentaires » comme les fonctions polynomiales ($(x^n)' = n x^{n-1}$), les fonctions exponentielles ($(e^x)' = e^x$) ou les fonctions logarithmiques ($(\ln(x))' = 1/x$).

« Dans l'autre sens » une primitive g d'une fonction f est une fonction telle que $g' = f$. On note alors $\int f = g$. Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de règles pour exprimer $\int fg$ ou $\int f \circ g$ de façon générique en fonction de f et g . Ceci a pour conséquence qu'on peut, partant de fonctions élémentaires, ne jamais réussir à trouver une expression simple pour leur primitive (penser à $x \mapsto e^{x^2}$).

Afin de préciser le problème, il nous faudra commencer par le formuler précisément : en effet on sait que toute fonction continue admet une primitive, donc le problème n'est pas qu'il n'*existe pas* de primitive mais plutôt que nous sommes *incapables* d'en exhiber une sous une forme agréable. Qu'est-ce que ça veut dire, et dans quelle mesure en sommes-nous incapables ? Ici, « être incapable » relève du même niveau d'incapacité que nous avons à trouver un nombre dont le carré vaut 2 sans invoquer le symbole $\sqrt{\quad}$ qui, il faut bien l'admettre, est uniquement là pour répondre à ce genre de questions. De la même manière, on peut prouver que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ n'admet pas de primitive « élémentaire » : il faut inventer un symbole. Mais quels symboles s'autorise-t-on ? La première étape est donc de préciser ce qu'on entend par « fonction élémentaire ». Dans ce but nous commençons par introduire ou rappeler la définition d'un certain nombre d'objets.

1.1 Structures et polynômes.

Un ensemble sans structure, c'est comme un meuble suédois sans la notice de montage : ça pourrait être un meuble, mais ça pourrait aussi être un réacteur

nucléaire si MacGyver passe par là. Pour structurer un ensemble, on peut lui adjoindre une relation d'ordre (par exemple la relation « plus petit que » sur les réels), une loi (addition, multiplication, . . .), le choix d'un élément particulier (penser au rôle que joue l'origine du plan : il n'en joue aucun, sauf qu'on l'appelle « l'origine »), une notion de distance, etc.

Les structures mathématiques usuelles sont les groupes, les corps, les champs, les ensembles ordonnés, etc. Rappelons la définition d'un groupe et d'un champ.

Définition 1. Un *groupe* est un ensemble structuré (G, \star) , où G est un ensemble qu'on munit d'une loi \star associative, possédant un neutre et pour laquelle chaque élément admet un inverse. La loi peut être *commutative* ou pas.

Définition 2. Un *corps* est un ensemble \mathbb{K} muni de deux lois $+$ et \cdot telles que

1. $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif (dont le neutre est noté 0),
2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe (dont le neutre est noté 1), et
3. il y a distributivité de \cdot sur $+$.

Si par ailleurs le groupe multiplicatif est commutatif, on parle de *corps commutatif* ou de *champ*.

Exemple. L'exemple typique de champ est \mathbb{R} avec l'addition et la multiplication usuelles. Mentionnons également le champ des rationnels \mathbb{Q} et le champ des complexes \mathbb{C} . Un non-exemple serait \mathbb{Z} car tous les éléments non-nuls ne sont pas forcément inversibles : alors que 1 est inversible dans \mathbb{Z} (son inverse est 1), un élément tel que 2 n'a pas d'inverse dans \mathbb{Z} .

Venons-en à présent à la notion de *polynômes*. Un *polynôme de degré* $d \in \mathbb{N}$ à coefficients dans un corps \mathbb{K} est un objet du type

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_dX^d$$

où $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$ et $a_d \neq 0$. Dans cette notation, X n'est pas une variable mais une « décoration formelle ». En particulier, un polynôme (dans cette acceptation) n'a pas de domaine ou d'ensemble image : ce n'est pas une fonction. Par contre on peut évidemment associer à P une *fonction polynomiale*, notée f_P , qui envoie une variable x sur $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d$. La distinction est fondamentale dans le sens où il s'agit d'objets de nature complètement différente.

Nous disons qu'un polynôme P sur un champ \mathbb{K} est *factorisable* ou *réductible* sur \mathbb{K} si il s'écrit comme le produit de deux polynômes A et B non-constants (c'est-à-dire de degré au moins égal à 1) à coefficients dans \mathbb{K} . S'il n'est ni réductible ni constant, on dit qu'il est *irréductible*.

1.2 Extensions algébriques et transcendentes

Une question naturelle est de connaître le « plus petit champ » contenant certains éléments. Par exemple le plus petit champ contenant \mathbb{Z} est \mathbb{Q} : il faut adjoindre à \mathbb{Z} tous les inverses d'éléments non-nuls et leurs multiples, ce qui est justement le rôle des fractions. Cette notion donne lieu à celle d'*extension de champ*, et ce comme suit.

Définition 3. Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux champs, et soit α un élément de \mathbb{L} . On note $\mathbb{K}(\alpha)$ le plus petit champ de \mathbb{L} contenant \mathbb{K} et α ; il est appelé extension de \mathbb{K} par α .

Exemple. Si l'on travaille dans $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, l'extension de \mathbb{Q} par $\sqrt{2}$ est

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ a + b\sqrt{2} \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

En effet, le membre de droite est un corps (cela mérite quelques calculs), et il faut certainement que tout élément du membre de droite soit dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pour avoir la stabilité par l'addition et la multiplication : c'est donc le plus petit corps contenant les rationnels et $\sqrt{2}$.

Notons que pour voir que c'est un corps, il faut en particulier que chaque élément non-nul possède un inverse ce qui peut-être n'est pas immédiat. En fait on peut observer que l'inverse d'un nombre $a + b\sqrt{2}$ est donné par

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$

Il est laissé au lecteur le soin de vérifier que le dénominateur ne s'annule effectivement pas si $a + b\sqrt{2} \neq 0$.

Il y a plusieurs sortes d'extension de corps de ce type. Celle que nous venons de voir est appelée *algébrique*. Voyons un autre exemple.

Exemple. Dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , l'extension de \mathbb{Q} par π est l'ensemble des éléments de la forme

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Une extension de cette sorte est appelée *transcendante*. La différence fondamentale avec les extensions algébriques est qu'on prend ici un nombre arbitraire de combinaisons de π et de ses puissances. Plus précisément :

Définition 4. Soient deux champs $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et soit α un élément de \mathbb{L} . On dit que α est *algébrique* sur \mathbb{K} si il existe un polynôme non-nul P à coefficients dans \mathbb{K} tel que $f_P(\alpha) = 0$ (f_P est la fonction polynomiale associée à P , définie sur \mathbb{L}). Dans le cas contraire, α est dit *transcendant* sur \mathbb{K} . On appelle de même « algébrique » ou « transcendante » l'extension de \mathbb{K} par α .

Propriété 5. L'ensemble des éléments algébriques d'une extension forme un corps.

Ce dernier énoncé dit essentiellement que les algébriques sont stables par produit, addition et division. Ce n'est pas immédiat. À titre d'exemple, les nombres algébriques de l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est un corps (contenu dans \mathbb{R}) qui n'est pas \mathbb{R} tout entier (π , par exemple, n'est pas dedans).

Remarquons enfin la chose suivante : lorsque $\mathbb{K}(t)$ est une extension transcendante de \mathbb{K} , ses éléments s'écrivent sous la forme

$$\left\{ a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \text{ t.q. } n \in \mathbb{N}, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

On peut dès lors assimiler $\mathbb{K}(t)$ à l'ensemble des polynômes (de tout degré) en l'indéterminée t et à coefficients dans \mathbb{K} . Cette assimilation est importante car on peut alors, en présence d'une extension transcendante, appliquer aux éléments de l'extension des algorithmes qui fonctionnent sur les polynômes.

1.3 Dérivabilité formelle : champs différentiels

Un champ différentiel est un champ (c'est-à-dire un corps commutatif) muni d'une opération supplémentaire de « dérivation », notée par un $'$ pour rappeler la dérivée usuelle. Cette opération prend donc un élément a du champ et l'envoie sur a' . Plus précisément, on a :

Définition 6. Un *champ différentiel* est un champ $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ muni d'une opération de dérivation $'$ telle que

$$\forall a, b \in \mathbb{K} \quad : \quad (a + b)' = a' + b' \quad \text{et} \quad (ab)' = a'b + ab'.$$

De ces conditions, en écrivant des égalités du type $0 = 0 + 0$, $b + (-b) = 0$ ou $a = \frac{a}{b} \cdot b$, et en dérivant, on déduit les règles usuelles :

$$\forall a, b \in \mathbb{K} \quad : \quad 0' = 0, \quad (a - b)' = a' - b', \quad \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2},$$

et on obtient également la règle suivante, qu'on appellera « règle de dérivation logarithmique » pour des raisons laissées à l'imagination du lecteur :

$$\frac{(a^k b^l)'}{a^k b^l} = k \frac{a'}{a} + l \frac{b'}{b} \quad \frac{(a^k / b^l)'}{a^k / b^l} = k a' / a - l b' / b, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

En appelant *constante* un élément dont la dérivée s'annule, les règles ci-dessus montrent que l'ensemble des constantes d'un champ différentiel est encore un champ différentiel.

2 Algorithme d'Euclide et conséquences

2.1 Calcul du pgcd.

De façon naturelle, nous appellerons *diviseur* d'un polynôme P tout polynôme D de degré au moins égal à 1 tel qu'il existe un polynôme \tilde{D} avec $P = D\tilde{D}$. Si P et Q sont deux polynômes, on désignera par $\text{pgcd}(P, Q)$ un diviseur commun de plus haut degré possible (ou, si l'unicité est nécessaire, l'unique pgcd dont le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1). Grâce à la division euclidienne, nous allons obtenir un moyen simple de calculer le pgcd de deux polynômes.

En effet, étant donnés N et D deux polynômes, procédons à leur division euclidienne pour obtenir $N = DQ + R$ avec le degré de R strictement inférieur à celui de D , et tenons le raisonnement suivant : si C est un diviseur commun à N et D , il est clair que C divise également $N - DQ = R$; similairement, si C est un diviseur commun à D et R , il divise également $DQ + R = N$. On en

déduit que les diviseurs communs à N et D sont les mêmes que les diviseurs communs à D et R . Dès lors, $\text{pgcd}(N, D) = \text{pgcd}(D, R)$.

Continuons le raisonnement : à un renommage près, on peut décider que le degré de D est plus petit que celui de N (sinon la division euclidienne n'apporte rien car alors $Q = 0$). On voit alors que le calcul du pgcd de N et D se ramène au calcul du pgcd de deux polynômes (D et R) de degrés plus petits. On continue donc la procédure afin de réduire de plus en plus le degré des polynômes impliqués, ce qui nous donne un algorithme de calcul de pgcd :

$$\begin{array}{ll}
 N &= DQ + R && \text{avec } \text{pgcd}(N, D) = \text{pgcd}(D, R) \\
 D &= RQ_1 + R_1 && \text{avec } \text{pgcd}(D, R) = \text{pgcd}(R, R_1) \\
 R &= R_1Q_2 + R_2 && \text{avec } \text{pgcd}(R, R_1) = \text{pgcd}(R_1, R_2) \\
 R_1 &= R_2Q_3 + R_3 && \text{avec } \text{pgcd}(R_1, R_2) = \text{pgcd}(R_2, R_3) \\
 &\vdots && \\
 R_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n && \text{avec } \text{pgcd}(R_{n-2}, R_{n-1}) = \text{pgcd}(R_{n-1}, R_n) \\
 R_{n-1} &= R_nQ_{n+1} + R_{n+1} && \text{avec } \text{pgcd}(R_{n-1}, R_n) = \text{pgcd}(R_n, R_{n+1}),
 \end{array}$$

où chaque ligne correspond à une division euclidienne. D'après le raisonnement ci-dessus sur le degré, on est sûr de pouvoir arriver à $R_{n+1} = 0$ en un nombre fini d'étapes (après quoi on ne peut évidemment plus diviser). On en déduit donc que $\text{pgcd}(N, D) = \text{pgcd}(R_{n-1}, R_n) = \text{pgcd}(R_n, 0) = R_n$. Mettons cela en avant en écrivant :

Propriété 7 (Algorithme d'Euclide pour le pgcd). *Il existe un algorithme permettant de calculer le pgcd de deux polynômes.*

2.2 Relation de Bézout

Allons un peu plus loin en reprenant les équations ci-dessus obtenues via l'algorithme d'Euclide. La première équation se réécrit

$$R = N - DQ,$$

donc R est une combinaison de N et D . La deuxième équation dit

$$R_1 = D - RQ_1 = D - (N - DQ)Q_1,$$

donc R_1 est une combinaison de D et R , or R était une combinaison de D et N , donc R_1 est une combinaison de D et N , en l'occurrence

$$R_1 = D(1 + QQ_1) - NQ_1,$$

et par suite, en continuant de même, on obtient qu'il existe des polynômes A et B tels que $AD + BN = R_n = \text{pgcd}(N, D)$. Résumons :

Propriété 8 (Relation de Bézout). *Si N et D sont deux polynômes sur un (même) champ :*

1. *il existe des polynômes A et B tels que*

$$AD + BN = \text{pgcd}(N, D),$$

2. pour tous les polynômes A et B , le pgcd de N et D divise $AN + BD$, et
3. s'il existe des polynômes A et B tels que

$$AD + BN = 1$$

alors $\text{pgcd}(N, D) = 1$.

2.3 Décomposition de fractions

La relation de Bézout nous apprend que si un polynôme Q se décompose sous la forme $Q = Q_1 Q_2$, avec $\text{pgcd}(Q_1, Q_2) = 1$, alors il existe A et B des polynômes tels que

$$AQ_1 + BQ_2 = 1$$

et donc, en divisant par Q , on obtient

$$\frac{A}{Q_2} + \frac{B}{Q_1} = \frac{1}{Q}.$$

De ceci, on tire que si on sait factoriser le dénominateur d'un quotient P/Q de deux polynômes (ce qu'on appelle une fraction rationnelle), alors on peut décomposer ce quotient sous la forme

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{Q_1^{e_1}} + \dots + \frac{A_n}{Q_n^{e_n}},$$

où les Q_i sont des polynômes irréductibles deux-à-deux premiers entre eux, et les e_i sont des exposants entiers naturels, de sorte que $Q = Q_1^{e_1} \dots Q_n^{e_n}$. En d'autres termes, toute fraction rationnelle s'écrit comme une somme de fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance (entière) d'un polynôme irréductible.

Soit une fraction rationnelle donnée sous la forme P/Q^k , avec Q irréductible et k entier naturel. Par des divisions euclidiennes par Q successives, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P &= D_1 Q + R_1 \\ D_1 &= D_2 Q + R_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

et ce processus s'arrête quand le degré de D_i est plus petit que le degré de Q . Donc, en partant de la fin et en remontant pour tout remplacer dans la première ligne, nous obtenons

$$P = (((\dots)Q + R_3)Q + R_2)Q + R_1 = \dots + R_3 Q^2 + R_2 Q + R_1,$$

ce qui permet enfin d'écrire

$$\frac{P}{Q^k} = \dots + \frac{R_3}{Q^{k-2}} + \frac{R_2}{Q^{k-1}} + \frac{R_1}{Q^k},$$

où chaque R_i est de degré inférieur à Q . Une telle fraction rationnelle du type $\frac{R}{Q^i}$ avec $\deg R < \deg Q$, Q irréductible et i entier strictement positif, est appelée une *fraction simple* ou un *élément simple*.

Remarque. Cette écriture est trompeuse, laissant croire que chaque terme admet réellement un dénominateur alors que bien entendu la fraction $1/Q^{k-i}$ est un polynôme si i est plus grand que k (c'est-à-dire si il y a au moins k divisions euclidiennes par Q à effectuer).

Résumons tout cela sous la forme suivante :

Propriété 9 (Décomposition en fractions simples). *Étant donnée une fraction rationnelle, si une factorisation en produit de polynômes irréductibles du dénominateur est connue, il est possible d'écrire la fraction rationnelle sous forme d'une somme d'un polynôme et de fractions rationnelles du type P/Q^k où Q est irréductible et $\deg P < \deg Q$.*

Notons également que cette écriture est unique si l'on prend les précautions élémentaires : un seul terme polynomial et un seul terme de dénominateur Q^k pour chaque facteur irréductible et pour chaque valeur de k . L'unicité vient de l'unicité pour la division euclidienne ainsi que du lemme suivant.

Lemme 10. *Si $P_1/Q_1 + P_2/Q_2 = 0$, avec $\deg P_i < \deg Q_i$ et $\text{pgcd}(Q_1, Q_2) = 0$, alors $P_1 = P_2 = 0$.*

Démonstration. On obtient $P_1Q_2 + P_2Q_1 = 0$. La relation de Bézout implique l'existence de polynômes A, B tels que $AQ_1 + BQ_2 = 1$ et dès lors on obtient après calculs que

$$Q_1(P_1A - P_2B) = P_1,$$

ce qui contredit l'hypothèse $\deg P_1 < \deg Q_1$, sauf si $P_1A - P_2B = 0$, auquel cas $P_1 = 0$. De même pour P_2 . \square

3 Recherche de primitives

3.1 Fonctions élémentaires

Afin de définir le problème de recherche de primitives, nous devons savoir quelles classes de fonctions seront « élémentaires ». Sont considérées comme élémentaires les fractions rationnelles, ainsi que la prise de logarithme ou d'exponentielle.

Plus précisément, donnons-nous un champ différentiel \mathbb{K} ayant $\text{Con}(\mathbb{K})$ pour sous-champ de constantes. Une extension de champ différentiel $\mathbb{K}(\alpha)$ est dite *élémentaire simple* si au moins l'une des conditions suivantes est vraie :

1. α est algébrique sur \mathbb{K} ;
2. il existe $f \in \mathbb{K}$ non-nul tel que

$$\alpha' = \frac{f'}{f},$$

auquel cas on dira que α est **un** logarithme de f ;

3. il existe $f \in \mathbb{K}$ tel que

$$\alpha' = \alpha f',$$

auquel cas on dira que α est **une** exponentielle de f .

Une extension $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est dite *élémentaire* si les extensions successives

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}(\alpha_1) \subset \mathbb{K}(\alpha_1, \alpha_2) \dots \subset \mathbb{K}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

sont toutes élémentaires simples. Les éléments d'une extension élémentaire de \mathbb{K} sont appelés *élémentaires* sur \mathbb{K} .

Exemple. Étant donné un champ \mathbb{K} quelconque, on peut toujours le munir de la structure triviale de champ différentiel en imposant $a' = 0$ pour tout $a \in \mathbb{K}$. L'ensemble des fractions rationnelles sur \mathbb{K} , noté $\mathbb{K}(x)$ (c'est l'ensemble des quotients de polynômes à coefficients dans \mathbb{K}), devient un champ différentiel en imposant $x' = 1$. Son champ des constantes est \mathbb{K} lui-même.

En particulier, $\mathbb{C}(x)$ (resp. $\mathbb{R}(x)$ ou $\mathbb{Q}(x)$) est un champ différentiel dont les constantes sont les complexes (resp. les réels ou les rationnels). Les fonctions \ln , et \exp sont élémentaires sur $\mathbb{C}(x)$. Moins évident, la fonction \sin est également élémentaire puisque

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

3.2 Un théorème de Liouville

Avec ces définitions, nous pouvons écrire un des premiers résultats fondamentaux de cette théorie.

Théorème (Liouville). *Soit $\mathcal{F} = \mathbb{K}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une extension élémentaire d'un champ différentiel \mathbb{K} et ayant les mêmes constantes que \mathbb{K} . Si un élément $f \in \mathbb{K}$ possède une primitive dans \mathcal{F} , alors il existe un entier k , des éléments $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}$ et des constantes c_1, \dots, c_k de \mathbb{K} tels que*

$$f = v_0' + c_1 \frac{v_1'}{v_1} + \dots + c_k \frac{v_k'}{v_k}.$$

Ce théorème dit donc en essence la chose suivante : si, pour intégrer une fonction donnée, il suffit d'ajouter des fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques sans apparition de nouvelles constantes, alors on peut également intégrer cette fonction en ne rajoutant que des logarithmes. On pourra dire, de manière encore moins précise, que le processus d'intégration « crée » des logarithmes, mais pas de fonctions algébriques ni exponentielles.

L'hypothèse que le champ des constantes de \mathcal{F} est identique à celui de \mathbb{K} est illustrée par l'exemple $1/(x^2 - 2)$ dans $\mathbb{Q}(x)$, fonction qui ne peut pas être écrite sous la forme proposée dans le théorème de Liouville avec des v_i dans $\mathbb{Q}(x)$ et des c_i dans \mathbb{Q} . En particulier, ceci permet de montrer que pour intégrer la fonction $\frac{1}{x^2-2}$, il est nécessaire de « connaître » $\sqrt{2}$ (voir [Ris69, p. 170]) :

Proposition 11. *S'il existe une extension élémentaire \mathcal{F} du champ des fractions formelles $\mathbb{K}(x)$ d'un champ \mathbb{K} , et si $\frac{1}{x^2-2}$ (élément de $\mathbb{K}(x)$) admet une primitive dans \mathcal{F} , alors il existe un élément de \mathcal{F} dont le carré vaut 2.*

3.3 (Non-)intégrabilité de fe^g

Nous allons ici aborder l'exemple des fonctions du type $x \mapsto f(x)e^{g(x)}$, où f et g sont des fonctions rationnelles appartenant à $\mathbb{C}(x)$, et g est non-constante. Nous travaillons donc dans le champ $\mathbb{C}(x, e^g)$.

Remarquons d'abord que, g étant non-constant, e^g est transcendant sur $\mathbb{C}(x)$. En effet, supposons qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}(x)$ tels que le polynôme minimal s'écrive :

$$e^{ng} + a_{n-1}e^{(n-1)g} + \dots + a_0 = 0$$

et dérivons :

$$ng'e^{ng} + (a'_{n-1} + (n-1)a_{n-1}g')e^{(n-1)g} + \dots + a'_0 = 0$$

ce qui, par unicité du polynôme minimal (il faut diviser par ng'), implique

$$\frac{a'_0}{a_0} = ng'.$$

Or, cette dernière égalité n'est pas possible pour la raison suivante : en écrivant $a_0 = P/Q$, on voit que le membre de gauche vaut $P'/P - Q'/Q$ (règle de la dérivée logarithmique), et donc ne contient que des facteurs linéaires au dénominateur (car s'il y a un facteur à l'exposant k dans un polynôme, le polynôme dérivé contient le même facteur à l'exposant au minimum $k-1$) ; le membre de droite, par contre, est la dérivée d'une fonction rationnelle, et en écrivant cette dernière en fractions simples, on observe que sa dérivée ne peut pas contenir de facteurs linéaires au dénominateur. Ceci est une contradiction. Donc e^g est bien transcendant sur $\mathbb{C}(x)$ lorsque g n'est pas constante.

Soient maintenant f non-nulle et g non-constante des éléments de $\mathbb{C}(x)$ comme ci-dessus. Si fe^g possède une primitive élémentaire, alors il existe des constantes (complexes) c_1, \dots, c_n et des fonctions $u_0, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}(x, t)$ (avec $t = e^g$) tels que

$$ft = u'_0 + \sum_i c_i \frac{u'_i}{u_i}.$$

Comme $t' = g't$, chaque terme $\frac{u'_i}{u_i}$ est un quotient de deux polynômes (en t) de même degré. Après décomposition en fractions simples, ces termes sont donc la somme d'un élément de $\mathbb{C}(x)$ et d'une fraction à dénominateur irréductible. En particulier, ils ne donnent pas de terme polynomial de degré 1 en t .

La seule contribution (penser à l'unicité de la décomposition en fractions simples !) de degré 1 en t provient donc du terme u'_0 . En décomposant u_0 en fractions simples, on a un terme polynomial en t , et des fractions du type $\frac{P}{Q^i}$ avec P, Q polynômes en t et $\deg P < \deg Q$ et Q irréductible (en tant que polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$) :

- En dérivant le second type de terme, on obtient des termes du type $\frac{P'}{Q^i} - i \frac{PQ'}{Q^{i+1}}$ dont les numérateurs sont de degré inférieur aux dénominateurs, ce qui sous forme de fraction simple conduit à l'absence de termes polynomiaux, et en particulier à l'absence de terme de degré 1 en t .

- Concernant le terme polynomial de u_0 , il peut être écrit $u_0 = v_0 + tv_1 + \dots + t^d v_d$, où $v_j \in \mathbb{C}(x)$ et $d \in \mathbb{N}$. La dérivée de chacun de ces termes est $(v_j' + jg'v_j)t^j$.

On conclut, de cette discussion et de l'unicité de la décomposition en fractions simples, que les termes de degré 1 en t proviennent de la dérivation de (tv_1) . Ceci prouve $ft = (tv_1)'$, où v_1 est un élément de $\mathbb{C}(x)$. En d'autres termes :

Proposition 12. *Si fe^g admet une primitive élémentaire, alors elle admet une primitive élémentaire de la forme he^g où h est une fonction rationnelle.*

Corollaire 13. *La fonction e^{x^2} n'admet pas de primitive élémentaire.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que he^{x^2} soit une primitive élémentaire de e^{x^2} . Alors forcément $h' + 2xh = 1$. En décomposant h en fractions simples dans $\mathbb{C}(x)$, nous obtenons

$$h(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i + \sum_{j=0}^e \frac{b_j}{x - c_j},$$

de sorte que la décomposition en fractions simples de $h' + 2xh$ contient des termes contenant un carré au dénominateur dès qu'un des b_j est non-nul (provenant de h' , ces termes ne sont pas compensés par les termes venant de $2xh$). Or, ceci n'est pas possible puisque $h' + 2xh = 1$. Dès lors, $h(x)$ est en fait un polynôme de degré noté d .

Or si $h \neq 0$, xh est de degré $d + 1$, et h' de degré $d - 1$. Ceci est une contradiction et implique donc $h = 0$. Or $h = 0$ contredit l'hypothèse que he^{x^2} se dérive en e^{x^2} . □

4 Bibliographie

- [BA98] Bronstein, M. and Antipolis, I.S. (1998) *Symbolic integration tutorial*.
- [Dav83] Davenport, J.H. (1983) Intégration algorithmique des fonctions élémentairement transcendentes sur une courbe algébrique, *Ann. Inst. Fourier* 34, 271–276.
- [Fel] Feldmann, D. *Le théorème de Liouville*.
<http://denisfeldmann.fr/PDF/liou.pdf>.
- [Laz85] Lazard, D. (1985) *Primitives des fonctions élémentaires (d'après Risch et Davenport)*. Sémin. Bourbaki, 36e année, Vol. 1983/84, Exp. No. 630, Astérisque 121-122, 295-308.
- [Ris69] Risch, R.H. (1969) The problem of integration in finite terms. *Trans. Am. Math. Soc.* 139, 167–189.
- [Ris70] Risch, R.H. (1970) The solution of the problem of integration in finite terms. *Bull. Am. Math. Soc.* 76, 605–608.

- [Ros72] Rosenlicht, M. (1972) Integration in finite terms. *Am. Math. Mon.* 79, 963–972.
- [Tra84] Trager, B.M. (1984) *Integration of Algebraic Functions*. Thèse de doctorat, EECS, MIT, Cambridge.

Groupes de Coxeter et kaléidoscopes : une bal(l)ade de l'autre côté du miroir

Aude Nguyen *
audeng@ulb.ac.be

Résumé

L'idée de base de ces notes est de donner une approche intuitive et ludique aux groupes de Coxeter finis (ou sphériques), mais surtout de susciter la curiosité à propos de ces groupes (finis ou non) aux applications riches que ce soit en algèbre, en théorie des immeubles, ou en physique. À cet effet, l'excellent article de Roe Goodman sur les kaléidoscopes ([Goo04]) a servi de base à la réalisation de l'exposé sur lequel ces notes sont basées, car il permet à tout aficionado des mathématiques d'aborder le sujet, voire de construire son propre kaléidoscope.

La première partie de ces notes s'attache à l'étude et à la classification des kaléidoscopes à 2 et 3 miroirs et permet en réalité d'aborder les groupes de Coxeter de type $I_2(m)$, A_3 , B_3 et H_3 .

La seconde partie de ces notes propose une approche un peu plus générale, bien qu'esquissée, des groupes de Coxeter sphériques définis pour des espaces euclidiens de dimension quelconque. La classification de ces groupes y est présentée (voir [Hum90] pour une preuve détaillée).

Sommaire

1	Introduction	70
2	Kaléidoscopes à deux et trois miroirs	70
3	Kaléidoscopes dans \mathbb{R}^n , $n > 3$	77
4	Bibliographie	82

*L'auteur est enseignant à l'institut pédagogique Defré – HEB. Elle est titulaire d'un Doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles.

1 Introduction

Pléthore d'enfants à travers le monde se sont amusés et s'amuse encore à jouer avec des miroirs, tout comme les adultes qui ne sont en réalité que de grands enfants. Je me souviens encore de mon émerveillement et de ma stupeur le jour où, enfant, je constatai que, lorsque deux miroirs sont placés en vis-à-vis, les images réfléchies se répètent indéfiniment. Que dire de ma joie lorsque je reçus mon premier kaléidoscope ! Il n'est dès lors pas difficile d'imaginer mon exaltation de mathématicienne lorsque je compris que tous ces phénomènes « magiques » pouvaient être expliqués et prolongés par la théorie des groupes et plus particulièrement par les groupes de Coxeter. Quel monde s'ouvre ainsi à nos yeux !

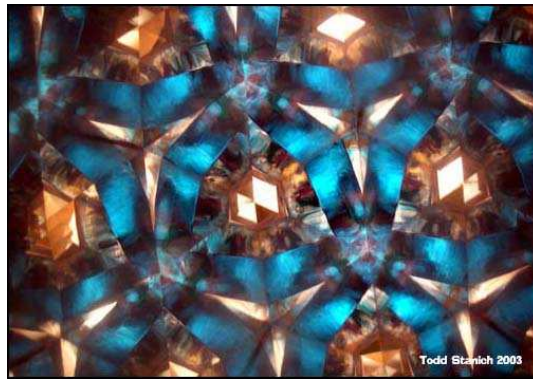
Le sujet étant trop vaste pour pouvoir être exposé en détail ici, il a fallu faire un choix et celui-ci s'est porté sur les kaléidoscopes fournissant un nombre fini d'images. En effet ceux-ci permettent d'aborder la classification des groupes finis de Coxeter : la section 2 nous permet de nous forger une intuition avant d'aborder la partie plus abstraite à la section 3.

2 Kaléidoscopes à deux et trois miroirs

2.1 Observations préliminaires

Si nous ouvrons notre dictionnaire¹, nous trouvons la définition suivante :

kaléidoscope n.m. (du grec *kalos*, beau, *eidos*, aspect, et *skopein*, regarder) Appareil formé d'un tube opaque, contenant plusieurs miroirs disposés de façon que l'objet regardé ou les petits objets colorés placés dans le tube y produisent des dessins symétriques et variés.



2

1. En l'occurrence le *Petit Larousse illustré 2002*

2. Image provenant du site <http://www.atoute.org/n/forum/showthread.php?t=81915>

En regardant de plus près à l'étymologie du mot, il est intéressant de constater qu'une fois de plus l'Homme a associé l'idée de beauté (*kalos*) à l'idée de symétrie. Par extension, le Mathématicien y verra l'association de cette même idée de beauté à la notion de groupe.

Observons quelques instants la photographie ci-dessus. Outre l'esthétisme, la première constatation est l'infinité des images produites par l'agencement des miroirs à l'intérieur du dispositif. Malheureusement, comme précisé dans l'introduction, nous nous limitons à l'étude des kaléidoscopes fournissant un nombre fini d'images.

Afin de mieux comprendre ce que cette restriction implique, concentrons-nous dans un premier temps sur le cas où notre kaléidoscope est constitué de deux miroirs. Si ceux-ci sont parallèles, il est immédiat que le nombre d'images produites sera infini. Nous pouvons d'ores et déjà écarter ce cas de figure sans autre forme de procès. Nos deux miroirs doivent alors être joints suivant une arête. Est-ce suffisant pour produire un nombre fini d'images? La réponse est quasiment aussi immédiate que dans le cas des miroirs parallèles : non!

Nous allons voir à la section 2.3 que la condition nécessaire et suffisante à la production d'un nombre fini d'images est que nos deux miroirs soient joints suivant une arête *et* selon un angle dièdre étant une fraction entière de π : $\frac{\pi}{m}$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$).

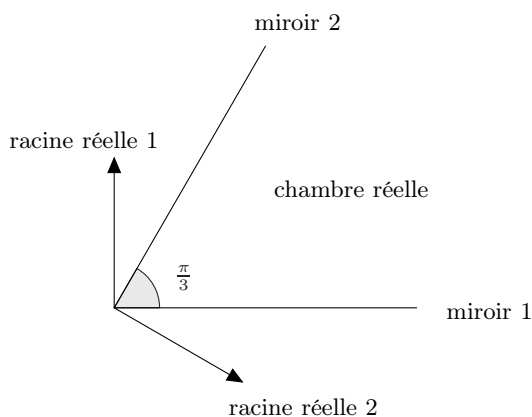


FIGURE 1 — Deux miroirs faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$

Il est maintenant temps de définir quelques objets qui nous permettront, notamment, de prouver la véracité de cette dernière affirmation.

Nous appelons *chambre réelle* le dièdre délimité par les deux miroirs et nous associons à chaque miroir un vecteur qui lui est perpendiculaire. Ce sont les *racines réelles* des miroirs (voir figure 1). Par opposition et de façon rendue assez évidente par la linguistique, nous définissons les chambres, miroirs et racines

virtuels. Il arrivera également que nous parlions d'une chambre, d'un miroir ou d'une racine sans préciser leur nature réelle ou virtuelle, il s'agira alors de l'une ou l'autre nature, sans distinction.

Plaçons un objet (bien réel) dans la chambre réelle et réalisons les symétries induites par nos miroirs. Afin de fixer les idées, reportons-nous à la figure 2, où l'objet réel est un drapeau gris. Les miroirs et racines réels y sont représentés en gris et les miroirs, racines et objets virtuels en noir. Nous observons que les chambres réelle et virtuelles pavent le plan et que leurs intersections sont vides. Ceci correspond bien à ce que nous recherchons puisque le nombre total de drapeaux discernables est fini.

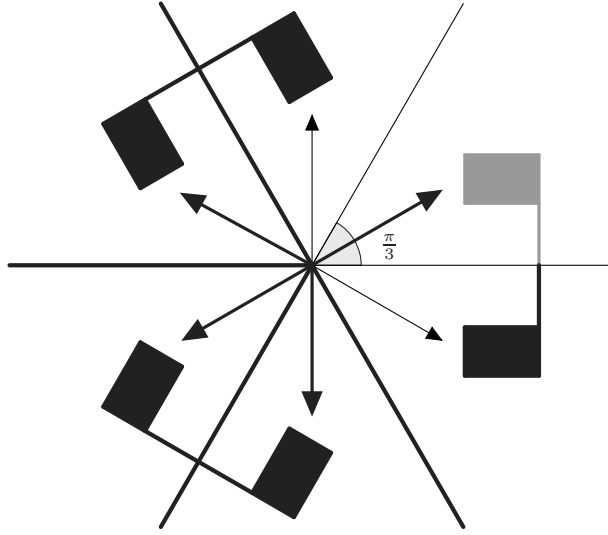


FIGURE 2 — Objets réel et virtuels

Nous allons établir que ces kaléidoscopes particuliers correspondent aux polygones réguliers ayant un nombre pair de côtés.

Ayant envisagé tous les cas possibles lorsque nous avons deux miroirs à notre disposition, nous pouvons nous tourner vers les kaléidoscopes à trois miroirs.

Nous écartons, pour les mêmes raisons que plus haut, les kaléidoscopes constitués de trois miroirs parallèles. De même, si les trois miroirs s'intersectent en une même arête, leur étude est ramenée au cas du kaléidoscope à deux miroirs. En effet, dans le cas fini, le troisième miroir et la deuxième chambre réelle sont confondus avec un miroir et une chambre virtuelle et dans le cas infini, les chambres réelles et virtuelles se chevauchent.

Le cas où deux miroirs (réels) sont parallèles et le troisième leur est perpendiculaire induit un pavage du plan par des chambres rectangulaires et donc un

nombre infini d'images. Nous pouvons donc l'ignorer. À la section 3, nous parlerons brièvement du cas où les trois miroirs réels sont parallèles à une même direction et s'intersectent suivant des angles $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$ et $\frac{\pi}{m}$, car ceux-ci fournissent également un nombre infini d'images. Nous nous intéressons donc au cas où les trois miroirs s'intersectent en un point et obtenons à la section 2.4 une correspondance avec trois polyèdres différents.

Maintenant que nous avons planté le décor, il est temps de passer aux mathématiques du problème !

2.2 Réflexions et groupes de réflexions

Soit V un espace euclidien de dimension n , i.e. un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire que nous notons \cdot (par exemple \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel). Une *réflexion* R_α de V est un opérateur linéaire de V qui envoie un vecteur non nul α sur $-\alpha$ en fixant point par point l'hyperplan

$$M_\alpha = \{v \in V \mid v \cdot \alpha = 0\}$$

orthogonal à α , appelé le *miroir* de la réflexion. Le vecteur α est appelé *racine* du miroir M_α . Pour le reste de ces notes, nous supposons que $\|\alpha\| = 1$. Par conséquent,

$$R_\alpha(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in M_\alpha \\ -v & \text{si } v = k\alpha, k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Que vaut $R_\alpha(v)$ si v est quelconque ? Notons v_0 (resp. v_1) sa projection orthogonale sur M_α (resp. sur $\mathbb{R}\alpha$). Le vecteur v peut être décomposé comme somme vectorielle en $v = v_0 + v_1$ (voir figure 3). Ainsi $v_0 = v - v_1$ et, par définition de la projection orthogonale, $v_1 = (v \cdot \alpha)\alpha$. Or $R_\alpha(v) = -v_1 + v_0 = v - 2v_1$ et par conséquent

$$R_\alpha(v) = v - 2(v \cdot \alpha)\alpha.$$

En guise d'exercice, le lecteur peut prouver que dans \mathbb{R}^2 la réflexion orthogonale par rapport à l'axe des abscisses a pour matrice

$$m(R_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

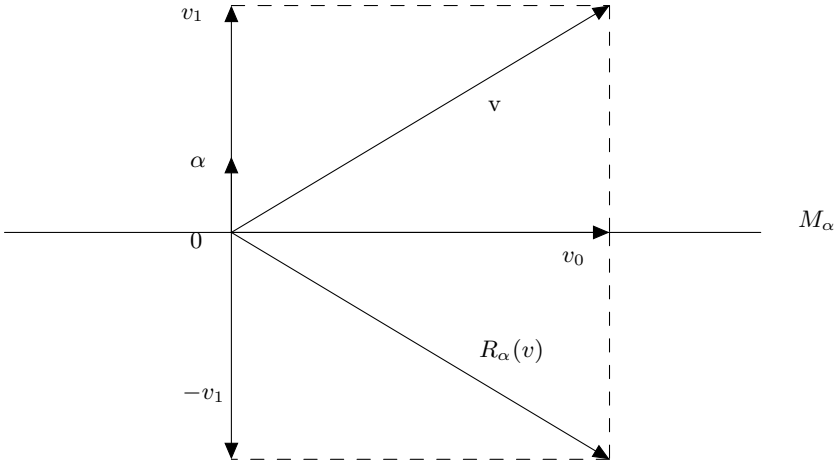
avec comme racine $\alpha = (0, 1)$. De même, toujours dans \mathbb{R}^2 , la réflexion orthogonale par rapport à une droite D faisant un angle θ avec l'axe des abscisses a pour matrice

$$m(R_\beta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

avec comme racine $\beta = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

À partir des définitions, nous pouvons déduire assez rapidement que les réflexions sont des antirotations (ou antidéplacements) involutives, c'est-à-dire

1. $R_\alpha^2 = \text{Id}$ (involution) ;
2. $R_\alpha(v) \cdot R_\alpha(v) = v \cdot v$ (isométrie) ;
3. $\det R_\alpha = -1$ (implique que l'isométrie est une antirotation).

FIGURE 3 — Décomposition du vecteur v

2.3 Classification des kaléidoscopes à deux miroirs

Plaçons-nous dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 et considérons

- M_α et M_β deux miroirs de \mathbb{R}^2 passant par l'origine (i.e. deux droites) ;
- α et β les racines associées ;
- θ l'angle dièdre entre M_α et M_β avec $\theta \leq \frac{\pi}{2}$;
- C l'une des chambres délimitées par M_α et M_β .

Supposons que la chambre C ne contienne aucun miroir virtuel engendré par les réflexions R_α et R_β .

Théorème 1. *Le groupe G engendré par R_α et R_β est fini si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{m}$ avec $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Dans ce cas, G est isomorphe au groupe diédrique $I_2(m)$ des symétries du polygone régulier à $2m$ côtés.*

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que M_α est l'axe des abscisses et que M_β est une droite faisant un angle θ avec M_α . En choisissant $\alpha = (0, 1)$ et $\beta = (-\sin \theta, \cos \theta)$, nous avons donc

$$m(R_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } m(R_\beta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Puisque $R_\alpha^2 = R_\beta^2 = \text{Id}$, tout élément de G est un produit de la forme $R_\alpha R_\beta R_\alpha \dots$ ou $R_\beta R_\alpha R_\beta \dots$; donc

$$G = \{\text{Id}, R_\alpha, R_\beta, R_\alpha R_\beta, R_\beta R_\alpha, R_\alpha R_\beta R_\alpha, R_\beta R_\alpha R_\beta, \dots\}.$$

Or $R_\beta R_\alpha$ est une rotation d'angle 2θ laquelle est d'ordre fini si et seulement si $\theta = \frac{n\pi}{m}$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$. Nous supposons (sans perte de généralité) que cette fraction est irréductible. Nous allons montrer qu'alors $n = 1$.

Par l'action de $R_\beta R_\alpha$ (une rotation), il existe des miroirs virtuels faisant un angle de 2θ et de 3θ avec M_α (car $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, voir figure 4). Donc pour tout nombre

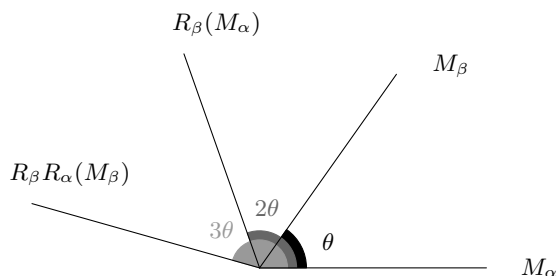


FIGURE 4 — Angles entre les miroirs virtuels et M_α

naturel non nul k il existe un miroir virtuel faisant un angle de $k\theta$ avec M_α . Puisque $\theta = \frac{n\pi}{m}$ est irréductible, $\text{pgcd}(m, n) = 1$ et l'inégalité de Bézout nous donne deux entiers x et y tels que $xm + yn = 1$. Par conséquent, $y = \frac{1-xm}{n}$ et il existe un miroir faisant un angle $y\theta = \frac{(1-xm)n\pi}{nm} = \frac{\pi}{m} - x\pi$ avec M_α . Ce miroir fait donc un angle $\frac{\pi}{m}$ avec M_α . Si $n > 1$, cela contredit l'hypothèse selon laquelle aucun miroir virtuel n'est contenu dans C (voir figure 5).

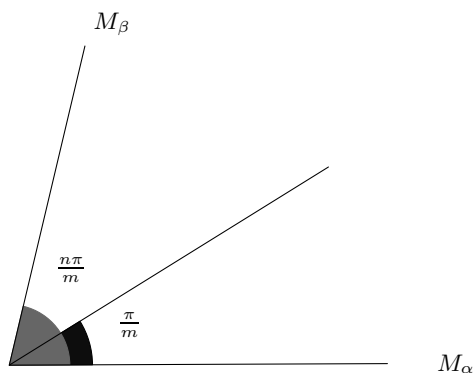


FIGURE 5 — Si $n > 1$

Dans la correspondance entre G et $I_2(m)$, les miroirs sont les médiatrices des

côtés du polyèdre; les détails de la preuve sont laissés au lecteur. \square

Le théorème 1 nous permet donc d'établir la correspondance entre les polygones possédant un nombre pair de côtés et les kaléidoscopes à deux miroirs fournissant un nombre fini d'images, comme annoncé à la section 2.1.

2.4 Kaléidoscopes à trois miroirs

Comme expliqué à la section 2.1, nous nous concentrons ici sur les agencements de trois miroirs s'intersectant en un point. Soient M_α , M_β et M_γ de tels miroirs (c'est-à-dire des plans dans \mathbb{R}^3).

Si le miroir M_γ est perpendiculaire à M_α et M_β (voir figure 6), alors les éléments du groupe G sont les produits des éléments du groupe diédrique engendré par R_α et R_β avec les éléments du groupe engendré par R_γ :

$$G = \{\text{Id}, R_\alpha, R_\beta, \dots\} \times \{\text{Id}, R_\gamma\}.$$

Supposons maintenant que les angles dièdres intérieurs des miroirs soient $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{r}$ avec $2 \leq p \leq q \leq r$ et $q > 2$. Ils délimitent un cône C que l'on nomme *chambre fondamentale* (voir figure 7).

Théorème 2. *Soit G le groupe engendré par les réflexions R_α , R_β et R_γ . On suppose qu'il n'y a pas de miroir virtuel à l'intérieur de C .*

1. *Si l'orbite Gx d'un point x à l'intérieur de C est finie, alors $p, q, r \in \mathbb{N}$ sont tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \quad (1)$$

2. *Les solutions de (1), avec $q > 2$, sont*

$$(2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5).$$

3. *Soit (p, q, r) l'un de ces trois triples. Soit C la chambre fondamentale correspondante. Alors, pour tous $g_1 \neq g_2 \in G$, on a $g_1 C \cap g_2 C = \emptyset$. De plus, si $gC = C$, alors g est la transformation identique. Par conséquent, les chambres sont en bijection avec les éléments de G et G est fini.*

Démonstration. Voir [Goo04], section 4. \square

Si $(p, q, r) = (2, 3, 3)$ (resp. $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$), alors G est isomorphe au groupe des isométries du tétraèdre (resp. cube, dodécaèdre). Les trois arêtes du kaléidoscope coupent le polyèdre au centre d'une face, au milieu d'une arête et en un sommet (voir figure 8 pour le tétraèdre et le cube).

Choisissons un point P à l'intérieur du kaléidoscope. Ses images engendrent un polyèdre ayant, en général, trois types de faces semi-régulières (voir figure 8). Les positions de P dans l'un des trois miroirs ou dans l'un des trois plans bissecteurs rendent l'un des trois types de faces régulier. Par conséquent sept positions différentes dans le kaléidoscope conduisent à sept polyèdres à faces régulières différents (voir <http://xavier.hubaut.info/coursmath/pol/kalei3.htm> pour

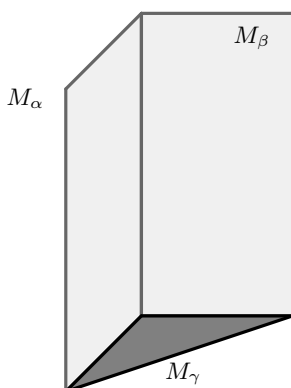


FIGURE 6 — Un miroir perpendiculaire aux deux autres

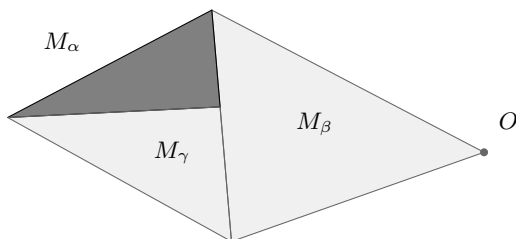


FIGURE 7 — La chambre fondamentale

plus de détails). Ainsi si $(p, q, r) = (2, 3, 3)$ (resp. $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$), nous obtenons les 7 polyèdres archimédiens de la famille du tétraèdre (resp. cube, dodécaèdre).

Notons que les kaléidoscopes que nous venons d'étudier sont aussi appelés *kaléidoscopes sphériques* car ceux-ci induisent des pavages de la sphère circonscrite aux polyèdres qu'ils déterminent.

3 Kaléidoscopes dans \mathbb{R}^n , $n > 3$

Voyons à présent comment se généralisent nos résultats en dimension finie quelconque.

Les miroirs de \mathbb{R}^n sont les hyperplans vectoriels et chaque miroir est caractérisé par une racine α qui lui est perpendiculaire (produit scalaire nul). Supposons $\|\alpha\| = 1$. Nous souhaitons que, pour tout arrangement fini de miroirs, cet arran-

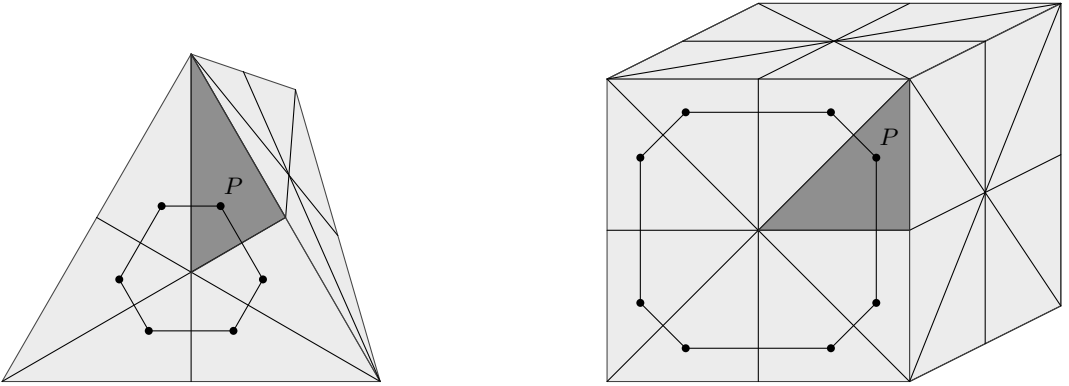


FIGURE 8 — Tétraèdre et cube

gement soit invariant pour toutes les réflexions, ce qui revenait à demander que les chambres réelle et virtuelles ne se chevauchent pas dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

Soit $\{M_\alpha\}$ un arrangement fini de miroirs de \mathbb{R}^n indicés par leurs racines unitaires α . Notons Φ l'ensemble de ces racines.

Condition du kaléidoscope (CK) : soient $\alpha, \beta \in \Phi$, alors $R_\alpha(\beta) \in \Phi$.

Un ensemble fini Φ de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^n satisfaisant (CK) est appelé *système radiciel*. Supposons que Φ engendre \mathbb{R}^n , alors (CK) implique que le groupe de réflexion engendré par $\{R_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ est fini. En effet, un élément de ce groupe est déterminé par son action sur l'ensemble fini Φ .

Dans le cas des kaléidoscopes à 2 ou 3 miroirs, Φ est l'ensemble des racines associées aux miroirs réels et virtuels. La définition de miroir virtuel permet alors à Φ de satisfaire à (CK).

Théorème 3. *Tout système radiciel Φ possède un sous-ensemble de racines (dites « racines simples ») noté $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tel que :*

1. Δ est une base de \mathbb{R}^n ;
2. $\alpha_i \cdot \alpha_j \leq 0$ pour $i \neq j$;
3. si $\beta \in \Phi$ et $\beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$, alors tous les λ_i ont le même signe.

Démonstration. Voir le théorème de la section 1.3 de [Hum90]. □

Le théorème 3 est illustré à la figure 9 à travers le cas du kaléidoscope à deux miroirs faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$.

Pour chaque racine simple α_i , notons R_i la réflexion R_{α_i} et M_i le miroir M_{α_i} . La chambre fondamentale déterminée par Δ est le cône de \mathbb{R}^n défini par les inégalités $\alpha_i \cdot x \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) (voir figure 10 pour un exemple dans \mathbb{R}^2).

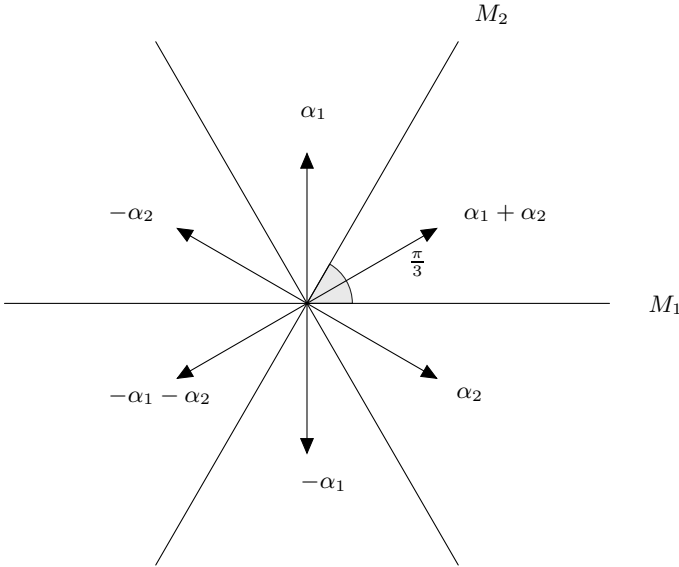


FIGURE 9 — Racines et racines simples

Si θ_{ij} est l'angle dièdre entre les miroirs M_i et M_j , alors $\theta_{ij} \leq \frac{\pi}{2}$. En effet,

$$\cos(\alpha_i, \alpha_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} \leq 0$$

par hypothèse, et $\cos(\alpha_i, \alpha_j) = \cos(\pi - \theta_{ij})$. Donc $\frac{-\pi}{2} \leq \theta_{ij} \leq \frac{\pi}{2}$. De plus par définition de l'angle entre deux plans, $0 \leq \theta_{ij} \leq \pi$.

La troisième assertion du théorème 3 nous permet d'affirmer que si x est un point intérieur à C , alors $\beta \cdot x \neq 0$ pour tout $\beta \in \Phi$. Il n'existe donc pas d'hyperplan traversant l'intérieur de C . Par le théorème 1, nous obtenons

$$\theta_{ij} = \frac{\pi}{p_{ij}}$$

avec $p_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. De plus, $R_i^2 = R_j^2 = (R_i R_j)^{p_{ij}} = \text{Id}$.

Les informations obtenues sur Φ peuvent être encodées dans un diagramme appelé *diagramme de Coxeter*. Il s'agit d'un graphe à n sommets, le sommet i correspondant au i -ème miroir. On dessine une arête entre i et j si $p_{ij} > 2$ et on met une étiquette p_{ij} sur l'arête si $p_{ij} > 3$ (voir figure 11 pour les diagrammes des kaléidoscopes à 2 ou 3 miroirs).

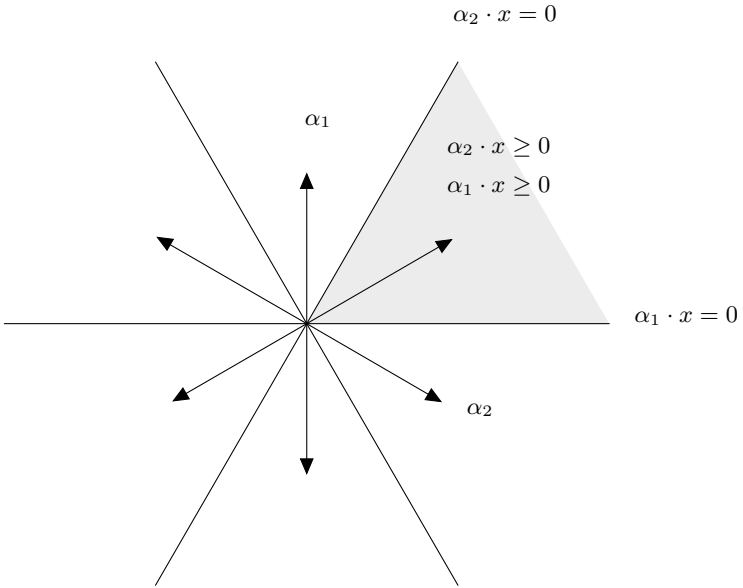
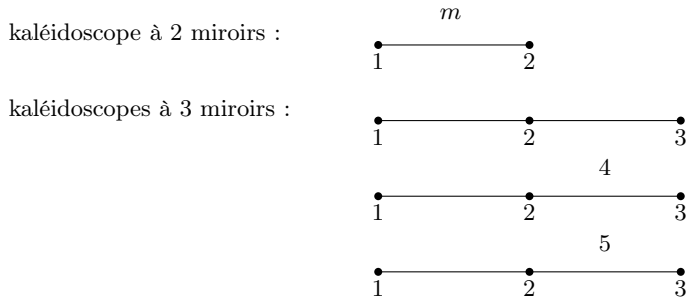
FIGURE 10 — Chambre fondamentale dans \mathbb{R}^2 

FIGURE 11 — Diagrammes de Coxeter

3.1 Groupes de Coxeter sphériques et classification

Soit I un ensemble (non nécessairement fini). Considérons un diagramme de Coxeter quelconque, non nécessairement associé à un kaléidoscope et dont les sommets sont indicés par l'ensemble I . Nous lui associons une matrice $M = (p_{ij})_{i,j \in I}$ rendant compte des poids des arêtes de la façon suivante :

- $p_{ij} = p_{ji}$ pour tous $i, j \in I$;
- $p_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} 1$;
- Si l'arête $\{i, j\}$ n'existe pas, $p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 2$;
- Si l'arête $\{i, j\}$ ne possède pas de poids, $p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 3$;
- Si l'arête $\{i, j\}$ est dotée d'un poids m , $p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} m$.

Cette matrice est appelée *matrice de Coxeter*.

Un *groupe de Coxeter* de type $M = (p_{ij})_{i,j \in I}$ (avec M une matrice de Coxeter) est un groupe W possédant un ensemble de générateurs $S = \{s_i \mid i \in I\}$ et admettant la présentation

$$W = \langle s_i \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{p_{ij}} = 1 \rangle.$$

Un groupe de *Coxeter sphérique* est un groupe de Coxeter fini, le terme sphérique faisant référence au pavage de la sphère évoqué à la section 2.4.

Il a été prouvé (voir [Hum90]) que les groupes de Coxeter sphériques et les groupes de réflexions finis (i.e. les groupes obtenus à la section précédente) étaient isomorphes. De plus, nous avons à notre disposition une classification des groupes de Coxeter sphériques (voir figure 12).

3.2 Quels sont les autres groupes de Coxeter ?

Nous avons envisagé tous les kaléidoscopes promis, excepté ceux où les trois miroirs plans sont parallèles à une même direction et s'intersectent suivant des angles $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$. Ici les chambres ne sont plus des cônes mais des « cylindres » recouvrant \mathbb{R}^3 . Par conséquent, $\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} = \pi$ et donc $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1$. Supposons $2 \leq k \leq l \leq m$, alors les triples possibles sont

$$(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3).$$

Ces kaléidoscopes sont appelés *kaléidoscopes plans* car ils induisent un pavage par des triangles du plan perpendiculaire à leur direction. Le lecteur intéressé par plus de détails peut se rendre sur la page de Xavier Hubaut : <http://xavier.hubaut.info/coursmath/pol/kalei2.htm>.

Les groupes de Coxeter obtenus sont appelés groupes de Coxeter affins et peuvent eux aussi être étendus aux dimensions supérieures. De la même façon, il existe des groupes de Coxeter hyperboliques obtenus comme pavage du plan hyperbolique qu'il est également possible d'étendre aux dimensions supérieures.

Pour continuer la bal(l)ade...

Voici quelques liens intéressants, en vue de fabriquer son propre kaléidoscope :

- http://www.polymerclaycentral.com/christy_kaleidoscope.html
- <http://siubhan.50webs.com/jeux/kaleid.htm>
- <http://www.lelombrik.net/videos/14998/faire-un-kaleidoscope.html>

Déjà cité plusieurs fois, le site internet de Xavier Hubaut vous permettra d'explorer les pavages et les kaléidoscopes plans et sphériques (entre autres choses intéressantes) : <http://xavier.hubaut.info/coursmath/>. Un autre article sur les kaléidoscopes est disponible en téléchargement :

- Bernard R. Hodgson. La géométrie du kaléidoscope, *Bulletin AMQ*, Mai 1987

Nous terminons par la référence incontournable sur les groupes de Coxeter (mais pas la plus évidente à aborder pour les novices) :

- Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : Systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.

4 Bibliographie

- [Goo04] Roe Goodman. Alice through looking glass after looking glass: the mathematics of mirrors and kaleidoscopes. *Am. Math. Mon.*, 111(4):281–298, 2004.
- [Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

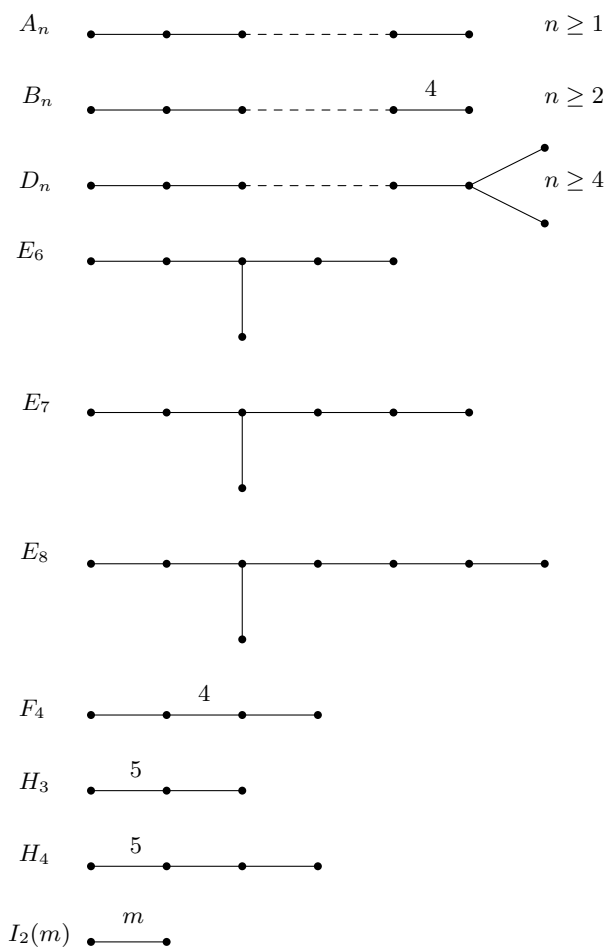


FIGURE 12 — Classification des groupes de Coxeter sphériques

Nombres complexes et géométrie

Charles Leytem *

charles.leytem@education.lu

Résumé

Le but de cet article consiste à donner une introduction à la géométrie complexe comme outil de résolution pour bon nombre de problèmes de géométrie « classique ». Comme on le verra, des problèmes difficiles pourront être résolus de manière relativement directe et simple en ayant recours aux nombres complexes. Parmi les problèmes que nous allons traiter ici figurent ceux qui font intervenir soit un seul cercle, le cercle circonscrit ou le cercle inscrit, soit ces deux cercles en même temps.

Sommaire

1	Introduction	86
2	Formules fondamentales	86
3	Le cercle circonscrit	88
4	Le cercle inscrit	91
5	Le cercle inscrit (et le cercle circonscrit)	92
6	Le cercle circonscrit (et le cercle inscrit)	93
7	Appendice : Problèmes IMO	94

*L'auteur enseigne les mathématiques au Lycée Classique de Diekirch et est détaché à l'Athénée de Luxembourg dans le cadre du Bac International. Il est, depuis 1992, responsable des Olympiades Mathématiques au sein de l'Association des Mathématiciens Luxembourgeois avec le soutien du Ministère de l'Education Nationale. L'auteur est aussi membre des Jurys de l'OMB, de la BxMO et de l'IMO. En outre il est membre du comité scientifique de l'Olympiade PanAfricaine de Mathématique et donne cours lors des stages d'entraînement de Wépion (Namur) où les meilleurs élèves belges et luxembourgeois se retrouvent une fois par mois. L'auteur tient à remercier Philippe Schram pour sa résolution des problèmes IMO en annexe à cet article, et Pierre Haas d'avoir aidé à la mise en page de l'article.

1 Introduction

L'objectif de ce texte est légèrement différent de celui des articles précédents. En effet, nous n'allons pas développer une certaine théorie dans le but de résoudre un problème bien précis, mais nous allons plutôt nous atteler à introduire la géométrie complexe comme méthode de résolution de problèmes géométriques. Le plan de ces notes est le suivant : en un premier temps, nous présentons au lecteur les formules principales à connaître, puis nous lui proposons un certain nombre de problèmes impliquant le cercle circonscrit (section 3) et le cercle inscrit (section 4), pour enfin en venir aux problèmes plus intéressants qui font intervenir ces deux cercles en même temps (sections 5 et 6). Finalement, la dernière partie de ce texte (section 7) est entièrement constituée d'énoncés de problèmes géométriques et de solutions via la géométrie complexe.

Il est à noter que la plupart des problèmes énoncés dans ces notes proviennent d'olympiades mathématiques ou sont des problèmes de type Shortlist¹, et donc peuvent servir de préparation aux futurs participants aux Olympiades Mathématiques Internationales (IMO).

2 Formules fondamentales

Nous proposons d'abord un rappel de faits et de formules élémentaires relatifs à la géométrie complexe qui s'établissent en quelques lignes. À tout point A de coordonnées (x, y) dans le plan, nous associons le nombre complexe $a = x + iy$; nous appelons ce nombre l'*affiche* de A . Réciproquement, à tout nombre complexe est associé le point du plan dont il est l'affiche. Dans la suite, les points du plan seront donc repérés par des lettres majuscules (A, B, A_1 , etc.) et leurs affixes seront notés par la lettre minuscule correspondante (a, b, a_1 , etc.).

2.1 Angle formé par deux droites

Nous donnons ci-dessous quelques formules utiles relatives à l'alignement de trois points, au parallélisme et à la perpendicularité de deux droites. Dans ce qui suit, nous notons $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

(1.a) Si φ est l'angle orienté \widehat{ACB} , alors

$$\frac{c-b}{|c-b|} = \frac{c-a}{|c-a|} e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{c-b}{\overline{c-b}} = \frac{c-a}{\overline{c-a}} e^{2i\varphi}.$$

(1.b) En notant \parallel pour indiquer le parallélisme, nous avons les équivalences

$$(AB) \parallel (CD) \iff \frac{a-b}{\overline{a-b}} = \frac{c-d}{\overline{c-d}} \iff \frac{a-b}{c-d} \text{ est réel.}$$

1. Pour chaque Olympiade Mathématique Internationale, un total d'environ 150 problèmes, la Longlist, est proposé, parmi lesquels une trentaine, la Shortlist, est retenue par un comité d'experts internationaux. Le jury de l'Olympiade choisit alors les 6 problèmes finalement posés à l'épreuve dans cette Shortlist.

(1.c) Les points A, B, C sont alignés $\iff \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} \iff \frac{a-b}{a-c}$ est réel.

(1.d) En notant \perp pour indiquer la perpendicularité, nous avons les équivalences

$$(AB) \perp (CD) \iff \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}} \iff \frac{a-b}{c-d} \text{ est imaginaire pur.}$$

2.2 Le Cercle Unité

Voici quelques formules relatives aux cordes et tangentes d'un cercle unité centré en l'origine (les points de ce cercle vérifient $|z| = 1$ et donc $\bar{z} = 1/z$).

(2.a) Pour une corde $[AB]$ on a

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab.$$

Aide Utiliser $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et simplifier.

(2.b) Si C est un point de la corde (AB) , alors

$$\bar{c} = \frac{a+b-c}{ab} \iff c = a+b-ab\bar{c} \text{ et } a = -\bar{b} \frac{b-c}{b-\bar{c}}.$$

Aide Exprimer l'alignement de A, B et C .

(2.c) Le pied P de la perpendiculaire d'un point C à la corde (AB) est

$$p = \frac{a+b+c-ab\bar{c}}{2}.$$

Aide P est un point de la corde (AB) , et les droites (PC) et (AB) sont perpendiculaires.

(2.d) Le symétrique c' d'un point c par rapport à la corde (ab) est $c' = a+b-ab\bar{c}$.

Aide Le pied P de la perpendiculaire du point C à la corde (AB) est le milieu de $[CC']$.

(2.e) Le point d'intersection E des cordes (AB) et (CD) vérifie $\bar{e} = \frac{a+b-c-d}{ab-cd}$.

Aide E est sur (AB) et (CD) .

(2.f) Le point d'intersection T des tangentes en A et en B est $t = \frac{2ab}{a+b}$.

Aide La tangente en A est la corde $[AA]$.

2.3 Points remarquables

Les formules suivantes expriment les affixes des points remarquables d'un triangle en termes des affixes de ses sommets.

(3.a) Le point M est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

- (3.b) Le point G est le **centre de gravité** du triangle ABC si et seulement si $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$.
- (3.c) Si le point O est le **centre du cercle circonscrit** et H est l'**orthocentre** du triangle ABC alors $h + 2o = a + b + c$.
Aide Utiliser $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (droite d'Euler).
- (3.d) Si le point O est le centre du cercle circonscrit à ABC et le point O' est le centre du cercle circonscrit au **triangle médian** de ABC , alors $o + 2o' = a + b + c$.
Aide Les sommets du triangle médian sont les milieux des côtés de ABC , et son orthocentre est le centre du cercle circonscrit à ABC .

3 Le cercle circonscrit

Les problèmes suivants font intervenir un seul cercle, à savoir un cercle circonscrit, qu'on prendra comme cercle unité centré à l'origine.

3.1 Problèmes

Problème I (Droite de Simson). Si A, B, C sont des points sur un cercle, alors les pieds des projections orthogonales d'un point D de ce cercle sur les côtés du triangle ABC sont alignés.

Problème II (Olympiade Math. St. Pétersbourg 2000). La droite δ est tangente en B au cercle circonscrit au triangle acutangle ABC . Soit K la projection orthogonale de l'orthocentre du triangle ABC sur la droite δ . Soit L le milieu du côté $[AC]$. Montrer que le triangle BKL est isocèle.

Problème III (IMO Shortlist 1998). Soit un triangle ABC dont H est l'orthocentre, O est le centre du cercle circonscrit et r est le rayon du cercle circonscrit. Soit D le symétrique de A par rapport à BC , E le symétrique de B par rapport à CA , et F le symétrique de C par rapport à AB . Montrer que les points D, E et F sont alignés si et seulement si $OH = 2r$.

Problème IV (IMO 2010). Soit P un point intérieur au triangle ABC . Les droites AP, BP et CP recoupent Γ , le cercle circonscrit au triangle ABC , respectivement aux points K, L et M . La tangente en C à Γ coupe la droite AB en S . On suppose que $SC = SP$. Montrer que $MK = ML$.

3.2 Solutions

Solution au problème I. Notons A', B', C' les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur les côtés du triangle. La propriété (2.c) implique que

$$a' = \frac{b + c + d - bc\bar{d}}{2}, \quad b' = \frac{a + c + d - ac\bar{d}}{2}, \quad c' = \frac{a + b + d - ab\bar{d}}{2}.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} a' - b' &= \frac{b - a + (ac - bc)\bar{d}}{2} = \frac{(b - a)(d - c)}{2d} \iff \bar{a}' - \bar{b}' = \frac{(a - b)(c - d)}{2abc} \\ &\implies \frac{a' - b'}{\bar{a}' - \bar{b}'} = \frac{abc}{d}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a' - c' &= \frac{c - a + (ab - bc)\bar{d}}{2} = \frac{(b - d)(a - c)}{2d} \iff \bar{a}' - \bar{c}' = \frac{(b - d)(a - c)}{2abc} \\ &\implies \frac{a' - c'}{\bar{a}' - \bar{c}'} = \frac{abc}{d}. \end{aligned}$$

L'alignement des points A, B, C suit alors par la propriété (1.c).

Solution au problème II. Soit L' le projeté de L sur δ . Pour montrer que BKL est isocèle il suffit de montrer que L' est le milieu de $[BK]$. Or, d'après la propriété (2.c), on a

$$k = \frac{2b + h - b^2\bar{h}}{2} \quad \text{et} \quad l' = \frac{2b + l - b^2\bar{l}}{2}.$$

De même, par la propriété (3.c), on a $l = \frac{a+c}{2} = \frac{h-b}{2}$. Il s'en suit que $b + k = 2l'$.

Solution au problème III. La propriété (2.d) implique $d = b + c - bc\bar{a}$, $e = a + c - ac\bar{b}$ et $f = a + b - ab\bar{c}$. Soit M le milieu de $[OH]$, si bien que $2m = a + b + c$ par (3.c). Notons que M est sur le cercle circonscrit si et seulement si $OH = 2r$. En notant M_1, M_2, M_3 les projetés respectifs de M sur AB, AC, BC , on peut donc reformuler le problème à l'aide de la propriété de la droite de Simson : D, E, F sont alignés si et seulement si M_1, M_2, M_3 sont alignés. Or, par les propriétés (1.c) et (2.c), M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si le nombre

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_3} = \frac{\frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m}) - \frac{1}{2}(a + c + m - ac\bar{m})}{\frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m}) - \frac{1}{2}(b + c + m - bc\bar{m})}$$

est réel. Comme $2m = a + b + c$, nous avons $2ac\bar{m} = a + c + ac\bar{b}$, $2ab\bar{m} = a + b + ab\bar{c}$ et $2bc\bar{m} = b + c + bc\bar{a}$, et nous obtenons

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_3} = \frac{b - c - ab\bar{c} + ac\bar{b}}{a - c - ab\bar{c} + bc\bar{a}} = \frac{f - e}{f - d}.$$

Par la propriété (1.c), il suit que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si D, E, F sont alignés.

Solution au problème IV. Nous pouvons, sans perte de généralité, prendre $c = 1$, ce qui donne $s + \bar{s} = 2$ par (2.b). La même propriété implique également

$$k = -\bar{a} \frac{p - a}{\bar{p} - \bar{a}}, \quad l = -\bar{b} \frac{p - b}{\bar{p} - \bar{b}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1 - p}{\bar{p} - 1}.$$

Comme S est sur l'intersection de la tangente passant par C et de la corde (AB) , la propriété (2.e) implique

$$\bar{s} = \frac{a+b-2}{ab-1} \iff s = \frac{a+b-2ab}{1-ab} = 2 - \bar{s}.$$

Comme $SC = SP$, la projection de S sur (PC) est le milieu de $[PC]$, c'est-à-dire, en utilisant la propriété (2.c) et l'observation précédente,

$$\frac{m+1+s-m\bar{s}}{2} = \frac{p+1}{2} \iff p = m+s-m\bar{s} \iff m = \frac{p-s}{1-\bar{s}} = \frac{p-s}{s-1}. \quad (1)$$

Nous en déduisons

$$\frac{p-s}{s-1} = \frac{1-p}{\bar{p}-1} \iff \bar{p} = \frac{2p-ps-1}{p-s} = \frac{p\bar{s}-1}{p-s}. \quad (2)$$

Prouver que $MK = ML$ revient à montrer que la projection de M sur KL est le milieu de $[KL]$, c'est-à-dire

$$\frac{k+l+m-kl\bar{m}}{2} = \frac{k+l}{2} \iff m^2 = kl.$$

Or, comme s appartient à la corde (ab) , la propriété (2.b) et la relation (2) impliquent

$$\begin{aligned} p-a &= p + \bar{b} \frac{s-b}{\bar{s}-\bar{b}} = \frac{p\bar{s}-p\bar{b}+\bar{b}s-1}{\bar{s}-\bar{b}} = \frac{p\bar{s}-1-\bar{b}(p-s)}{\bar{s}-\bar{b}} \\ &= \frac{\bar{p}(p-s)-\bar{b}(p-s)}{\bar{s}-\bar{b}} = \frac{(p-s)(\bar{p}-\bar{b})}{\bar{s}-\bar{b}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p-b &= p + \bar{a} \frac{s-a}{\bar{s}-\bar{a}} = \frac{p\bar{s}-p\bar{a}+\bar{a}s-1}{\bar{s}-\bar{a}} = \frac{p\bar{s}-1-\bar{a}(p-s)}{\bar{s}-\bar{a}} \\ &= \frac{\bar{p}(p-s)-\bar{a}(p-s)}{\bar{s}-\bar{a}} = \frac{(p-s)(\bar{p}-\bar{a})}{\bar{s}-\bar{a}}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1), il en découle

$$kl = \bar{a}\bar{b} \frac{p-a}{\bar{p}-\bar{a}} \frac{p-b}{\bar{p}-\bar{b}} = \frac{\bar{a}\bar{b}(p-s)^2}{(\bar{s}-\bar{a})(\bar{s}-\bar{b})} = \frac{(p-s)^2}{(\bar{s}a-1)(\bar{s}b-1)} = \frac{m^2(s-1)^2}{(\bar{s}a-1)(\bar{s}b-1)}.$$

Or nous avons

$$s-1 = \frac{a+b-2ab}{1-ab} - 1 = \frac{(a-1)(b-1)}{ab-1},$$

donc

$$\bar{s}a-1 = \frac{a^2+ab-2a}{ab-1} - 1 = \frac{(a-1)^2}{ab-1}, \quad \bar{s}b-1 = \frac{ab+b^2-2b}{ab-1} - 1 = \frac{(b-1)^2}{ab-1}.$$

Il en découle que $kl = m^2$, ce qu'il fallait démontrer.

4 Le cercle inscrit

Les problèmes suivants font intervenir un seul cercle, à savoir un cercle inscrit, que l'on choisira, sans perdre en généralité, comme cercle unité centré en l'origine.

4.1 Problèmes

Problème V (Théorème de Newton). Dans un quadrilatère $ABCD$, soient M et N les milieux des diagonales AC et BD . Si I est le centre du cercle inscrit à $ABCD$, montrer que M , N et I sont alignés.

Problème VI. Soit un quadrilatère $ABCD$ dont les côtés AB , BC , CD et DA sont tangents au cercle inscrit en M , N , P et Q respectivement. Montrer que les droites AC , BD , MP et NQ sont concourantes.

4.2 Solutions

Solution au problème V. Comme I est l'origine du repère il suffit de montrer que $m/\bar{m} = n/\bar{n}$. Notons P , Q , R , S les points de tangence des côtés AB , BC , CD , DA avec le cercle inscrit. Les propriétés (3.a) et (2.f) impliquent

$$m = \frac{a+c}{2} = \frac{ps}{p+s} + \frac{qr}{q+r} = \frac{pqs + prs + pqr + qrs}{(p+s)(q+r)} \iff \bar{m} = \frac{p+q+r+s}{(p+s)(q+r)}.$$

D'où m/\bar{m} est symétrique en p , q , r , s . Il suit que n/\bar{n} aura la même expression et donc $m/\bar{m} = n/\bar{n}$, si bien que (MN) passe par l'origine.

Solution au problème VI. Soit I le point d'intersection² de MP et de NQ . Il suffit de montrer que I est sur BD , comme cela implique que I appartient à AC par symétrie. Les propriétés (2.e) et (2.f) impliquent

$$\bar{i} = \frac{m+p-n-q}{mp-nq}, \quad b = \frac{2mn}{m+n} \quad \text{et} \quad d = \frac{2pq}{p+q}.$$

D'après la propriété (1.c), il reste à montrer que $\frac{b-i}{b-d}$ est réel. Or,

$$\bar{b} - \bar{d} = \frac{2}{m+n} - \frac{2}{p+q} = \frac{2(p+q-m-n)}{(m+n)(p+q)}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{b} - \bar{i} &= \frac{2}{m+n} - \frac{m+p-n-q}{mp-nq} \\ &= \frac{mp-nq+n^2-m^2+mq-pn}{(m+n)(mp-nq)} = \frac{(m-n)(p+q-m-n)}{(m+n)(mp-nq)}. \end{aligned}$$

2. Dans toute cette solution, i désignera donc l'affixe de I .

Ainsi, nous pouvons conclure en notant que

$$\frac{\bar{b} - \bar{i}}{\bar{b} - \bar{d}} = \frac{(m - n)(p + q)}{2(mp - nq)} = \frac{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}{2\left(\frac{1}{mp} - \frac{1}{nq}\right)} = \frac{b - i}{b - d}.$$

5 Le cercle inscrit (et le cercle circonscrit)

On suppose que le **cercle de référence est le cercle inscrit** au triangle ABC et qu'il est tangent aux côtés BC , CA et AB aux points P , Q et R respectivement. Alors en prenant le cercle inscrit comme cercle unité centré à l'origine, on a les propriétés suivantes

$$(4.a) \quad a = \frac{2qr}{q+r} \quad b = \frac{2pr}{p+r} \quad c = \frac{2pq}{p+q}$$

Démonstration. Ces expressions résultent de la formule (2.f).

$$(4.b) \quad o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$$

Démonstration. Soient M et N les milieux de $[BC]$ et $[AC]$. Comme $(OM) \perp (BC)$ et $(ON) \perp (AC)$, la propriété (1.d) implique

$$\frac{m - o}{\bar{m} - \bar{o}} = -\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}} = p^2 \quad \text{et} \quad \frac{n - o}{\bar{n} - \bar{o}} = -\frac{a - c}{\bar{a} - \bar{c}} = q^2$$

après simplification. D'où $o = m - p^2(\bar{m} - \bar{o})$ et $o = n - q^2(\bar{n} - \bar{o})$. Donc $m - n = p^2\bar{m} - q^2\bar{n} + \bar{o}(q^2 - p^2)$ en soustrayant membre à membre ces égalités. Or

$$\begin{aligned} m - n &= \frac{b - a}{2} = \frac{r^2(p - q)}{(p + r)(q + r)} \\ p^2\bar{m} - q^2\bar{n} &= \frac{\bar{c}}{2}(p^2 - q^2) + \frac{p^2}{p + r} - \frac{q^2}{q + r} \\ &= p - q + \frac{r(p^2 - q^2) + pq(p - q)}{(p + r)(q + r)} = (p - q) \frac{r^2 + 2(pq + qr + pr)}{(p + r)(q + r)} \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{r^2(p - q)}{(p + r)(q + r)} &= (p - q) \frac{r^2 + 2(pq + qr + pr)}{(p + r)(q + r)} + \bar{o}(q^2 - p^2) \\ \iff \bar{o}(p + q) &= \frac{2(pq + pr + qr)}{(p + r)(q + r)} \iff \bar{o} = \frac{2(pq + pr + qr)}{(p + q)(p + r)(q + r)} \end{aligned}$$

$$(4.c) \quad h = \frac{2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p + q + r))}{(p + q)(q + r)(r + p)}$$

Démonstration. Par (3.c), nous avons $\bar{h} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - 2\bar{o}$, d'où

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{2}{q+r} + \frac{2}{p+r} + \frac{2}{p+q} - \frac{4(pq+qr+rp)}{(p+q)(q+r)(r+p)} \\ &= \frac{2(p^2+q^2+r^2+pq+rq+pr)}{(p+q)(q+r)(r+p)} \end{aligned}$$

Problème VII (Iran, 1995). Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés BC , CA et AB en D , E et F respectivement. Les points X , Y et Z sont les milieux respectifs de $[EF]$, $[FD]$ et $[DE]$. Montrer que le centre du cercle inscrit au triangle ABC appartient à la droite passant par les centres des cercles circonscrits aux triangles XYZ et ABC .

Solution au problème VII. Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC et K le centre du cercle circonscrit à XYZ . D'après (3.d), on a $k = \frac{1}{2}(d+e+f)$. Comme l'affixe de I est nulle, il suffit de montrer que o/k est réel. Or,

$$o = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)} \iff \frac{o}{k} = \frac{4def}{(d+e)(e+f)(f+d)}$$

ce qui est une expression invariante par conjugaison.

6 Le cercle circonscrit (et le cercle inscrit)

Dans cette partie, on suppose que le **cercle de référence est le cercle circonscrit** au triangle ABC . On veut déterminer le centre I du cercle inscrit. Alors en prenant le cercle circonscrit comme cercle unité centré à l'origine on a les propriétés suivantes

- (5.a) Pour un triangle ABC inscrit dans un cercle unité il existe des nombres complexes u, v, w tels que $a = u^2, b = v^2, c = w^2$, et que $-uv, -vw, -wu$ sont les affixes des milieux des arcs AB, BC, CA ne contenant pas C, A, B .
- (5.b) L'affixe du centre du cercle inscrit est alors $i = -(uv + vw + wu)$.

Démonstration. Soit X le milieu de l'arc AB ne contenant pas C . Alors la projection de X sur AB est le milieu de $[AB]$, d'où, par la propriété (3.c), $a+b = a+b+x-ab\bar{x}$, c'est-à-dire $x^2 = abu^2v^2$. On peut choisir $x = -uv$ quitte à changer le signe de u . De même, si Y est le milieu de l'arc BC ne contenant pas A , on obtient $y = -vw$.

Le centre du cercle inscrit à ABC est le point d'intersection des bissectrices (CX) et (AY) . Par la propriété (2.e), son affixe satisfait

$$\bar{i} = \frac{u^2 - vw - w^2 + uv}{-u^2vw + w^2uv} = \frac{(u-w)(u+w+v)}{-uvw(u-w)} = -(\bar{uv} + \bar{vw} + \bar{uw})$$

Il reste à vérifier que l'intersection de la droite (BI) avec le cercle unité donne bien le point $z = -uw$. En effet, nous avons

$$\frac{z-b}{\bar{z}-\bar{b}} = \frac{b-i}{\bar{b}-\bar{i}} \iff \frac{-uw-v^2}{-\overline{uw}-\bar{v}^2} = uv^2w = \frac{(v+u)(v+w)}{(\bar{v}+\bar{u})(\bar{v}+\bar{w})}$$

□

Problème VIII. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC avec $AB \neq AC$. Soit O' le symétrique du centre du cercle circonscrit par rapport à BC . Montrer que A, I, O' sont alignés si et seulement si $\widehat{A} = 60^\circ$.

Solution au problème VIII. Prenons $i = -(uv+vw+wu)$. Comme l'affixe du milieu de $[BC]$ est $\frac{1}{2}(b+c)$, il suit que $o' = b+c$. Nous obtenons alors

$$a-i = u^2 + uv + vw + wu = (u+v)(u+w) \quad \text{et} \quad o' - a = b + c - a,$$

d'où

$$\frac{a-i}{\bar{a}-\bar{i}} = u^2vw \quad \text{et} \quad \frac{o'-a}{\bar{o}'-\bar{a}} = \frac{abc(b+c-a)}{ac+ab-bc}.$$

Donc a, i, o' sont alignés si et seulement si

$$\begin{aligned} (b+c-a)abc &= (ac+ab-bc)u^2vw \\ \iff (v^2+w^2-u^2)vw &= u^2w^2+u^2v^2-v^2w^2 \\ \iff vw(v^2+w^2+vw) &= u^2(vw+w^2+v^2) \\ \iff (vw-u^2)(v^2+w^2+vw) &= 0. \end{aligned}$$

Soit A' le milieu de l'arc BC ne contenant pas A . Comme $AB \neq AC$, A et A' ne sont pas diamétralement opposés, d'où $u^2 \neq vw$. Il suit que $v^2+w^2+vw=0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'}$, d'où $\widehat{BOC} = 120^\circ$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

7 Appendice : Problèmes IMO

Problème IX (Problème G1 - IMO Shortlist 2003). Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et inscriptible. Soient P, Q et R les projections orthogonales de D sur BC, CA et AB .

Prouver que $|PQ| = |QR|$ si et seulement si les bissectrices de \widehat{ABC} et \widehat{ADC} se coupent sur AC .

Solution au problème IX. Référons nous dans un repère complexe dans lequel le cercle circonscrit à $ABCD$ est le cercle unitaire. Choisissons par suite les axes de façon à ce que la médiatrice de $[AC]$ soit l'axe des réels. On en conclut en particulier que $c = \bar{a}$ et donc que $ac = 1$. Ce résultat sera utilisé dans la suite.

Par le théorème de Simson, nous savons que P , Q et R sont alignés. Le problème revient donc à prouver que $Q = \text{Mil}[PR]$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} q &= \frac{p+r}{2} \\ \Leftrightarrow 2q &= p+r \\ \Leftrightarrow a+c+d-ac\bar{d} &= \frac{1}{2}(a+b+d-ab\bar{d}+b+c+d-bc\bar{d}) \\ \Leftrightarrow a+c-2b &= \bar{d}(2ac-ab-bc) = \bar{d}(2-ab-\bar{a}b) \end{aligned}$$

Et comme $B \neq \text{Mil}[AC]$ équivaut à $a+c-2b \neq 0$, on conclut que $2-ab-\bar{a}b \neq 0$ et donc cette dernière ligne était encore équivalente à :

$$\bar{d} = \frac{a+c-2b}{2-ab-\bar{a}b}.$$

D'autre part, on sait que la médiatrice à $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit en deux points. Comme elle est l'axe des réels, ces points d'intersection sont ceux d'affixe 1 et -1 . Supposons sans perte de généralité que le point d'affixe 1 est celui sur l'arc passant par A et C , non contenant D . Il est connu que la bissectrice d'un angle coupe la médiatrice de la corde qu'il intercepte sur le cercle circonscrit. Soit K le point d'intersection des deux bissectrices. On sait alors

$$\frac{k-1}{\bar{k}-1} = \frac{d-1}{\bar{d}-1} = -d \tag{3}$$

et comme

$$\bar{k} = \bar{a} + \bar{c} - \bar{a}ck$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{\bar{k}+1} &= \frac{b+1}{\bar{b}+1} = b \\ \Leftrightarrow k+1 &= \bar{a}b + b\bar{c} - b\bar{a}ck + b \\ \Leftrightarrow k(1+b) &= \bar{a}b + ab - 1 + b \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\bar{a}b + ab - 1 + b}{1+b}. \end{aligned}$$

Cette division n'est pas permise si $b = -1$, cas qui n'arrive jamais vu notre choix précédent des points d'affixes -1 et 1 . On a maintenant

$$k-1 = \frac{\bar{a}b + ab - 2}{1+b}$$

et donc

$$\bar{k}-1 = \frac{a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} - 2}{1+\bar{b}} = \frac{a + \bar{a} - 2b}{1+b}.$$

De (3) on tire

$$d = -\frac{k-1}{\bar{k}-1} = -\frac{\bar{a}b+ab-2}{a+\bar{a}-2b},$$

dont on déduit

$$\bar{d} = \frac{1}{d} = \frac{-a-c+2b}{\bar{a}b+ab-2}.$$

Comme les deux suppositions ont conclu aux mêmes coordonnées de D et qu'on a travaillé avec des équivalences, il y a bien une condition nécessaire et suffisante.

Problème X (Problème G1 - IMO Shortlist 2004). Soit ABC un triangle acutangle vérifiant $|AB| \neq |AC|$. Le cercle qui a comme diamètre $[BC]$ recoupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N . Désignons par O le milieu de $[BC]$. Les bissectrices des angles \widehat{BAC} et \widehat{MON} se coupent en R . Prouver qu'alors les cercles circonscrits à BMR et CNR se coupent sur $[BC]$.

Solution au problème X. Le référentiel utilisé est celui où $b = -1$, $o = 0$ et $c = 1$. De plus, les affixes de M et N sont respectivement m^2 et n^2 . On sait que dans ce cas,

$$\bar{a} = \frac{n^2 - m^2 + 2}{m^2 + n^2} \quad \text{et} \quad a = \frac{m^2 - n^2 + 2m^2n^2}{m^2 + n^2}.$$

La bissectrice de \widehat{MON} passe par R et elle coupe les deux arcs MN en leurs milieux respectifs, donc en les points d'affixes mn et $-mn$. Par suite :

$$\frac{r-0}{\bar{r}-0} = \frac{r}{\bar{r}} = \frac{mn}{\frac{1}{mn}} = m^2n^2.$$

D'autre part, $2 \cdot \widehat{BAR} = 2 \cdot \widehat{RAC}$:

$$\begin{aligned} \frac{a-r}{\bar{a}-\bar{r}} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{a-b} &= \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{r}}{a-r} \\ \iff \left(\frac{a-r}{\bar{a}-\bar{r}} \right)^2 &= \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} \cdot \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} = \frac{m^2+1}{\bar{m}^2+1} \cdot \frac{n^2-1}{\bar{n}^2-1} = -m^2n^2. \end{aligned}$$

S'imposent les cas $\frac{a-r}{\bar{a}-\bar{r}} = \pm i \cdot mn$. On va prendre $+i \cdot mn$ (en orientant le cercle unitaire de cette façon) :

$$\frac{a-r}{\bar{a}-\bar{r}} = i \cdot mn \iff a-r = \bar{a} \cdot i \cdot mn - \frac{r}{m^2n^2} \cdot i \cdot mn \iff r = \frac{a - \bar{a} \cdot i \cdot mn}{1 - \frac{i}{mn}}.$$

Mais

$$\begin{aligned} a - \bar{a} \cdot i \cdot mn &= \frac{m^2 - n^2 + 2m^2n^2 - i \cdot mn^3 + i \cdot m^3n - 2i \cdot mn}{m^2 + n^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{i}{mn}\right)(2m^2n^2 + i \cdot m^3n - i \cdot mn^3)}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

et par suite :

$$r = \frac{2m^2n^2 + i \cdot m^3n - i \cdot mn^3}{m^2 + n^2}.$$

Soit K le point d'intersection de la bissectrice en A avec $[BC]$. On va prouver que $BMRK$ est cyclique. Remarquons que :

$$r - m^2 = (m^2n^2 + i \cdot m^3n - i \cdot mn^3 - m^4)/(m^2 + n^2)$$

$$\text{et } \frac{r - m^2}{\bar{r} - \bar{m}^2} = \frac{m^2n^2 + i \cdot m^3n - i \cdot mn^3 - m^4}{1 - i \cdot \bar{m}n + i \cdot m\bar{n} - \bar{m}^2n^2} = i \cdot m^3n.$$

On a :

$$\frac{r - m^2}{\bar{r} - \bar{m}^2} \cdot \frac{\bar{r} - \bar{k}}{r - k} = i \cdot m^3n \cdot \frac{1}{i \cdot mn} = m^2 = \frac{m^2 + 1}{\bar{m}^2 + 1} \cdot \frac{-2}{-2} = \frac{m^2 - b}{\bar{m}^2 - \bar{b}} \cdot \frac{\bar{b} - \bar{c}}{b - c}$$

et donc $2 \cdot \widehat{MRK} = 2 \cdot \widehat{MBK}$. Les angles \widehat{MRK} et \widehat{MBK} ayant des orientations différentes, ils sont complémentaires, de façon à ce que $BMRK$ est en effet cyclique. Le même argument est valable pour $CNRK$, ce qui clot la résolution du problème. Le point commun est K , qui est sur $[BC]$.

Problème XI (Problème G4 - IMO Shortlist 2007). Soient 5 points A, B, C, D et E tels que $ABCD$ est un parallélogramme et $BCED$ est un quadrilatère cyclique. Soit l une droite passant par A . Supposons que l coupe le segment $[DC]$ en F et coupe la droite BC en G .

Si $|EF| = |EG| = |EC|$, prouver que l est la bissectrice de l'angle \widehat{DAB} .

Solution au problème XI. Supposons, sans perte de généralité, que $c = 1$. Désignons par M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de E sur DC et BC . On sait qu'alors

$$m_1 = \frac{1}{2}(d + c + e - cd\bar{e}) = \frac{1}{2}(d + e + 1 - d\bar{e}) \text{ et } m_2 = \frac{1}{2}(b + 1 + e - b\bar{e}).$$

Comme les triangles CEF et CEG sont isocèles, on conclut que $f = m_1 + (m_1 - c) = 2m_1 - 1 = d + e - d\bar{e}$ et $g = b + e - b\bar{e}$. On a :

$$\frac{f - g}{\bar{f} - \bar{g}} = \frac{(d - b)(1 - \frac{1}{e})}{(\frac{1}{d} - \frac{1}{b})(1 - e)} = \frac{bd(d - b)(e - 1)}{e(b - d)(1 - e)} = \frac{bd}{e}.$$

Comme $ABCD$ est un parallélogramme on a $a = b + d - c = b + d - 1$, et

donc :

$$\begin{aligned}
 & \frac{a-f}{\bar{a}-\bar{f}} = \frac{f-g}{\bar{f}-\bar{g}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{b-e+d\bar{e}-1}{\bar{b}-\bar{e}+\bar{d}e-1} = \frac{bd}{e} \\
 \Leftrightarrow & be - e^2 + d - e = d - bd\bar{e} + be - bd \\
 \Leftrightarrow & e^2 + e - bd\bar{e} - bd = 0 \\
 \Leftrightarrow & e^3 + e^2 = bde + bd \\
 \Leftrightarrow & e^2(e+1) = bd(e+1) \\
 \Leftrightarrow & e^2 = bd \text{ (à condition que } e \neq -1)
 \end{aligned}$$

Or si $e = -1$, $[EC]$ serait un diamètre du cercle unitaire et par suite, le cercle de centre E et de rayon $|EC|$ ne pourrait pas couper DC à l'intérieur du cercle et donc non sa corde $[DC]$. La condition de la donnée serait ainsi violée.

Nous voulons prouver que $2 \cdot \widehat{BAF} = 2 \cdot \widehat{FAD}$. Pour cela, nous allons démontrer que

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{f}}{a-f} = \frac{a-f}{\bar{a}-\bar{f}} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{d}}{a-d}.$$

Mais on sait que $a-d = b-c$, $a-b = d-c$ et que

$$\frac{a-f}{\bar{a}-\bar{f}} = \frac{bd}{e}$$

donc l'expression est équivalente à :

$$\frac{b^2 d^2}{e^2} = \frac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}} \frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} = -cd \cdot -bc = bc^2 d = bd$$

c'est-à-dire $e^2 = bd$ ce qui est vrai vu notre raisonnement précédent. On sait donc que $2 \cdot \widehat{BAF} = 2 \cdot \widehat{FAD}$. Par suite, en utilisant l'orientation des deux angles, $\widehat{BAF} = \widehat{FAD}$ et l est bien la bissectrice de \widehat{BAD} .

Problème XII (Problème G1 - IMO Shortlist 2008). Un triangle acutangle ABC a comme orthocentre le point H . Le cercle qui a comme centre le milieu de $[BC]$ et qui passe par H coupe $[BC]$ en A_1 et A_2 . B_1, B_2, C_1 et C_2 sont définis similairement.

Prouver que le hexagone $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ est cyclique.

Solution au problème XII. Considérons un plan de Gauss dans lequel le centre du cercle circonscrit à ABC est le centre du repère et où ce cercle est le cercle unitaire. On désigne par A_0 le milieu du côté $[BC]$, par B_0 celui de $[AC]$ et par C_0 celui de $[AB]$. Par construction de A_1 et A_2 , A_0 doit aussi être le milieu de $[A_1 A_2]$ et la même remarque est valable pour B_1, B_2 et C_1, C_2 . La

médiatrice de $[BC]$ est donc celle de $[A_1A_2]$ et celle dernière passe donc par O . On conclut que $|OA_1| = |OA_2|$, $|OB_1| = |OB_2|$ et $|OC_1| = |OC_2|$.

Comme $[A_1A_2]$ est un diamètre du cercle circonscrit à A_1A_2H , on conclut que $\widehat{A_1HA_2} = \frac{\pi}{2}$. Par suite, $\frac{a_1 - h}{h - \bar{a}_1} = \frac{h - a_2}{h - \bar{a}_2}$. Compte tenu du fait que

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = a_0 = \frac{b + c}{2} \iff a_2 = b + c - a_1$$

et que $h = a + b + c$ et que par suite, $h - a_2 = a + a_1$, on obtient

$$\frac{h - a_1}{\bar{a}_1 - h} = \frac{a + a_1}{\bar{a} + \bar{a}_1} \iff (h - a_1)(\bar{a} + \bar{a}_1) = (\bar{a}_1 - h)(a + a_1).$$

Comme $\bar{a}_1 = \bar{b} + \bar{c} - \bar{b}ca_1$, c'est encore équivalent à

$$\begin{aligned} h\bar{a} + h\bar{b} + h\bar{c} - h\bar{b}ca_1 - a_1\bar{a} - a_1\bar{b} - a_1\bar{c} + a_1^2\bar{b}c \\ = a\bar{b} + a\bar{c} - a_1a\bar{b}c + a_1\bar{b} + a_1\bar{c} - a_1^2\bar{b}c - \bar{h}a - a_1\bar{h} \end{aligned}$$

$$\iff a_1^2(2\bar{b}c) + a_1(\bar{h} - \bar{a} - 2\bar{b} - 2\bar{c} - h\bar{b}c + a\bar{b}c) = -h(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) - a(\bar{h} - \bar{b} - \bar{c})$$

$$\iff a_1^2(2\bar{b}c) + a_1(-2\bar{c} - 2\bar{b}) = -h\bar{h} - 1.$$

Nous nous intéressons à

$$\begin{aligned} |OA_1|^2 = a_1\bar{a}_1 = a_1(\bar{b} + \bar{c} - a_1\bar{b}c) &= -\frac{1}{2}(a_1^2(2\bar{b}c) + a_1(-2\bar{b} - 2\bar{c})) \\ &= -\frac{1}{2}(-h\bar{h} - 1) = \frac{h\bar{h} + 1}{2}. \end{aligned}$$

Des raisonnements similaires nous fournissent

$$a_1\bar{a}_1 = \frac{h\bar{h} + 1}{2} = a_2\bar{a}_2 = b_1\bar{b}_1 = b_2\bar{b}_2 = c_1\bar{c}_1 = c_2\bar{c}_2$$

dont on tire

$$|a_1|^2 = |a_2|^2 = |b_1|^2 = |b_2|^2 = |c_1|^2 = |c_2|^2,$$

ce qui revient à dire

$$|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2| = |OC_1| = |OC_2|.$$

Autrement dit, $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ est cyclique.

Problème XIII (Problème G2 - IMO Shortlist 2009). Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Les points P et Q sont des points intérieurs aux côtés CA et AB respectivement. Soient K, L, M les milieux respectifs des segments BP, CQ et PQ et soit Γ le cercle passant par K, L et M . On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle Γ .

Montrer que $OP = OQ$.

Solution au problème XIII. Soient O l'origine du repère, et $a = 1$.

$$\begin{aligned}
 OP &= OQ \\
 \Leftrightarrow p \cdot \bar{p} &= q \cdot \bar{q} \\
 \Leftrightarrow p \cdot (1 + \bar{c} - p\bar{c}) &= q \cdot (1 + \bar{b} - q\bar{b}) \\
 \Leftrightarrow p^2 \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) + p \cdot \left(1 + \frac{1}{c}\right) &= q^2 \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) + q \cdot \left(1 + \frac{1}{b}\right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

Notons que $\widehat{LMP} = \widehat{LKM}$ (\widehat{LMP} étant un angle tangenciel) et donc $2\widehat{LMP} = 2\widehat{LKM}$ de façon à ce que

$$\frac{l-m}{\bar{l}-\bar{m}} \cdot \frac{\bar{m}-\bar{p}}{m-p} = \frac{l-k}{\bar{l}-\bar{k}} \cdot \frac{\bar{k}-\bar{m}}{k-m}.$$

Comme

$$k = \frac{p+b}{2} \quad l = \frac{c+q}{2} \quad \text{et} \quad m = \frac{p+q}{2},$$

il vient

$$\frac{l-m}{\bar{l}-\bar{m}} = \frac{p-c}{\bar{p}-\bar{c}} = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} = -ac = -c$$

et similairement, $\frac{(\bar{k}-\bar{m})}{(k-m)} = -\frac{1}{b}$. De plus,

$$\frac{l-k}{(\bar{l}-\bar{k})} = \frac{q+c-p-b}{\bar{q}+\bar{c}-\bar{p}-\bar{b}}$$

et comme P, Q, M sont alignés,

$$\frac{\bar{m}-\bar{p}}{m-p} = \frac{\bar{p}-\bar{q}}{p-q}.$$

L'équation précédente peut donc être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 bc \cdot (\bar{p}-\bar{q}) \cdot (\bar{q}+\bar{c}-\bar{p}-\bar{b}) &= (p-q) \cdot (q+c-p-b) \\
 \Leftrightarrow bc \cdot \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{p}{c} + \frac{q}{b}\right) \cdot \left(\frac{p}{c} - \frac{q}{b}\right) &= pq + pc - p^2 - pb - q^2 - qc + pq + bq \\
 \Leftrightarrow (b-c-pb+qc) \cdot \left(\frac{p}{c} - \frac{q}{b}\right) &= pq + pc - p^2 - pb - q^2 - qc + pq + bq \\
 \Leftrightarrow p^2 \left(\frac{b}{c} - 1\right) + p \left(1 - \frac{b}{c} - b + c\right) &= q^2 \left(1 - \frac{c}{b}\right) + q \left(\frac{c}{b} - 1 + c - b\right) \\
 \Leftrightarrow p^2 \left(-\frac{c-b}{c}\right) + p \left(\left(1 + \frac{1}{c}\right)(c-b)\right) &= q^2 \left(-\frac{c-b}{b}\right) + q \left(\left(1 + \frac{1}{b}\right)(c-b)\right) \\
 \Leftrightarrow p^2 \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) + p \cdot \left(1 + \frac{1}{c}\right) &= q^2 \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) + q \cdot \left(1 + \frac{1}{b}\right).
 \end{aligned}$$

Par suite, (4) est vraie et $OP = OQ$.

Remerciements

Nous remercions en premier lieu les orateurs, passés ou futurs, qui ont accepté de s'embarquer avec nous dans cette aventure un peu folle qu'est la *BSSM*. Chacun d'entre eux nous a offert bien plus que son talent et son temps, et nous leur sommes sincèrement reconnaissants. Sans leur soutien et leur générosité cette entreprise n'existerait, tout simplement, pas.

Nous remercions également nos collègues qui, non contents de venir nous parler de leurs recherches, ont poussé la gentillesse jusqu'à accepter de devenir co-organisateurs ou co-éditeurs. Merci à Germain Van Bever d'avoir organisé l'édition 2010 avec nous, d'avoir créé le site web de notre école d'été (<http://bssm.ulb.ac.be/>), d'avoir participé à la conception de ces notes, etc. Merci également à Nicolas Richard sans qui l'édition de ce livre aurait été encore plus difficile. Sa connaissance des règles de typographie et du fonctionnement de \LaTeX ne cessera jamais de nous surprendre; « *and still they gazed, and still the wonder grew, how one small head could carry all he knew* ».

Merci encore aux secrétaires du Département de Mathématique (Valérie Bajt, Jacqueline Bottemanne et Patricia Semeraro) qui nous ont permis d'avoir accès à la salle Solvay, et, surtout, nous ont offert l'indispensable : le café et les biscuits.

Finalement merci à Aurélie Charlier, à qui nous devons le design des affiches; merci à Isabelle Charlier pour sa relecture attentive; merci à Charlotte Bouckaert, Francis Buekenhout et Jacqueline Sengier (et, par eux, toute l'équipe de l'UREM) pour leur soutien sans faille.

Christophe Ley
Yvik Swan
Initiateurs