

Introduction aux courbes legendriennes dans l'espace des éléments de contact du plan

Baptiste Chantraine*
baptiste.chantraine@ulb.ac.be

Résumé

En étudiant certaines trajectoires sur un plan ayant pour contrainte que l'objet se déplace dans la direction imposée par sa position (les roues d'une voiture, la direction d'un patin à glace), nous arrivons naturellement à la définition de la structure de contact standard sur l'espace des éléments de contact du plan. Les courbes legendriennes apparaissent alors comme les trajectoires valides de l'objet. Ces considérations permettent d'esquisser une preuve intuitive du théorème d'approximation legendrienne.

Sommaire

1	Introduction	28
2	Courbes dans le plan	29
3	Courbes avec contraintes	31
4	Structure de contact sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$	32
5	Courbes legendriennes	32
6	Singularités génériques des courbes legendriennes	34
7	Théorème d'approximation legendrienne	35
8	Correction des exercices	37
9	Bibliographie	38

*Baptiste Chantraine est Chargé de Recherche FNRS auprès du Département de Mathématique de l'Université libre de Bruxelles. Il est titulaire d'un Doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université du Québec à Montréal, et d'une Maîtrise de Mathématiques de l'Université de Savoie (France). Il travaille en géométrie de contact et symplectique.

1 Introduction

La géométrie de contact consiste en l'étude des propriétés de structures dites « de contact » définies sur les espaces de dimensions impaires ainsi qu'en l'application de ces notions en géométrie ou en topologie. Historiquement, la terminologie « contact » apparaît pour la première fois dans les travaux de Sophus Lie au XIX^e siècle lors de l'étude des *transformations de contact* qui sont les symétries de certaines équations différentielles. Ce n'est toutefois réellement qu'au XX^e siècle que la géométrie de contact à proprement parler a pris son essor et ce à un tel point que, depuis les années 1950, cette théorie est devenue un domaine de recherche à part entière, à la frontière entre la géométrie et la topologie. Un des chercheurs de cette discipline est le mathématicien Vladimir Arnold (ou Arnol'd) qui a exprimé certains problèmes de géométrie et de mécanique classique en termes de géométrie de contact (il prétendit notamment que le premier théorème de géométrie de contact est le principe de Huygens sur la diffraction de la lumière). Le lien entre la géométrie de contact et la topologie de basse dimension a été initié par Daniel Bennequin dans son article [1] où il a démontré ce qui est désormais connu sous le nom de l'inégalité de Bennequin.

Le présent document n'est pas à proprement parler une introduction à la géométrie de contact puisque nous nous intéresserons à une structure de contact particulière sur l'espace des éléments de contact du plan. Il a pour but d'introduire la notion de courbe legendrienne qui, dans ce cas précis, possède une interprétation concrète en termes de trajectoire d'objets qui ont pour contrainte d'aller dans une direction imposée par la position de l'objet (on pense notamment à une voiture, un patin à glace, des skis, etc). Dans ce contexte nous énoncerons le théorème d'approximation legendrienne et nous démontrerons qu'il est en fait évident si on exprime le problème en termes d'une situation concrète. Bien que la preuve soit donnée dans cette structure de contact particulière, elle s'adapte pour toute structure de contact en dimension 3 une fois le théorème de Darboux sur la forme locale des structures de contact démontré (ce théorème sera le premier qu'un étudiant rencontrera s'il décide d'étudier la géométrie de contact). Les méthodes et les concepts utilisés dans ce document sont élémentaires et la matière nécessaire pour comprendre les preuves ne dépasse pas le calcul différentiel et intégral de base vu en première année d'université (si ce n'est avant), à l'exception du théorème 6 qui ne sera pas démontré ici et dont la partie difficile n'est pas utilisée pour prouver le théorème 7.

Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances dans ce domaine vaste pourra commencer par lire [2] pour l'aspect historique ; le lien avec la mécanique classique étant établi dans [3]. Le livre de référence pour les bases de la géométrie de contact moderne est [4] et si le lecteur est intéressé par les singularités des fronts d'ondes, il pourra se référer à [5]. Cette bibliographie n'est pas exhaustive et ne couvre pas les aspects plus modernes comme les courbes holomorphes appliquées au domaine ; elle poursuit comme but de servir comme point de départ à un lecteur souhaitant s'initier à ce domaine actif.

Dans la section 2, nous définissons les éléments de base concernant les courbes dans le plan. Ensuite, dans la section 3, nous décrivons un exemple concret dans lequel il est nécessaire de considérer les courbes dans un espace tridimensionnel. Cela nous amène à la définition de la structure de contact standard donnée à la section 4 et de courbes legendriennes (section 5). Dans la section 6 nous décrivons les singularités génériques des fronts d'ondes, avant de terminer, dans la section 7, par l'énoncé du théorème d'approximation legendrienne dont nous donnons une idée de preuve simple.

Durant sa lecture, le lecteur sera confronté à deux exercices. Nous l’encourageons vivement à réfléchir à ceux-ci avant de se référer à leurs solutions données en fin d’article. De manière générale, il est utile d’avoir une feuille à côté de soi sur laquelle le lecteur pourra reproduire les différents calculs et dessins expliqués dans ce document afin qu’il se familiarise avec les concepts définis à son propre rythme. L’article sera considéré comme bien compris lorsque le lecteur sera convaincu que la figure 11 démontre le théorème 7 pour la courbe explicite de la première partie de la preuve.

2 Courbes dans le plan

Intuitivement, une courbe dans \mathbb{R}^2 est la trajectoire d’un point mobile dans le plan. Plus précisément :

Définition 1. Une courbe γ dans le plan est la donnée d’une application lisse

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Le vecteur tangent à l’instant $t_0 \in [a, b]$ à une telle courbe est donné par

$$\dot{\gamma}(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0)). \tag{2}$$

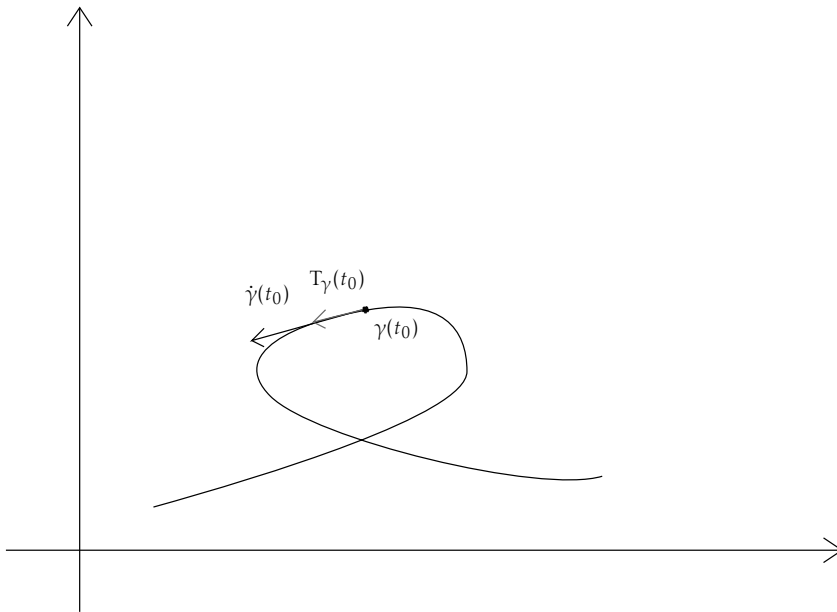


FIGURE 1 — Exemple de courbe.

Une courbe dans le plan sera dite *régulière* si à chaque instant t_0 le vecteur $\dot{\gamma}(t_0)$ est non nul. Pour une courbe régulière, on définit le *vecteur tangent unitaire*

en t_0 comme $T_\gamma(t_0) = \frac{\dot{\gamma}(t_0)}{\|\dot{\gamma}(t_0)\|}$. Finalement, une courbe est dite *paramétrée par sa longueur* si à chaque instant la norme du vecteur tangent est 1.

Lors de l'étude des courbes dans le plan, il est important de distinguer quelles propriétés dépendent uniquement de la « forme » de la courbe et lesquelles dépendent de la courbe telle qu'elle est paramétrée (i.e. de la vitesse à laquelle est parcouru le dessin). Par exemple, le vecteur tangent dépend de la vitesse contrairement au vecteur tangent unitaire. Cette considération amène à la définition de reparamétrisation d'une courbe.

Définition 2. Soit γ une courbe dans le plan, et soit $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ une bijection lisse de dérivée non nulle. Alors la courbe μ définie par $\mu(t) = \gamma(f(t))$ est appelée une *reparamétrisation* de γ .

Remarque. Parfois pour définir une reparamétrisation, on demande que $f' > 0$, c'est-à-dire que même si la vitesse nous intéresse peu, le sens de parcours est fixé. Par exemple, si $f' < 0$ le sens du vecteur tangent unitaire change, alors qu'il ne change pas si $f' > 0$.

La longueur d'une courbe est définie comme $l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. Si la courbe est paramétrée par sa longueur alors $l(\gamma) = b - a$.

Proposition 3.

1. Si γ est régulière, alors toute reparamétrisation de γ est régulière.
2. De même, la longueur d'une courbe ne dépend pas de la reparamétrisation.
3. Si γ est régulière, alors il existe une reparamétrisation μ de γ telle que μ est paramétrée par sa longueur.

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents, il suffit d'appliquer la règle de dérivation des fonctions composées et la formule du changement de variable pour les intégrales. Pour le dernier point, on définit $h(s) = \int_a^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. On obtient la reparamétrisation désirée en considérant $f = h^{-1}$. \square

Afin de se familiariser avec les courbes, nous invitons le lecteur à réfléchir à l'exercice suivant.

Exercice I. Paramétrer les courbes suivantes, puis, pour chacune d'entre elles, calculer $\dot{\gamma}$, T_γ , chercher une paramétrisation par la longueur (si la courbe est régulière) et calculer leur longueur (voir figure 2).

1. Droite de pente a passant par un point (x_0, y_0) .
2. Le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
3. Le cercle de rayon r centré en (x_0, y_0) .
4. Trajectoire d'un point sur une roue de vélo (de rayon r) qui avance à vitesse 1. On place l'origine de \mathbb{R}^2 au centre de la roue en sa position initiale.

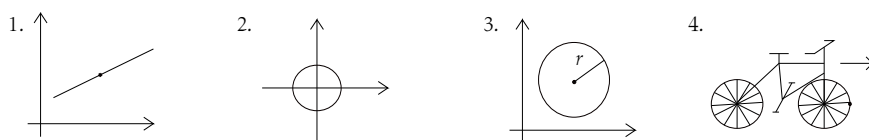


FIGURE 2 — Quelques courbes simples.

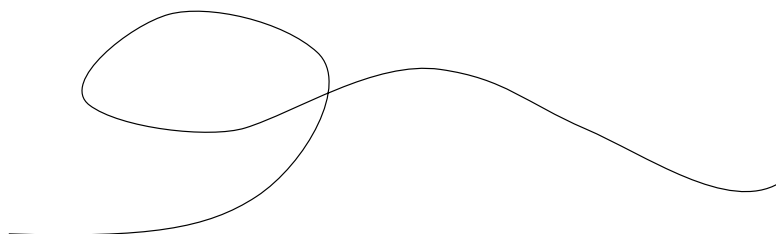


FIGURE 3 — Trajectoire supposée d'une voiture.

3 Courbes avec contraintes

Il existe des situations où, même si les courbes sont représentées dans un plan, les trajectoires possibles sont soumises à certaines contraintes s'exprimant en dimension supérieure. Par exemple, supposons que le dessin sur la figure 3 représente la trajectoire d'une voiture.

Bien que cette trajectoire semble tout à fait possible, elle dépend en fait de la position de la voiture. Par exemple si la voiture est dans la position représentée sur la figure 4 le long de la trajectoire, le phénomène semble douteux.

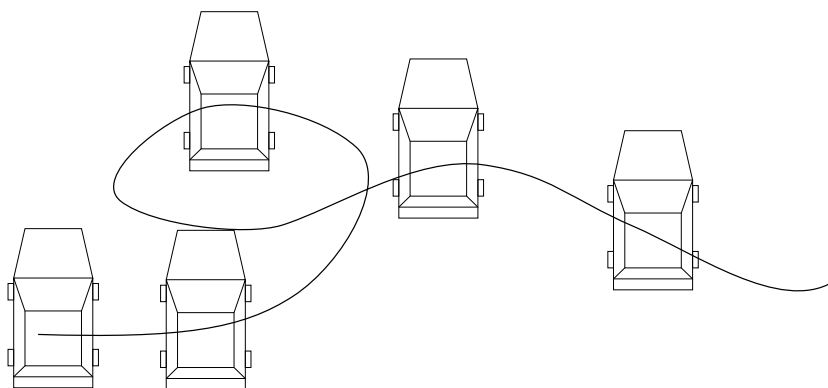


FIGURE 4 — Position de la voiture le long de la courbe.

En fait, pour décrire la voiture nous avons besoin de 3 coordonnées et non 2 : la position de son centre de gravité dans le plan (donc 2 coordonnées), et l'axe donné par la position des roues (donnant la troisième coordonnée). Donc à chaque

instant t la voiture est décrite par un élément $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ où \mathbf{S}^1 est le cercle de rayon 1 paramétré par $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. La courbe γ est donc paramétrée par $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ et la courbe dessinée sur le plan correspond à $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. La condition pour que la trajectoire soit valide est que le vecteur tangent à cette courbe soit dans la direction imposée par les roues, donc il faut qu'il soit colinéaire à $(\cos \gamma_3(t), \sin \gamma_3(t))$. Comme nous sommes en dimension 2 il suffit que $\dot{\gamma}(t)$ soit orthogonal à $(-\sin \gamma_3(t), \cos \gamma_3(t))$. Et donc finalement, il faut que la courbe γ satisfasse :

$$-\gamma_1'(t) \sin \gamma_3(t) + \gamma_2'(t) \cos \gamma_3(t) = 0. \quad (3)$$

4 Structure de contact sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$

La partie gauche de l'équation 3 définit en chaque point (x, y, θ) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ une application linéaire $\alpha_{(x,y,\theta)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\alpha_{(x,y,\theta)}(a, b, c) = -a \sin \theta + b \cos \theta$.

Un lecteur initié verra la copie de \mathbb{R}^3 apparaissant dans le domaine de cette application comme l'espace tangent à $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ au point (x, y, θ) . De même il reconnaîtra en la collection des $\alpha_{(x,y,\theta)}$ lorsque le point varie une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Dans ce langage, la collection α s'écrit de manière concise sous la forme $\alpha = -\sin \theta dx + \cos \theta dy$.

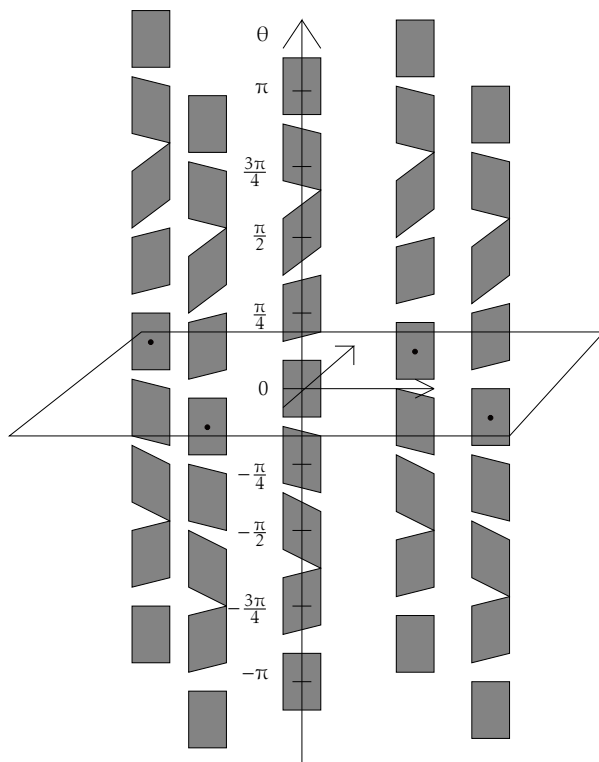
L'équation 3 implique que nous nous intéressons au noyau $\xi_{(x,y,\theta)}$ de cette application linéaire. En chaque point il est clairement engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$. La collection α détermine donc en chaque point de $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ un plan $\xi_{(x,y,\theta)}$ dans \mathbb{R}^3 , et la collection de ces plans est appelée la *structure de contact standard* sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Elle est représentée sur la figure 5 (il est important de remarquer que $\pi = -\pi$ sur le cercle, dans la figure le cercle en question est « déroulé »). Notez qu'une des propriétés importantes de cette structure consiste dans le fait que, lorsque nous nous déplaçons dans la direction θ , nous voyons la collection de ces plans « tourner » ; cela représente le caractère « de contact » de cette distribution. Dans ce contexte l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ est appelé l'espace des éléments de contact du plan. En fait on notera que le cercle \mathbf{S}^1 dans ce contexte n'est pas « n'importe quel » cercle, il correspond à l'ensemble de toutes les directions possibles à partir d'un point du plan.

5 Courbes legendriennes

Les courbes legendriennes sont celles qui sont solutions de l'équation (3), en d'autres termes :

Définition 4. Une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ est dite *legendrienne* si $\dot{\gamma}(t) \in \xi_{\gamma(t)}$ à chaque instant t .

Ce sont les courbes qui décrivent les trajectoires valides pour un objet qui se déplace dans le plan avec la contrainte que la direction de la courbe est fixée par la position de l'objet, comme précédemment pour le cas de la voiture, ou aussi comme dans le cas d'un patin à glace se déplaçant sur une patinoire. Le *front d'onde* d'une telle courbe est sa projection sur \mathbb{R}^2 . Ce terme vient d'Arnold dans sa description de l'optique géométrique en termes de géométrie de contact. Le front d'onde d'une trajectoire correspond à la trajectoire que l'on dessine si on oublie la position de l'objet (comme dans la figure 3).

FIGURE 5 — Structure de contact sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$.

La description du noyau de ξ (voir section précédente) permet de décrire deux trajectoires legendriennes évidentes (voir figure 6).

1. $\gamma(t) = (0, 0, t)$. Le front d'onde ici est un point, on peut l'observer lorsqu'un patineur tourne sur lui-même sans se déplacer.
2. $\gamma(t) = (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta)$, avec θ fixé. Le front d'onde est une droite de pente $\tan \theta$, on observe celui-ci lorsque le patineur se déplace en ligne droite sur la glace.

Évidemment les trajectoires legendriennes sont beaucoup plus nombreuses, par exemple le patineur peut se déplacer le long de lignes courbes sur la glace, donnant une trajectoire legendrienne comme sur la figure 7. Nous aurons encore besoin de la définition suivante.

Définition 5. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Un *relèvement legendrien* de γ est une courbe legendrienne $\tilde{\gamma}$ dont le front d'onde est γ .

Exercice II. 1. Montrer que toute courbe régulière $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se relève à une courbe legendrienne $\tilde{\gamma}$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Notez que votre cerveau a automatiquement résolu cet exercice lorsqu'il a regardé la figure 3 en sachant

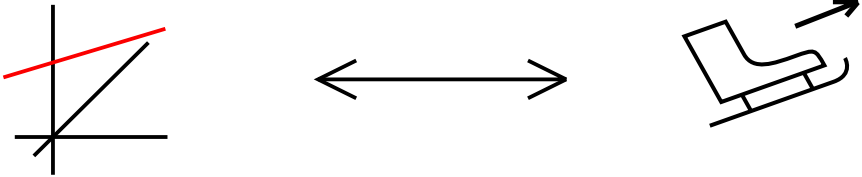
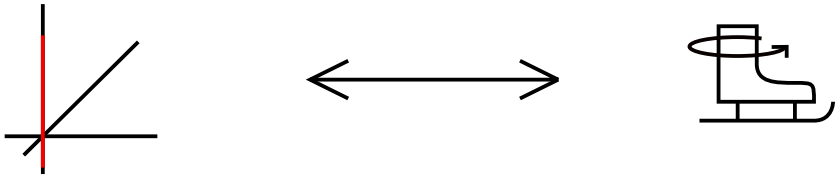


FIGURE 6 — Trajectoires legendriennes simples.

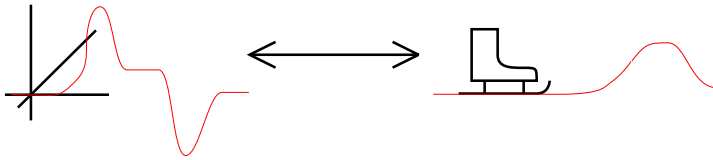


FIGURE 7 — Exemple de courbe legendrienne.

qu'il représentait la trajectoire d'une voiture ; il a automatiquement placé les roues de sorte que cette trajectoire soit possible.

2. Montrer que $\tilde{\gamma}(t) = (t^2, t^3)$ (pour $t \in [-1, 1]$) se relève à une courbe legendrienne. Ici la courbe n'est pas régulière, elle a une singularité en 0 représentée sur la figure 8.

6 Singularités génériques des courbes legendriennes

Soit γ une courbe legendrienne, et $\tilde{\gamma}$ son front d'onde. Une singularité de $\tilde{\gamma}$ est un point t_0 tel que $\tilde{\gamma}'(t_0) = 0$.

Théorème 6. *Soit γ une courbe legendrienne régulière. Alors*

1. γ peut être C^∞ -approximée à une courbe dont le front d'onde n'a que des singularités isolées.

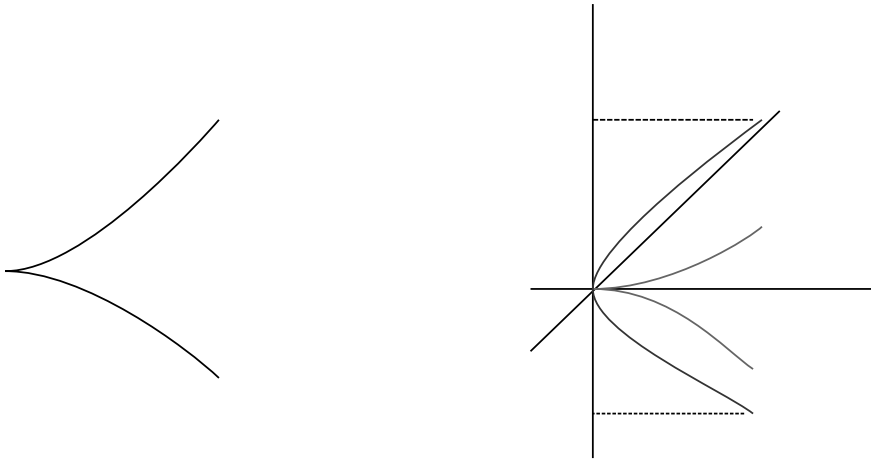


FIGURE 8 — Singularité d’un front d’onde et son relevé legendrien.

2. γ peut être C^2 -approximée à une courbe dont le front d’onde n’a que des singularités de la forme

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\lambda t^2 \cos \theta - \frac{2}{3} \lambda t^3 \sin \theta, \lambda t^2 \sin \theta + \frac{2}{3} \lambda t^3 \cos \theta \right)$$

et la courbe elle même est de la forme

$$\left(\lambda t^2 \cos \theta - \lambda \frac{2}{3} \lambda t^3 \sin \theta, \lambda t^2 \sin \theta + \lambda \frac{2}{3} \lambda t^3 \cos \theta, \arctan t + \theta \right). \quad (4)$$

Remarque. La notion de « proche » pour des courbes ou pour des fonctions dépend fortement de la norme qu’on met sur l’espace des fonctions. Une courbe dont le graphe se trouve dans un tube autour du graphe d’une courbe initiale est intuitivement C^0 -proche de celle-ci, cependant les dérivées peuvent exploser dans ce tube et donc la courbe peut être loin au sens C^1 . La notion C^2 dans le théorème implique que les points de la courbe ainsi que ses dérivées d’ordre 1 et 2 sont proches de la courbe originale. La notion C^∞ implique que toutes les dérivées sont proches.

Un exemple de courbe legendrienne dont le front d’onde est très singulier est donné par la courbe verticale du patineur qui tourne sur lui-même (le front d’onde est réduit à un point) comme dans la figure 6. On peut la C^2 -approximer de deux manières différentes comme dans la figure 9.

Remarque. Il est important de noter que ce théorème parle d’une courbe unique ; généralement une famille de courbes peut présenter des singularités plus compliquées que celle du théorème 6.

7 Théorème d’approximation legendrienne

Nous sommes maintenant en mesure d’énoncer le théorème d’approximation legendrienne qui nous enseigne que n’importe quelle courbe dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ peut

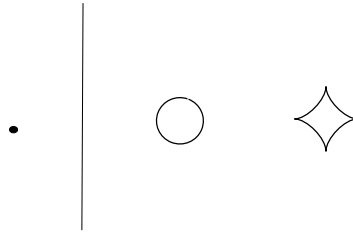


FIGURE 9 — Deux approximations (à droite) d'un front d'onde singulier (à gauche).

être approchée par des courbes legendriennes.

Théorème 7. *Soit μ une courbe régulière quelconque dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Alors μ peut être C^0 -approximée à une courbe legendrienne.*

Nous allons voir sous peu que la démonstration de ce théorème est en fait très facile (et que tout le monde ou presque connaît déjà une preuve de celui-ci), mais tout d'abord nous allons voir qu'il n'est pas évident. En effet, il reflète le fait que la structure ξ « tourne » (i.e. est de contact). Regardons le cas d'une structure η ne tournant pas du tout, $\eta_{(x,y,\theta)} = \{(a,b,0) | a,b \in \mathbb{R}\}$. Pour cette structure, il n'y a aucune chance que la courbe $\gamma(t) = (0,0,t)$ puisse être approximée par une courbe tangente à η . En effet, les courbes tangentes à la structure dans cette situation doivent rester sur un plan $\theta = cste$.

Idée de preuve. 1. Nous allons commencer par approximer une courbe particulière, furieusement non legendrienne. Cela va nous permettre ensuite de comprendre le cas général. La courbe en question est $(0,t,0)$ (voir figure 10), elle est orthogonale à la structure de contact et donc est très loin d'être legendrienne. Pour l'approximer, revenons à la description des courbes legendriennes comme trajectoire d'une voiture. Nous aspirons à trouver une trajectoire de celle-ci telle que sa position ne soit jamais éloignée de celle (non valide) donnée par la figure 10.

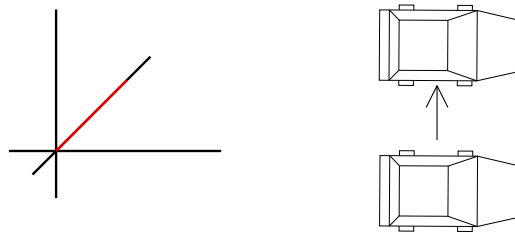


FIGURE 10 — Courbe non legendriennes et la trajectoire correspondant pour une voiture.

Comme nous voulons la trajectoire proche, donnons une obstruction de taille ε , obstruction par exemple due à d'autres voitures empêchant celle qui nous intéresse de s'éloigner de la trajectoire voulue. Nous réalisons

maintenant qu'il existe effectivement une trajectoire valide pour la voiture qui consiste à se garer en créneau (voir la figure 11).

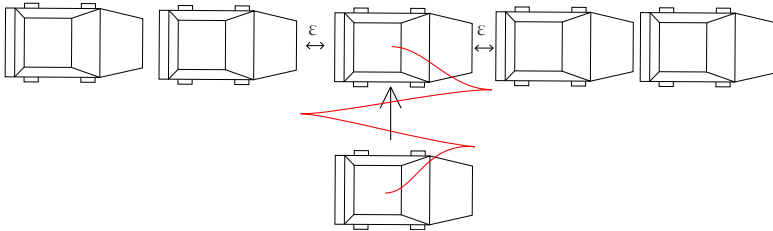


FIGURE 11 — Approximation de la trajectoire par une trajectoire valide.

2. Le cas général est maintenant simple. Sur le front d'onde nous représenterons la position θ de la courbe originale par une petite droite (comme sur la figure 12), une approximation du front d'onde dont les tangentes correspondent à ces droites se fait comme précédemment en faisant des créneaux comme sur la figure 12. En relevant ce front d'onde à une courbe legendrienne (comme dans l'exercice II et le théorème 6), on obtient l'approximation voulue. Plus nous faisons de créneaux, plus la courbe sera proche (au sens C^0) de la courbe originale.

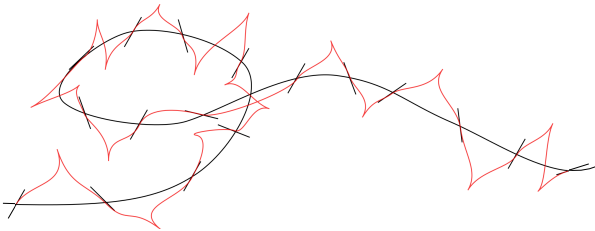


FIGURE 12 — Approximation d'une courbe quelconque.

□

L'idée de preuve de ce théorème principal étant donnée, nous allons achever le présent article par les corrections des exercices I et II.

8 Correction des exercices

Exercice I

1. On peut par exemple paramétrer la droite en déplaçant le point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $(1, a)$. On obtient donc $\gamma(t) = (x_0 + t, y_0 + a \cdot t)$. Le vecteur tangent est $\dot{\gamma}(t) = (1, a)$. Si $a \neq 0$ il n'est pas de norme 1, et $T_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1, a)$. Une paramétrisation par la longueur est donc donnée par

$$\mu(t) = \left(x_0 + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot t, y_0 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \cdot t \right).$$

2. L'application $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ est une paramétrisation du cercle. Dans ce cas ci, $\dot{\gamma}(t) = T_\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$. La courbe est donc paramétrée par sa longueur. Sa longueur est 2π comme on s'y attendait.
3. Il suffit de grossir le cercle précédent et de le centrer en (x_0, y_0) . On obtient donc $(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$. Le vecteur tangent est $(-r \sin t, r \cos t)$ qui n'est pas de norme 1 (si $r \neq 1$). Le tangent unitaire est $T_\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$. Pour obtenir une paramétrisation par la longueur on parcourt le cercle à une vitesse différente : $\mu(t) = (x_0 + r \cos \frac{t}{r}, y_0 + r \sin \frac{t}{r})$ où $t \in [0, 2\pi r]$. La longueur de la courbe est donc $2\pi r$ (toujours sans surprise).
4. On combine les points 1 et 3. Le centre du cercle est mobile, il trace la droite $(t, 0)$ (comme il a vitesse 1). Donc la courbe est $\gamma(t) = (t + r \cos \frac{t}{r}, -r \sin \frac{t}{r})$ (attention au fait que le cercle est parcouru dans le sens inverse que précédemment !). Le vecteur tangent est donc $\dot{\gamma}(t) = (1 - \sin \frac{t}{r}, -\cos \frac{t}{r})$. Il s'annule dès que $\frac{t}{r} = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$. Cette courbe n'admet donc pas de paramétrisation par sa longueur (car elle n'est pas régulière). Une manipulation des formules trigonométriques révèle que sa longueur est $8r$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Le dessin de cette courbe est un cycloïde ayant des pointes dès que $\frac{t}{r} = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$.

Exercice II

1. La courbe $\gamma(t)$ étant régulière, son vecteur tangent unitaire $T_\gamma(t)$ est bien défini. Comme il a norme 1, il s'écrit $(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$. La courbe $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \theta(t))$ est legendrienne (le calcul est simple). Notez que $\theta(t)$ varie de manière lisse si $\gamma(t)$ est lisse.
2. Cette courbe n'est pas régulière. Cependant, lorsque $t \neq 0$, on peut résoudre l'équation suivante :

$$-\sin \theta 2t + \cos \theta 3t^2 = 0$$

et on obtient alors $\theta(t) = \arctan\left(\frac{3}{2}t\right)$, ce qui permet d'écrire la courbe legendrienne suivante :

$$\gamma(t) = \left(t^2, t^3, \arctan\left(\frac{3}{2}t\right)\right).$$

Elle est bien définie en $t = 0$ et elle est régulière (sa tangente en $t = 0$ est dans la direction θ ce qui explique que le front d'onde ait une singularité). On peut réaliser ce front d'onde en patin à glace en ralentissant jusqu'à avoir une vitesse nulle et en repartant en marche arrière.

9 Bibliographie

- [1] D. BENNEQUIN, « Entrelacements et équations de Pfaff », in *Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)*, vol. 107 in *Astérisque*, p. 87–161, Paris : Soc. Math. France, 1983.
- [2] H. GEIGES, « A brief history of contact geometry and topology », *Expo. Math.*, vol. 19, no. 1, p. 25–53, 2001.
- [3] V. I. ARNOL'D, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60 in *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag, 1997. Translated from the

1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.

- [4] H. GEIGES, *An introduction to contact topology*, vol. 109 in *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2008.
- [5] V. I. ARNOL'D, *Singularities of caustics and wave fronts*, vol. 62 in *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers Group, 1990.

