La loi du $1/e$

Carine Bartholmé*
carine.bartholme@ulb.ac.be

Résumé

Dans ces notes nous présentons une collection de résultats due au Professeur F.T. Bruss (Université libre de Bruxelles) connue sous le nom de « Loi du $1/e$ ». Nous allons introduire le sujet à l'aide d'un jeu, parler du problème des secrétaires classique et donner un petit historique de l'évolution de ce problème jusqu'à la découverte de la loi du $1/e$. Par la suite, nous consacrerons une partie de ces notes au développement théorique de la loi du $1/e$ et découvrirons que les preuves utilisent des notions assez élémentaires. Nous terminerons ces notes par un exemple destiné à montrer à quel point cette théorie mathématique peut être utilisée dans la vie réelle.

Sommaire

*Carine Bartholmé est doctorante et Boursière FRIA au Département de Mathématique de l'Université libre de Bruxelles. Elle est titulaire d'un Master en Sciences Mathématiques, et travaille en probabilités et mathématiques financières.

1 Introduction

Imaginons la situation suivante : vous disposez d'un paquet de dix bouts de papier qui sont posés face cachée sur une table. Sur le dos de chaque bout est écrit un nombre et tous ces nombres sont supposés être différents. Tout nombre, aussi grand et aussi petit que l'on veut, est permis. Tout ordre est possible et vous pouvez mélanger les feuilles au début du jeu (sans regarder les nombres) : cela ne changera rien. Supposons alors que tout ordre des 10 nombres est équiprobable, c'est-à-dire, chacun a la probabilité 1/10!. Vous allez retourner les feuilles l'une après l'autre et votre objectif consiste à vous arrêter à la feuille sur laquelle est écrit le plus grand nombre. Évidemment, retourner toutes les feuilles rendrait le défi trivial, donc votre choix doit se faire après retournement de chaque feuille : soit vous la gardez, auquel cas votre choix sera fait, soit vous jugez qu'un nombre plus grand pourra encore sortir, auquel cas vous ne gardez pas la feuille et continuez le jeu. Revenir en arrière est interdit, et si vous ne gardez aucune des neuf premières feuilles, vous devez choisir automatiquement la dixième et dernière. Une fois votre choix fait, ce nombre va être comparé à tous les autres. Le jeu est gagné si vous avez choisi le plus grand nombre, sinon vous avez perdu.

Imaginons maintenant qu'une personne généreuse vous a proposé ce jeu, avec à la clé, en cas de victoire, un voyage avec la personne de votre choix dans un hôtel 5 étoiles aux Seychelles. Vous avez donc intérêt à tout faire pour gagner le prix et trouver une bonne stratégie pour attaquer le jeu.

Afin de se fixer les idées, imaginons le scénario suivant. Vous retournez le premier bout de papier, il s'agit du nombre 2,57. Vous êtes un peu surpris, mais décidez de continuer et retournez le deuxième nombre 0,003. Comme le deuxième nombre est plus petit que le premier, vous ne le prenez pas, car sinon le jeu est perdu. Vous pouvez l'oublier tout de suite et ne retenez que le premier nombre, qui est le meilleur nombre jusqu'à présent. Le troisième nombre que vous allez découvrir est 2 663, vous hésitez. Qu'allez-vous faire ?

Une question naturelle se pose ici : existe-t-il une règle qui permet de maximiser les chances de gagner le jeu ? De manière surprenante, la réponse est oui. La règle à utiliser consiste à observer 3 nombres sans en accepter aucun, et d'ensuite accepter le premier nombre qui est plus grand que tous les précédents. Cette façon de procéder ne garantit évidemment pas que vous allez gagner à coup sûr, mais il s'agit de la stratégie optimale, c'est-à-dire de la stratégie qui maximise votre probabilité de gain. Nous allons voir que la probabilité de succès associée à cette stratégie est bien meilleure que la valeur $1/10$ à laquelle on pourrait s'attendre intuitivement.

2 Le problème des secrétaires et un peu d'histoire

Le jeu décrit dans l'introduction est un premier exemple de problème de meilleur choix issu de la théorie de l'arrêt optimal. La théorie de l'arrêt optimal traite de problèmes pour lesquels on cherche à connaître l'instant auquel une certaine action doit être accomplie dans le but de maximiser un gain ou minimiser un coût. Le plus connu parmi ces problèmes de meilleur choix est le *problème des secrétaires*, qui peut s'énoncer comme suit.

> Un chef d'entreprise veut engager un nouveau secrétaire ou une nouvelle secrétaire. Il effectue une série d'entretiens avec les n candidats intéressés afin de sélectionner un candidat pour l'emploi. On suppose que si le chef connaissait les candidats à l'avance, il pourrait les

classifier d'une manière unique d'après ses propres critères :

$$\langle 1\rangle \equiv \text{meilleur}, \ldots, \langle n\rangle \equiv \text{le plus mauvais.}$$

On suppose de plus que tout ordre d'arrivée des candidats est équiprobable. Après chaque entretien, le chef doit prendre une décision : soit accepter le candidat et les entretiens sont terminés, soit le refuser et avoir un entretien avec le candidat suivant. Revenir en arrière est impossible. Le nombre n de candidats est connu d'avance, et le chef d'entreprise, fort exigeant, veut seulement engager le meilleur candidat. Il se pose donc la question suivante : quelle est la stratégie qui maximise la probabilité d'accepter le meilleur candidat ?

Les origines de ce problème sont obscures et remontent apparemment au mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895) ou bien à l'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630) qui considèrent des problèmes similaires. Ferguson consacre d'ailleurs un article à la question « *Qui a résolu le problème des secrétaires ?* » (voir [1]). Le problème apparaît pour la première fois dans la littérature moderne en février 1960 sous le nom de *jeu de googol* dans une publication de Martin Gardner dans le *Scientific American*. Outre le nom de jeu de googol, le problème des sécrétaires est aussi connu sous le nom de *problème de mariage* ou moins souvent sous le nom de *problème du concours de beauté*. Lindley semble être le premier à avoir publié une solution du problème dans un journal scientifique en 1961. Le problème a connu beaucoup d'extensions et de généralisations dans diverses directions depuis son apparition dans le monde des probabilistes et statisticiens, à tel point qu'il a donné naissance à tout un domaine de recherche. Pour un historique plus complet ainsi que les différentes variations et extensions du problème, nous invitons le lecteur à lire l'article de Freeman [2] et l'excellent article historique de Ferguson [1].

En voyant le problème, on pourrait s'attendre par intuition à une probabilité de succès de l'ordre de $1/n$; la probabilité de succès deviendrait donc très petite pour des grandes valeurs de n. Cette intuition est fausse. Nous allons en effet démontrer que ce jeu est beaucoup plus favorable qu'il n'y paraît de prime abord, et qu'il existe des stratégies qui permettent d'augmenter la probabilité d'obtenir le meilleur candidat. Plus précisément, on peut montrer qu'il existe une quantité s_n, à déterminer, pour laquelle la solution du problème des secrétaires possède la forme facile et élégante suivante :

observer un certain nombre s_n de candidats sans en accepter aucun, ensuite accepter le premier qui est meilleur que tous les précédents.

Nous allons voir qu'en utilisant cette stratégie la probabilité de succès (bien que possible à calculer de façon explicite uniquement pour de petites valeurs de n) admet une excellente borne inférieure bien meilleure que $1/n$. De plus nous allons montrer que cette stratégie a encore une autre propriété remarquable : le rapport s_n/n tend vers une valeur particulière quand n devient grand. Pour des n plus petits il est possible de déterminer exactement la valeur de s_n.

Déterminons maintenant la probabilité de succès $p(n)$ associée à la stratégie ci-dessus. Pour $n = 1$, s_1 vaut 0 et la probabilité de succès vaut 1. Pour $n = 2$, s_2 vaut 0 aussi et la probabilité de succès vaut 0,5. Soit maintenant $n > 2$. Il est évident qu'il n'y aura pas de succès si $\langle 1\rangle$ arrive sur une des s_n premières places. Supposons donc que ce candidat arrive à la j-ième place, avec $j > s_n$. Ceci arrive avec probabilité $\frac{1}{n}$. Les seuls cas favorables sont alors ceux où, entre les arrivées s_n et $j-1$, il n'y a pas de meilleur candidat que le meilleur parmi les s_n premiers ;

en d'autres termes, il faut que, sur les $j-1$ premiers candidats, le meilleur se situe dans les s_n premiers, ce qui arrive dans $\frac{s_n}{j-1}$ cas. Il s'ensuit que, pour tout $n > 2$, la probabilité de succès associée à cette stratégie est égale à

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=s_n+1}^{n} \frac{s_n}{j-1} = \frac{s_n}{n} \sum_{j=s_n}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Remarquons que la stratégie optimale est celle pour laquelle la valeur s_n maximise la probabilité de succès $p(n)$. Notons x la limite de s_n/n quand $n \to \infty$. En prenant t pour j/n et $\mathrm{d}t$ pour $1/n$, la somme peut être approximée par l'intégrale

$$x \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or,

$$x \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -x \ln(x) = p(x)$$

et par simple dérivation on peut voir que cette fonction p est maximisée en $1/e$.

Nous avons donc montré que, si s_n/n converge,

$$s_n/n \longrightarrow 1/e \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty,$$

et par conséquent

$$p(n) \longrightarrow p(1/e) = 1/e.$$

La probabilité de succès $p(n)$ associée à la solution du problème des secrétaires est décroissante en n, ce que nous ne montrons pas ici, et elle admet donc la borne inférieure remarquable $1/e$.

Remarquons encore qu'il faudrait en principe montrer en plus que la stratégie optimale se trouve en effet dans la classe des stratégies qui attendent jusqu'à un certain indice s_n fixe, mais ceci suit du fait que tout ordre des qualités est équiprobable.

Dans le tableau suivant nous donnons les valeurs de s_n ainsi que de $p(n)$ pour des valeurs de $1 \leqslant n \leqslant 10$.

n	1	2	3	4	5
s_n	0	0	1	1	2
$p(n)$	1	0,5	0,5	0,458	0,433
n	6	7	8	9	10
s_n	2	2	3	3	3
$p(n)$	0,428	0,414	0,410	0,406	0,399

Nous en déduisons donc que la probabilité de succès pour le jeu présenté dans l'introduction vaut environ 0,4. Mentionnons de plus que pour un jeu plus général avec n nombres, la règle à utiliser en pratique pour le jeu est la suivante : observer $\lfloor n \cdot 1/e \rfloor$ nombres sans en accepter aucun, ensuite accepter le premier nombre qui est plus grand que tous les précédents.

Notons aussi que le problème des secrétaires ainsi que des extensions de ce problème peuvent être résolus de manière directe à l'aide de l'algorithme des odds (Bruss, 2000) et que la solution obtenue est optimale.

Dans les problèmes considérés jusqu'à présent, le nombre de « candidats » ou le nombre d'« offres » (nous allons désormais utiliser cette terminologie pour parler de l'ensemble des arrivées possibles, ces arrivées pouvant être des nombres écrits au dos d'une feuille, des candidats à un poste, etc.) était connu à l'avance. Ceci n'est pas très réaliste dans bon nombre de problèmes, comme des problèmes de vente par exemple, dans lesquels le nombre de clients ou le nombre d'offres n'est pas nécessairement connu. Peut-on encore maximiser la probabilité d'obtenir un succès dans de tels cas de figure ?

Pour répondre à cette question, une démarche naturelle consiste à remplacer n par une inconnue N caractérisée par une certaine distribution de probabilité. Presman et Sonin (1972), Gianini et Samuels (1976) et Stewart (1981) figurent parmi les premiers à avoir considéré le problème avec un nombre de candidats inconnu. Ils supposent que le nombre de candidats N est une variable aléatoire et que la loi g du nombre de candidats est connue ou au moins que la classe des possibilités pour g est donnée. La loi du nombre de candidats spécifiée, ils arrivent à déterminer la solution optimale de ce problème, mais celle-ci est en général assez compliquée. En effet, la solution n'admet plus une forme facile (comme par exemple « attendre jusqu'à un nombre s_n et puis choisir le premier candidat qui est meilleur que tous les précédents »). De plus, la solution dépend fortement de la distribution de probabilité choisie. En ce qui concerne la probabilité de succès de la stratégie optimale pour une distribution du nombre de candidats choisie, celle-ci peut aussi être inférieure à la borne $1/e$ obtenue dans le problème de secrétaires.

Étonnamment, il est possible de faire presque aussi bien que l'optimum en utilisant un modèle avec une information plus faible que la loi de probabilité g du nombre d'offres : un modèle minimaliste. Nous étudions ce modèle ainsi que sa solution qui a été trouvée par Bruss [3] en 1984 dans la section suivante.

3 La loi du $1/e$

Comme nous venons de l'annoncer, dans cette section nous analysons le modèle proposé par Bruss [3] dans le cas où le nombre de candidats est inconnu. Ce modèle est basé sur l'idée que des problèmes de la vie réelle se posent en temps réel et qu'il est plus facile d'estimer les instants auxquels les arrivées des candidats sont plus probables que d'estimer la distribution du nombre d'arrivées des candidats.

Nous donnons le résultat de son approche qui consiste à unifier une certaine classe de problèmes de meilleur choix avec un nombre inconnu d'offres : *la loi du* $1/e$. Dans son modèle, la distribution de la qualité des candidats ainsi que la distribution du nombre de candidats sont supposées être inconnues.

Nous considérons le modèle mathématique suivant.

> Soit $F(z)$ une fonction de répartition continue sur l'intervalle de temps réel $[0,t]$. Soient $Z_1, Z_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition F. La variable Z_i dénote le temps d'arrivée du candidat i. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ représentant le nombre total de candidats qui vont se présenter, et supposons la indépendante des Z_i. À chaque candidat est associée une qualité différente et nous supposons qu'à $N = n$ fixé, chaque ordre d'arrivée des rangs $\langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle$ est équiprobable de probabilité $\frac{1}{n!}$. De même que

dans l'énoncé du problème des secrétaires, $\langle 1\rangle$ représente le meilleur rang et $\langle n\rangle$ le plus mauvais.

Supposer que les temps d'arrivée des candidats sont indépendants les uns des autres et suivent la même loi de probabilité et supposer celle-ci continue permet de s'assurer que les candidats arrivent séquentiellement et qu'il n'y a pas d'arrivées simultanées de candidats.

Nous voulons maximiser la probabilité de choisir le meilleur candidat. Cet objectif nous amène à appeler *candidat-guide* un candidat meilleur que tous les précédents. Dans le jeu considéré dans l'introduction le candidat-guide était le nombre plus grand que tous les nombres précédents. Le premier candidat qui arrive est un candidat-guide par convention. Dans le cas où le temps est continu, si un candidat est accepté au temps τ, avec $\tau \in [0,t]$, cela veut dire que l'intervalle $[0,\tau]$ a été observé de manière continue sur tous ses sous-intervalles où F est strictement croissante.

Définition 1. La (x,r)-stratégie sur $[0,t]$ est une stratégie de temps d'arrêt qui a la forme suivante :

- Observer et attribuer des rangs à tous les candidats arrivant jusqu'au temps x, sans accepter aucun candidat.
- Accepter le r[e] candidat-guide arrivant après le temps x, c'est-à-dire le premier qui est r rangs supérieurs que le meilleur de ceux arrivés en $[0,x]$, s'il existe. Sinon refuser tous les candidats.

Nous appelons x le temps d'attente. Lorsque $r=1$, nous parlons simplement de x-stratégie.

Théorème 2. *Pour toute fonction de distribution g de la variable* N *avec* $\mathbb{P}(\mathrm{N}>0)>0$, *il existe un temps d'attente z^* qui maximise la probabilité de succès de la x-stratégie.*

De plus, pour tout $\epsilon>0$, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que, si $\mathrm{N}\geqslant m$, *alors* $z^*\in[e_{\mathrm{F}}^{-1}-\epsilon; e_{\mathrm{F}}^{-1}]$, *où*

$$e_{\mathrm{F}}^{-1}=\inf\{z\,|\,\mathrm{F}(z)={}^{1}\!/\!_{e}\}.$$

Notons que le temps d'attente maximisant la probabilité associée à la x-stratégie est très proche de la valeur $1/e$ à partir d'un certain nombre m.

Nous allons maintenant prouver le théorème 2. Afin de permettre au lecteur motivé de s'exercer un peu, nous allons énoncer certaines étapes fondamentales sous forme d'exercices dont les solutions sont données à la fin des notes.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que la forme de la distribution F est sans importance pour ce problème car F est continue. En effet, nous pouvons toujours effectuer un changement d'échelle de temps et poser $x=\mathrm{F}(z)$, $z\in[0,t]$. Ainsi $x\in[0,1]$ et $\mathrm{X}_k=\mathrm{F}(\mathrm{Z}_k)$ est uniforme sur $[0,1]$.

Exercice I. Soit Z une variable aléatoire de fonction de répartition continue F et soit X la variable aléatoire définie par $\mathrm{X}=\mathrm{F}(\mathrm{Z})$. Montrer que X est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,1]$.

Dénotons par $p_n(x)$ la probabilité de succès de la x-stratégie conditionnellement à l'événement $\{\mathrm{N}=n\}$ et par $x^*\overset{\text{def}}{=}\mathrm{F}(z^*)$ la valeur qui maximise la probabilité de succès de la x-stratégie. Remarquons d'abord que, si $n=0$, toute stratégie donne un succès trivial, et si $n=1$, nous prenons $x^*=0$ et la probabilité de succès associée vaut 1. Supposons maintenant que $n\geqslant 2$ et décomposons le problème. Considérons d'abord le cas où tous les candidats arrivent après le temps x. Comme les variables X_k sont des variables i.i.d. de loi uniforme, ceci a lieu avec probabilité $(1-x)^n$. Seul le cas où le meilleur candidat $\langle 1\rangle$ arrive le premier, ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{n}$, est favorable, donc la probabilité de succès dans le cas où tous les candidats arrivent tard est $\frac{(1-x)^n}{n}$. Dès maintenant, on suppose qu'au moins un candidat arrive avant le temps x. La x-statégie donne un succès si le meilleur candidat $\langle 1\rangle$ arrive dans $]x,1]$ avant tous les autres candidats arrivant dans $]x,1]$ qui sont meilleurs que ceux arrivant en $[0,x]$. Considérons les $k+1$ meilleurs candidats. Dans ces conditions nous supposons donc que $\langle k+1\rangle$ arrive en $[0,x]$ et que les k meilleurs arrivent après x, ce qui a lieu avec probabilité $x(1-x)^k$ et il y aura un succès si $\langle 1\rangle$ arrive avant $\langle 2\rangle,\cdots,\langle k\rangle$, ce qui a lieu avec probabilité $1/k$. En sommant sur toutes les valeurs possibles pour k, nous avons donc :

$$p_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x(1-x)^k}{k}, \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Exercice II. Remarquer que le développement en série de Taylor de $-\ln(x)$ autour de 1 est

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{k}.$$

Montrer ensuite que cette série converge uniformément sur tout compact de $]0,2[$.

Nous observons que

$$p_n(x) - p_{n+1}(x) = \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} \geqslant 0 \quad \text{pour } x \in [0,1]$$

et donc

$$p_n(x) \searrow p(x) = -x\ln(x) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Nous avons vu dans la section 2 que la fonction p est maximisée par $x = \frac{1}{e}$.

Étudions maintenant les fonctions $p_n(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{dp_n(x)}{dx} &= -(1-x)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} x(1-x)^{k-1} \\
&= -(1-x)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k}{k} - x\frac{1-(1-x)^{n-1}}{x} \\
&= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-x)^k}{k}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{d^2p_n(x)}{dx^2} = -\sum_{k=1}^{n-1}(1-x)^{k-1} = -\frac{1-(1-x)^{n-1}}{x} < 0 \quad \text{pour } x \in [0,1].$$

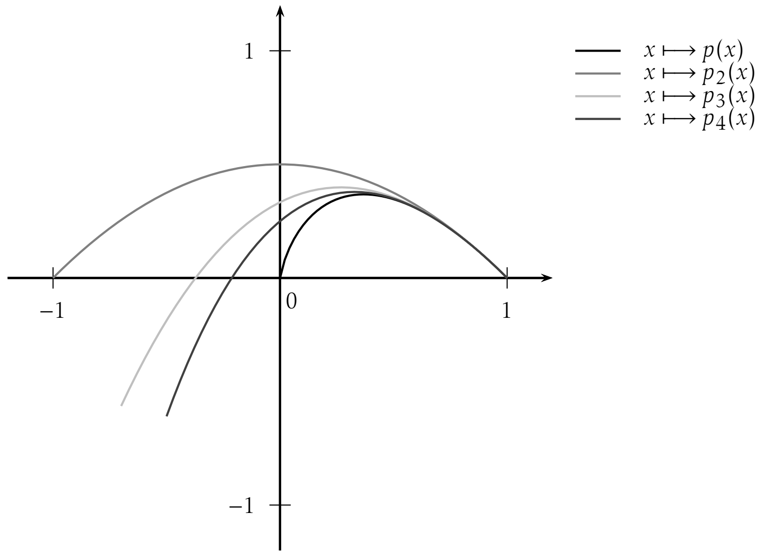

FIGURE 1 — Représentation graphique des fonctions $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$ ainsi que de $p(x)$.

Remarquons aussi que $\frac{dp_n(0)}{dx} \geqslant 0$, $\frac{dp_n(1)}{dx} = -1$ et que $\frac{dp_n}{dx}$ est une fonction décroissante sur $[0,1]$. Ainsi $p_n(x)$ a un unique point critique x_n. Et nous pouvons conclure qu'il s'agit d'un maximum, car $\frac{d^2p_n(x)}{dx^2} < 0$. En outre, $x_n \nearrow 1/e$ (voir aussi figure 1).

Nous dénotons par $G_m(x)$ la probabilité de succès de la x-stratégie sachant que $N \geqslant m$ et obtenons via la formule des probabilités totales

$$G_m(x) = \sum_{n \geqslant m} p_n(x)\mathbb{P}(N = n).$$

Notons que $G_0(x)$ représente la probabilité de succès de la x-stratégie. Si il existe une valeur x^* qui maximise $G_m(x)$, alors $x^* \in [x_m, 1/e]$.

Exercice III. Prouver que G_m est continue.

Comme G_m est continue, x^* existe. Finalement il suffit d'utiliser le changement de variable et la continuité de la fonction de répartition F et la preuve est terminée. □

Corollaire 3. *La e_F^{-1}-stratégie a une probabilité de succès plus grande que $1/e$ pour n'importe quelle distribution de* N.

Démonstration. Nous voulons montrer que $G_0(e^{-1}) \geqslant 1/e$. Nous avons vu dans la preuve du théorème 2 que $p_n(x) \searrow p(x) = -x\ln(x)$ sur $[0,1]$. Et donc par $x = F(z)$,

$z \in [0,t]$ et la définition de G_m, nous avons

$$G_0(1/e) \geqslant \sum_{n\geqslant 0} p(1/e)\mathbb{P}(N=n) = p(1/e) = 1/e.$$

$\square$

Corollaire 4. *La e_F^{-1}-stratégie est la seule (x,r)-stratégie possédant la propriété décrite au corollaire 3.*

Démonstration. Comme $p_n(x)$ a un unique maximum x_n et que $x_n \nearrow 1/e$, il est évident que la e_F^{-1}-stratégie est l'unique x-stratégie avec la propriété décrite au corollaire 3. Soit $r > 1$, alors une condition nécessaire pour pouvoir obtenir un succès est l'existence d'au moins r candidats-guides. Or pour toute distribution g avec $\mathbb{P}(1 \leqslant N < r) > 1 - 1/e$, la probabilité de succès de l'(x,r)-stratégie est inférieure à $1/e$ pour toute valeur de x dans $[0,1]$. En particulier, si $\mathbb{P}(1 \leqslant N < r) = 1$, alors la probabilité de succès est nulle. $\square$

Le corollaire 3 et le corollaire 4 ensemble forment la loi du $1/e$. Si z^* est tel que $F(z^*) = 1/e$, la loi du $1/e$ nous dit que la stratégie optimale est la suivante : attendre et observer tous les candidats jusqu'au temps z^* sans en accepter aucun et puis accepter le premier qui est meilleur que tous les précédents. De plus, la probabilité de succès de cette stratégie est plus grande que $1/e$ pour n'importe quelle distribution de N et c'est l'unique (x,r)-stratégie qui garantit cette borne inférieure. En outre, il n'est pas compliqué de voir que s'il y a au moins un candidat, la probabilité de ne choisir aucun des candidats est égale à $1/e$.

Nous remarquons aussi que Bruss et Yor [4] ont récemment donné une nouvelle démonstration de la loi du $1/e$ basée sur des processus stochastiques à accroissements proportionnels.

4 Application

Nous construisons dans la suite un exemple pour illustrer comment on peut utiliser la loi du $1/e$ dans la vie quotidienne pour vendre ou acheter un bien comme une maison, un appartement, une voiture, ou encore trouver un bon emploi voire peut-être même trouver l'homme ou la femme de sa vie.

Imaginons que Yvcanichgeyv Six [1] veut vendre sa luxueuse villa localisée au coeur de la ville de Luxchateau dans la région Belien. Elle est une personne difficile qui veut avoir le meilleur succès sans avoir des informations sur le nombre N d'intéressés. Elle s'est fixé un délai de six semaines au bout duquel elle veut avoir vendu sa villa. Elle va profiter de ses connaissances en mathématiques et appliquer la fameuse loi du $1/e$.

L'annonce suivante sera publiée dans le quotidien principal de Belien ainsi que dans le journal local de Luxchateau pendant 5 samedis successifs (S1, S2, S3, S4, S5) :

> Belien, Luxchateau, bd de la Plaine, villa, 165 m^2, séjour, 6 ch., 2 s.d.b., 3 WC sép., cuis. éq., 2 balc., ascen., cave, 3 garages fermés, grand jardin, prix 6000000 Luxdollars, Tél : 636 123 456

1. Yvcanichgeyv Six est une créature mystérieuse de caractère exigeant mais très gentil au fond de son coeur. Sa vie semble être déterminée par sa passion : les mathématiques. Des rumeurs circulent même qu'elle joue un rôle clé pour les BSSM.

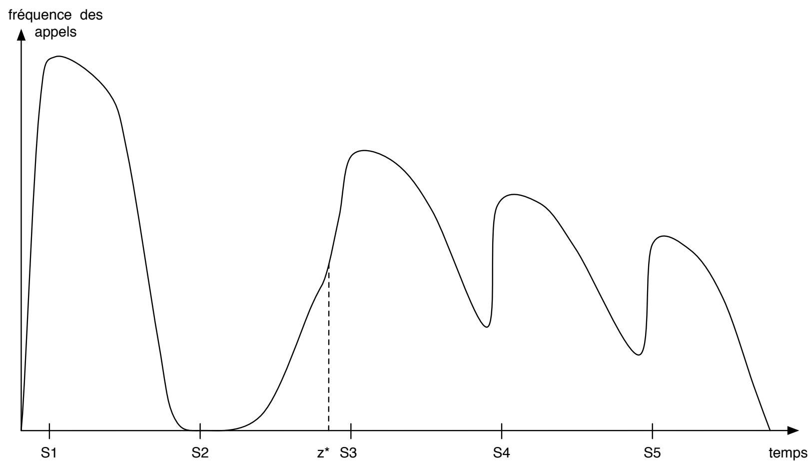

Figure 2 — Le graphique représente la fréquence des appels des personnes intéressées en fonction du temps.

Afin de pouvoir appliquer la stratégie donnée par la loi du $1/e$, Yvcanichgeyv Six estime à quels instants les arrivées des candidats sont les plus probables. Elle prévoit les événements suivants :

– les personnes intéressées réagiront vite : elles téléphoneront plus probablement le samedi, dimanche ou encore le lundi que les autres jours ;

– si le nombre d'appels est très élevé, la fréquence des appels en fonction du temps dessinera une courbe f globalement décroissante, mais avec des pics aux fins de semaine.

De plus Yvcanichgeyv Six prend en compte l'information partielle supplémentaire qu'elle suivra sa passion et participera à une conférence de mathématiques à l'étranger pendant 4 jours (du vendredi V1 jusqu'au mardi Ma2). Lors de ces 4 jours, elle ne va pas répondre aux appels, puisqu'elle veut prêter toute son attention aux exposés. Lors de son retour, elle estime que le nombre d'appels sera alors augmenté. Le résultat de ses réflexions est donné à la figure 2.

Notons $r(z)$ le rapport de l'aire délimitée par la courbe entre l'abscisse 0 et l'abscisse z avec l'aire totale sous la courbe sur tout l'axe des abscisses. Yvcanichgeyv Six va déterminer l'instant z^* tel que $r(z^*) = 1/e$. En pratique, elle détermine l'instant z^* tel que l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite verticale $x = z^*$ vaut $36,8\%$ de l'aire totale délimitée par la courbe et l'axe des abscisses. Elle trouve que l'instant z^* coïncide avec le vendredi V2, le vendredi avant la troisième publication de l'annonce. Yvcanichgeyv Six va donc attendre jusqu'au vendredi V2 sans accepter aucune offre et par la suite accepter la première offre qui est meilleure que toutes les précédentes.

En conclusion, nous pouvons discuter si l'utilisation de la loi du $1/e$ est toujours réaliste. Par exemple pour la vente ou l'achat d'un bien immobilier, on l'applique plutôt si le marché est nerveux. En effet, dans un marché plus calme l'hypothèse d'une décision instantanée ou d'une décision qui doit être prise avant l'arrivée de la prochaine offre n'est pas vraiment réaliste. De plus, imaginons que vous voulez appliquer la stratégie donnée par la loi du 1/e et que vous avez calculé ce z^*, mais que vous obtenez une offre avant le jour z^* qui vous paraît excellente : n'hésitez pas à l'accepter. Je termine cette discussion par une citation du professeur F.T. Bruss, le père de la loi du 1/e : « Ce modèle n'est pas toujours très réaliste, mais pour des décisions d'importance moyenne, il est en général bien adapté » (voir [5]).

5 Solutions des exercices

Solution de l'exercice I. Soit Z une variable aléatoire de fonction de répartition continue F et soit X la variable aléatoire définie par $X = F(Z)$. Nous voulons montrer que X est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,1]$.

Rappel. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Nous avons

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(F(Z) \leqslant x).$$

Remarquons que si $x > 1$ alors $\mathbb{P}(F(Z) \leqslant x) = 1$ et si $x < 0$ alors $\mathbb{P}(F(Z) \leqslant x) = 0$, car F est une fonction de répartition. Si, $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous avons

$$F_X(x) = \mathbb{P}(F(Z) \leqslant x) = \mathbb{P}(Z \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x.$$

(Nous avons supposé ici que F était inversible. Sinon on peut travailler avec l'inverse généralisée $F^{-1}(x) = \inf\{z \mid F(z) \geqslant x\}$ et la preuve n'est pas facile, mais analogue à ce qui précède.) □

Solution de l'exercice II. La série de Taylor d'une fonction f au voisinage d'un point a est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

et le développement en série de Taylor de $-\ln(x)$ autour de 1 est donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{k}. \tag{1}$$

La série en (1) est une série de puissance de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k,$$

avec $c_k = \frac{(-1)^k}{k}$ et $x_0 = 1$. Calculons son rayon de convergence R. Nous avons

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}}{\frac{(-1)^k}{k}}\right| = 1 = \beta$$

et $R = \frac{1}{\beta} = 1$. La série en (1) converge donc absolument si $|x-1| < 1$, i.e. si $x \in]0, 2[$. Et elle converge normalement, et donc uniformément, sur tout compact du disque de convergence. □

Solution de l'exercice III. Rappelons que

$$G_m(x) = \sum_{n \geqslant m} p_n(x) \mathbb{P}(N = n). \tag{2}$$

Comme

$$|p_n(x) \mathbb{P}(N = n)| \leqslant p_n(x)$$

et $\sum p_n(x)$ converge uniformément, le *critère de Weierstrass* s'applique et nous pouvons conclure que la série dans 2 converge uniformément et donc G_m est continue. □

6 Bibliographie

[1] T. S. Ferguson, « Who solved the secretary problem ? », *Statist. Sci.*, vol. 4, no. 3, p. 282–296, 1989. With comments and a rejoinder by the author.

[2] P. R. Freeman, « The secretary problem and its extensions : a review », *Internat. Statist. Rev.*, vol. 51, no. 2, p. 189–206, 1983.

[3] F. T. Bruss, « A unified approach to a class of best choice problems with an unknown number of options », *Ann. Probab.*, vol. 12, no. 3, p. 882–889, 1984.

[4] F. T. Bruss et M. Yor, « Stochastic processes with proportional increments and optimal stopping problems ». Soumis pour publication, 2012.

[5] F. T. Bruss, « Le pouvoir inconnu d'un modèle mathématique », *Pour la Science*, vol. 358, p. 86–89, Août 2007.

[6] F. T. Bruss, « Sum the odds to one and stop », *Ann. Probab.*, vol. 28, no. 3, p. 1384–1391, 2000.

[7] J. P. Gilbert et F. Mosteller, « Recognizing the maximum of a sequence », *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 61, p. 35–73, 1966.

[8] D. V. Lindley, « Dynamic programming and decision theory », *Appl. Statist.*, vol. 10, p. 39–51, 1961.

[9] E. L. Presman et I. M. Sonin, « The problem of best choice in the case of a random number of objects », *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, vol. 17, p. 695–706, 1972.

[10] J. Gianini et S. M. Samuels, « The infinite secretary problem », *Ann. Probability*, vol. 4, no. 3, p. 418–432, 1976.

[11] T. J. Stewart, « The secretary problem with an unknown number of options », *Oper. Res.*, vol. 29, no. 1, p. 130–145, 1981.