Commençons la séance par trois expériences.

Un tour ou deux tours ?

Un exercice de gymnastique montre

un tour complet $\neq$ deux tours complets.

$\boxed{\text{Comment “expliquer” cela ?}}$

“La géométrie fait partie de la physique.” (Paul Libois)

Pour des “applications”, voir les vidéos

- danse des bougies :

  `https://www.youtube.com/watch?v=4Gf8Xa0N2yk`

  `https://www.youtube.com/watch?v=0FQsisO1gOY`

- le cube attaché qui tourne sans créer de noeud :

`https://en.wikipedia.org/wiki/Anti-twister_mechanism`

  `https://en.wikipedia.org/wiki/Plate_trick`

Images dans un miroir

L'image dans un miroir

échange gauche et droite,

mais

n'échange pas haut et bas.

Pourquoi ?

Ombres de figures

L'ombre au soleil

d'un cercle	n'est pas toujours	un cercle;
d'une ellipse	est toujours	une ellipse;
d'un carré	n'est pas toujours	un carré;
d'un parallélogramme	est toujours	un parallélogramme.

Les notions géométriques se différencient.

Une explication mathématique ?

Une seule géométrie ?

JEAN-PAUL DOIGNON
Université Libre de Bruxelles
doignon@ulb.ac.be

A la mémoire de PAUL LIBOIS (1901–1991)

Exposé à la BSSM le 3 septembre 2018

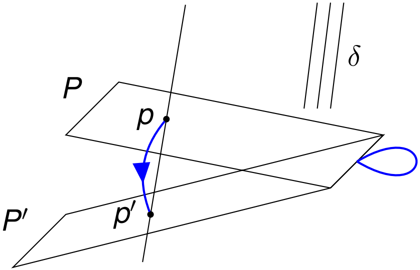
Projections parallèles

Les ombres au soleil amènent à trier les notions géométriques en

non résistantes	résistantes
cercle	ellipse
carré	parallélogramme
angle droit	
	droite
triangle équilatéral	triangle

Formalisons "ombre au soleil".

Dans l'espace, soit P et P' deux plans et
δ direction de droites parallèle ni à P ni à P'.



Définition (projection parallèle)

La projection parallèle du plan P sur le plan P', de direction δ, envoie le point p de P sur le point p' de P' tel que

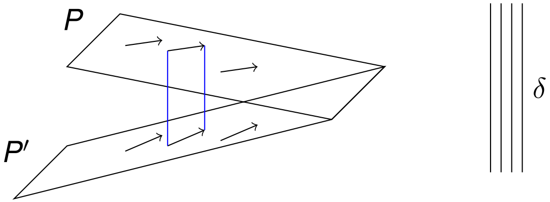
$p' = p$ si $p \in P \cap P'$,

sinon la droite pp' est dans la direction δ.

Le point p' est univoquement déterminé par le point p.
L'application de P sur P' est bijective.

Nous pouvons aussi projeter des transformations,

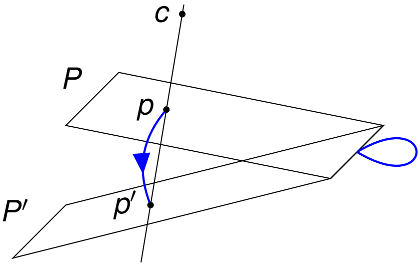
par ex. une translation :



non résistantes	résistantes
rotation	translation
symétrie orthogonale	homothétie
	‘affinité’

Observons à présent des ombres créées par un point lumineux.

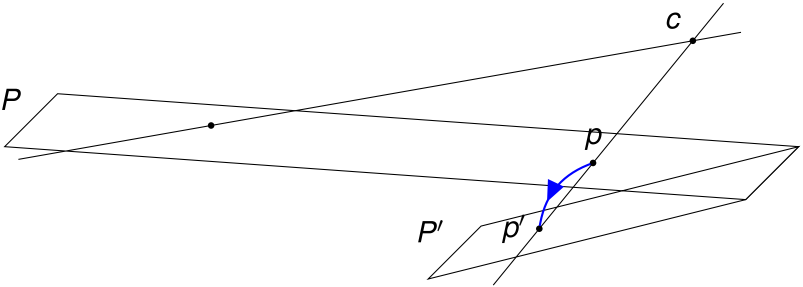
Dans l'espace usuel, soit c un point,
P et P' deux plans évitant c.



Définition (projection centrale)

La projection centrale du plan P sur le plan P' à partir du centre c envoie le point p de P sur le point p' intersection du plan P' et de la droite cp.

… MAIS …



Le point image p'

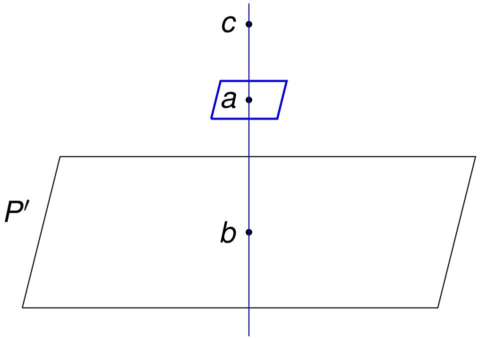
n'existe pas si la droite cp est parallèle au plan P' (ou alors...),

sinon est univoquement déterminé par le point p.

Nous reviendrons sur cette question.

Exercice

Quand la projection centrale d’un carré est-elle encore un carré ?



L’image par une projection centrale de

une ellipse	n’est pas toujours	une ellipse;
une parabole	n’est pas toujours	une parabole;
une hyperbole	n’est pas toujours	une hyperbole;
une conique ovale	est toujours	une conique ovale;
un carré	n’est pas toujours	un carré;
un parallélogramme	n’est pas toujours	un parallélogramme,
un “quadrilatère”	est toujours	un “quadrilatère”.

Une conique ovale est soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole.

Un “quadrilatère” est une figure formée de quatre points a, b, c et d et des quatre droites ab, bc, cd, da (pas nécessairement convexe).

Exercice (plutôt : Devoir)

Réaliser une photo de montgolfière qui donne un morceau d’hyperbole.

Une notion qui résiste aux projections centrales
résiste aussi aux projections parallèles.

Exercice

Montrer que toute projection parallèle est produit de deux projections centrales.

Les notions géométriques planes se trient en résistantes aux projections

ni parallèles ni centrales	parallèles mais pas centrales	centrales
cercle	ellipse	conique ovale
triangle équilatéral	triangle	“triangle”
carré	parallélogramme	“quadrilatère”
		“droite”
⋮	⋮	⋮

Pour les “droites”, nous y reviendrons.

Proposition

Pour une permutation des points d'un plan P, sont équivalents :

(a) être un produit de projections parallèles (utilisant des plans intermédiaires);

(b) conserver les droites (c.-à-d., appliquer toute droite sur une droite);

(c) dans un système de coordonnées, admettre une description analytique de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

autrement dit
$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y + p \\ y' = c\,x + d\,y + q \end{cases}$$

où a, b, c, d, p et q sont des réels fixés tels que $a\,d - b\,c \neq 0$.

Définition

Une telle permutation est une permutation affine ou affinité du plan.

Proposition

Les affinités du plan forment un groupe pour la composition, c.à-d. :

1.- la composée de deux affinités est encore une affinité;
2.- la permutation identique est une affinité;
3.- la permutation réciproque d'une affinité est encore une affinité.

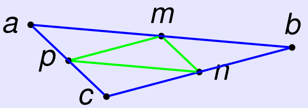
Proposition

Le groupe des affinités du plan agit transitivement sur

- les points;
- les droites;
- les triangles;
- les parallélogrammes.

Deux problèmes de l'Olympiade

Exercice (OMB, éliminatoire miNi, 1986)



Si m, n, p sont les milieux des segments $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$, le rapport des aires du triangle mnp et du triangle abc vaut

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, autre réponse.

Exercice

Tout parallélogramme est-il inscriptible à une ellipse ?

Et les projections centrales ?

Plus compliqué, avec

- les points à l'infini,
- les coordonnées homogènes.

Il en résulte aussi un groupe, le groupe des 'projectivités' du plan.

Des détails viennent plus tard.

Trois expériences

Projections parallèles et centrales

L’enseignement de la géométrie

L'enseignement de la géométrie

Il combine

l'observation du monde physique,

l'apprentissage d'une théorie formelle.

Premier exemple connu d'un exposé "rigoureux" :

EUCLIDE, *Les Eléments*

(sans doute écrit à Alexandrie vers -300).

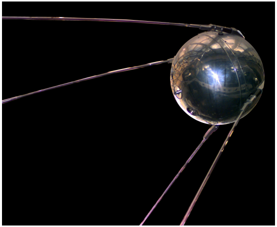
Jusqu'au vingtième siècle, l'enseignement de la géométrie a été en grande partie basé sur les *Eléments*.

Mais :

"Un point est ce dont il n'y a aucune partie."

"Une ligne est une longueur sans largeur."

Pourquoi et comment cet enseignement a-t-il évolué ?



En résumant—très outrageusement—en deux points :

- le spoutnik (lancé le 4 octobre 1957);
- JEAN DIEUDONNÉ : “A bas Euclide !”, “Mort aux triangles !”
  (Séminaire de Royaumont, du 23 novembre au 4 décembre 1959, organisé par l’OECE, futur OCDE)

Un excellent exposé :

E. BARBIN and G. MENGHINI, History of teaching geometry. In *Handbook on the History of Mathematics Education* (2014), éds A. KARP et G. SCHUBRING.

Grand rôle de Belges dans les réformes au XXème siècle :

- ▷ WILLY SERVAIS;
- ▷ PAUL LIBOIS;
- ▷ GEORGES et FRÉDÉRIQUE PAPY;
- ▷ ...

📖 G. VANPAEMEL, Belgian contributions to the New Math movement in Europe. Paper presented at 8th STEP[1] Meeting - Corfu (2012).

📖 G. VANPAEMEL, D. DE BOCK et L. VERSCHAFFEL, Willy Servais ... *Losanges* 23(2013), 20–27.

📖 D. DE BOCK et G. VANPAEMEL, A bas Euclide ! *Losanges* 3(2015), 25–35.

[1] Science and Technology in the European Periphery

Axiomatiques de la géométrie plane classique

Tri des notions fondamentales et axiomes, par exemple :

géométrie affine plane	**géométrie euclidienne plane** *ajouter* :
point, droite, rapport de section	distance, (mesure d'angle)
par deux points une seule droite etc.	inégalité triangulaire, égalité si . . .

DAVID HILBERT publie Grundlagen der Geometrie en 1899.

Aujourd'hui dans l'enseignement supérieur :

espace vectoriel réel euclidien.

Remarque. Requiert $\mathbb{R}, +, \cdot$!?

Trois expériences

Projections parallèles et centrales

L'enseignement de la géométrie

Un mot sur la géométrie projective

Les points à l'infini

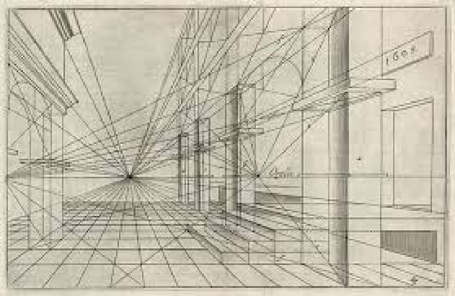
Débuts de la perspective avec

FILIPPO BRUNELLESCHI (1377–1446)

et PAOLO DAL POZZO TOSCANELLI (1397–1482),

puis LEON BATTISTA ALBERTI (1404–1472), ...

PAUL VREDEMAN DE VRIES (1567–1617?)



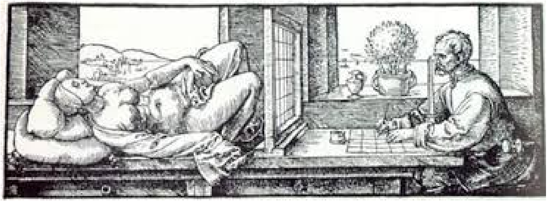
L'image des droites d'une direction donne

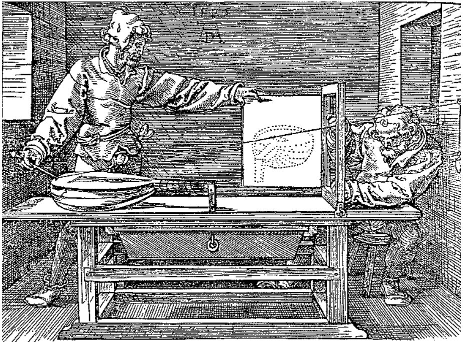
soit des droites d'une direction (par ex., les verticales),

soit des droites concourantes en un point de fuite.

Le dessin résulte bien d'une projection centrale :

ALBRECHT DÜRER (1471–1528)





JEAN-VICTOR PONCELET (1788–1867)

(pendant sa captivité à Saratov en Russie de mars 1813 à juin 1814)

étudie les notions projectives (résistantes aux projections centrales).

Définition (plan projectif)

Le plan projectif s'obtient à partir du plan (affin) en

- ajoutant un nouveau point par direction de droites
  (un tel point est commun à toutes les droites de la direction),
- décidant que les nouveaux points forment une nouvelle droite.

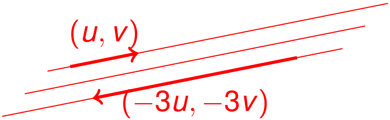
(on oublie la distinction entre les anciens et nouveaux points !)

Ce n'est pas la définition la plus élégante mathématiquement.

📖 J. GRAY, *Worlds Out of Nothing: a course in the history of geometry in the 19th century* (2007).

Coordonnées homogènes

Comment assigner des coordonnées aux points à l'infini ?
et à tous les points ?



u et v ne sont déterminés qu'à un facteur près

Les coordonnées homogènes X, Y et Z du point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ sont définies par

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z},$$

à un facteur près. On écrit $[X, Y, Z]$.

Les coordonnées homogènes du point à l'infini dans la direction du vecteur (u, v) de $\mathbb{R}^2$ sont $[X, Y, 0]$ avec $X = u$ et $Y = v$ à un facteur près.

Donc le point $[X, Y, Z]$ est à l'infini si et seulement si $Z = 0$.

L'équation

$$a\,x + b\,y + c \;=\; 0$$

d'une droite de $\mathbb{R}^2$ devient en coordonnées homogènes

$$a\,X + b\,Y + c\,Z \;=\; 0.$$

L'équation

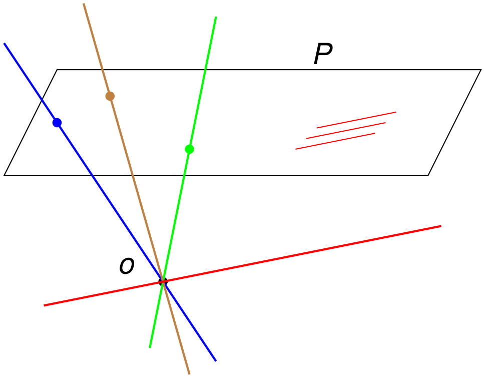
$$Z \;=\; 0$$

est celle de la droite à l'infini.

Vers une autre définition du plan projectif

Plaçons dans l'espace le plan P à compléter,

et choisissons un point o hors de P :



Les points de P à distance finie plus ceux à l'infini

correspondent

aux droites par le point o.

Voici la définition (simplifiée ici) due à Felix Klein vers 1873.

Définition (plan projectif)

Le plan projectif a pour
- "point" une droite de l'espace usuel passant par l'origine o;
- "droite" l'ensemble des "points" contenus dans un plan fixé par o.

Karl von Staudt (1798–1867) et Felix Klein (1849–1925) conçoivent une axiomatique du plan et de l'espace projectifs.

Proposition

Dans le plan projectif,
deux points appartiennent à exactement une droite commune;
deux droites contiennent exactement un point commun.

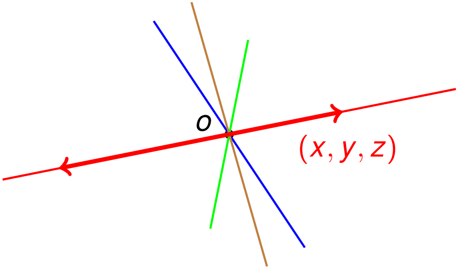
Cet exemple de la dualité point–droite dans le plan projectif
illustre un des intérêts de la géométrie projective.

Remarque. La structure du plan projectif peut être enrichie
(birapport, distance, variété différentiable, etc.).

Coordonnées homogènes, bis

Avec cette nouvelle définition du plan projectif, les coordonnées homogènes s'introduisent plus naturellement.

Soit o l'origine de $\mathbb{R}^3$. Un "point" du plan projectif est une droite par o.



Ce "point" est déterminé par n'importe quel vecteur non nul (x, y, z) sur la droite.

Les coordonnées homogènes du "point" forment le triple $[x, y, z]$, à un facteur près.

Proposition

Pour une permutation des points d'un plan projectif P construit dans l'espace, sont équivalents :

(a) être un produit de projections centrales (utilisant des plans intermédiaires);

(b) conserver les droites (c.-à-d., appliquer toute droite sur une droite);

(c) dans un système de coordonnées, admettre une description analytique de la forme

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

où A, B, $\ldots$, I sont des réels fixés tels que

$$\text{dét} \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \neq 0.$$

Attention ! Cette proposition est formulée pour le plan projectif réel.

L'implication (b) $\implies$ (c) est fausse pour un plan projectif sur un corps admettant des automorphismes non identiques.

Exemple

Dans le plan projectif complexe,

la permutation de l'ensemble des points

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{pmatrix}$$

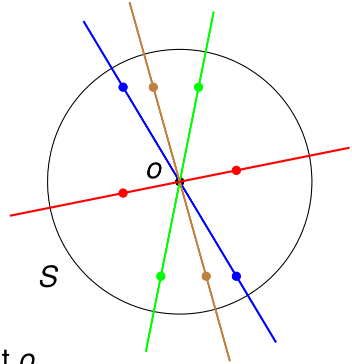
applique toute droite sur une droite.

Il y a bien sûr des espaces projectifs de toute dimension

sur un corps quelconque.

Encore une autre vision du plan projectif

Prenons dans l'espace une sphère S de centre o :



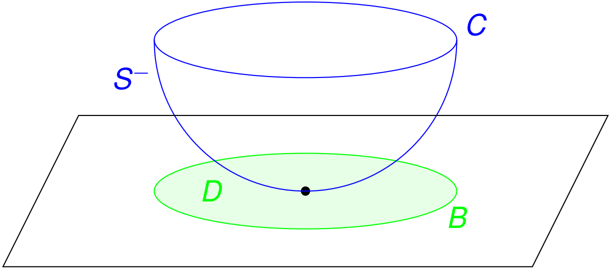
les droites par le point o
correspondent
aux paires de points antipodaux de la sphère S.

Le plan projectif s'obtient à partir de la sphère S
en identifiant chaque point de S avec son point antipodal;
les droites projectives proviennent des grands cercles.

Et une dernière vision du plan projectif

De la sphère S, ne gardons que l'hémisphère "sud" S^-,
bordé par le grand cercle horizontal C,
avec toujours identification des points antipodaux de C.

Projetons perpendiculairement S^-
sur le disque D du plan tangent au "pôle sud" :



Topologiquement, le plan projectif s'obtient à partir du disque D
en identifiant chaque point du bord B de D avec son point opposé.

Trois expériences

Projections parallèles et centrales

L'enseignement de la géométrie

Un mot sur la géométrie projective

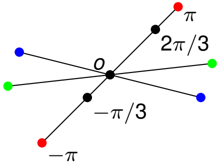
Un tour diffère de deux tours

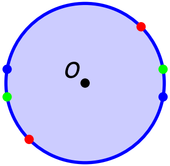
Un tour diffère de deux tours

Travaillons dans l'espace usuel,   avec un point origine *o* fixé :

- toute position de la main est image d'une position initiale par un déplacement[2] fixant *o*;
- une rotation autour d'une droite par *o* est un déplacement fixant *o*,   et réciproquement (EULER, 1776).

Représentons les deux rotations d'angle $\pm\alpha$ par les deux points à distance α de *o* sur l'axe de la rotation (ici $0 \leq \alpha \leq \pi$) :





(à voir en 3D)

Attention :   il faut identifier les deux points de l'axe à distance π de *o* !

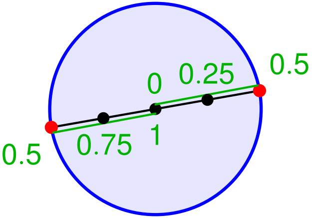
[2]permutation des points de l'espace conservant les distances et l'orientation

Faire un tour, c'est réaliser les rotations d'angles

$$t \cdot 2\pi, \quad \text{pour } t \text{ de } 0 \text{ à } 1,$$

ou mieux

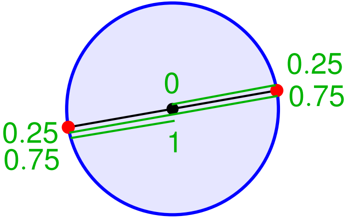
$$\begin{cases} t \cdot 2\pi, & \text{pour } t \text{ de } 0 \text{ à } 0.5, \\ (t-1) \cdot 2\pi, & \text{pour } t \text{ de } 0.5 \text{ à } 1 \end{cases}$$



c.-à-d. parcourir une fois la "droite".

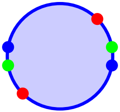
faire deux tours, c'est réaliser les rotations d'angles

$$t \cdot 4\pi, \quad \text{pour } t \text{ de } 0 \text{ à } 1$$



c.-à-d. parcourir deux fois la "droite".

Expliquons la "droite" et la différence entre un et deux tours, mais en dimension 2 plutôt que 3.



Le disque, après identification des points opposés de son bord,
est topologiquement un plan projectif.

De plus, la "droite" s'identifie à une droite de ce plan projectif.

Par lacet, nous entendons un chemin (continu) dans le plan projectif, qui commence et se termine au même point base, ici l'identité.
Nous déformons les lacets en maintenant fixes leurs extrémités.

A montrer : dans le plan projectif,

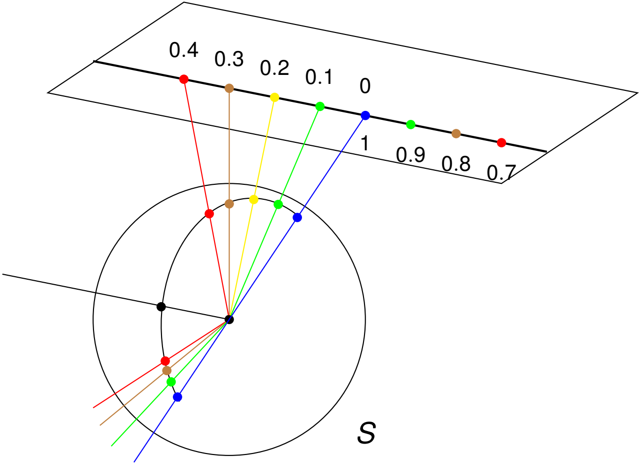
- parcourir une fois une droite donne un lacet
  qui ne peut pas être ramené continûment au lacet constant;
- parcourir deux fois une droite donne un lacet
  qui se ramenène continûment au lacet constant.

Travaillons dans

le plan projectif obtenu à partir d'une sphère S,

après identification des paires de points antipodaux.

Dans le plan projectif, parcourir une fois une droite donne un lacet γ qui ne peut pas être ramené continûment au lacet constant :



En effet, γ se relève sur S en un chemin d'extrémités distinctes.

Dans le plan projectif, parcourir deux fois une droite donne un lacet qui peut être ramené continûment au lacet constant.

En effet, le lacet relevé sur la sphère est cette fois le parcours d'un grand cercle.

Un tel lacet se ramène continûment à un point.

Pour rendre rigoureux les arguments ci-dessus, il faut introduire les notions de "chemins", "homotopie entre chemins", "recouvrement d'un espace topologique", etc.

- E.D. BOLKER, The spinor spanner. *The American Mathematical Monthly* 80(1973), 997–984,
- A. JURISIC, The Mercedes knot problem. *The American Mathematical Monthly* 103(1996), 756–770

Le groupe des déplacements de l'espace (tridimensionnel) fixant o
est appelé le groupe spécial orthogonal $SO(3)$
(ses éléments sont représentés dans une base orthonormée
par les matrices orthogonales 3×3).

Nous avons vu que ce groupe $SO(3)$ est 'topologiquement'
un espace projectif tridimensionnel,
doublement recouvert par la sphère de dimension topologique 3.

Cette sphère peut-elle être munie d'une structure de groupe,
de sorte que le recouvrement soit un homorphisme de groupes ?

La réponse est affirmative : nous allons montrer que
le groupe $SU(2)$ recouvre doublement le groupe $SO(3)$.

Ce recouvrement joue un rôle important en physique.

Le groupe $SU(2)$

Le plan hermitien usuel est le plan vectoriel complexe $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, +, \cdot$ ou $\mathbb{C}^2$ muni du produit hermitien usuel

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \;:\quad \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix}\right) \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^t \overline{\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix}} = u\,\overline{w} + v\,\overline{t}.$$

Le groupe unitaire $U(2)$ est constitué des opérateurs linéaires $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tels que

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix};$$

ces opérateurs unitaires forment un groupe de permutations.

Le groupe spécial unitaire $SU(2)$ est le sous-groupe de $U(2)$ constitué des éléments de déterminant 1.

Les matrices unitaires

Dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$, soit M la matrice de l'opérateur linéaire $f\ :\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Ainsi

$$f \ : \quad \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \ : \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

L'opérateur linéaire f est unitaire (dans $U(2)$) si et seulement si

$$\left(M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)^t \ \overline{M\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix}} \quad = \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^t \ \overline{\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix}},$$

si et seulement si

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \ M^t \ \overline{M} \begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{t} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{t} \end{pmatrix},$$

si et seulement si

$$M^t \ \overline{M} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si et seulement si les colonnes de M sont orthornormées (pour le produit hermitien usuel).

Une telle matrice est dite unitaire.

La matrice complexe $M = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ a ses colonnes

- orthogonales si elle est de l'une des formes

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\alpha\overline{v} & \frac{1}{\overline{\alpha}}\,\overline{u} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & t \\ w & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} w & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & t \end{pmatrix};$$

- orthogonales et équinormées ssi elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -e^{i\phi}\,\overline{v} & e^{i\phi}\,\overline{u} \end{pmatrix};$$

- orthogonales et de norme 1 (M unitaire) ssi elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -e^{i\phi}\,\overline{v} & e^{i\phi}\,\overline{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } |u|^2 + |v|^2 = 1.$$

Elle est spécial unitaire ssi de la forme

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } |u|^2 + |v|^2 = 1.$$

L'ensemble des matrices complexes

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}, \qquad\qquad u, v \in \mathbb{C}$$

- est un sous-groupe additif du groupe $\mathbb{C}^{2\times 2}, +$;
- est stable pour la multiplication matricielle;
- contient $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- après retrait de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, est stable pour le passage à l'inverse.

Théorème

Avec l'addition et la multiplication matricielles,

l'ensemble des matrices complexes

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}, \qquad\qquad u, v \in \mathbb{C}$$

est un corps.

Dans la matrice
$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}, \qquad u, v \in \mathbb{C},$$
écrivons $u = a + b\,i$ et $v = c + d\,i$, avec a, b, c et d réels. Il vient
$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b\,i & c + d\,i \\ -c + d\,i & a - b\,i \end{pmatrix} =$$
$$a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{1}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}}$$

Les quatre matrices complexes $\mathbf{1}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ et satisfont
$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{I}\,\mathbf{J}\,\mathbf{K} = -\mathbf{1}.$$
Avec la distributivité, ces dernières équations déterminent le produit.

Définition

Les éléments du corps obtenu sont appelés quaternions et notés
$$q = a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{I} + c\,\mathbf{J} + d\,\mathbf{K}.$$

Le corps des quaternions

Définition

Le corps $\mathbb{H}$ des quaternions est l'ensemble des matrices 2×2 complexes

$$q \quad = \quad a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{I} + c\,\mathbf{J} + d\,\mathbf{K}, \qquad \text{où } a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}.$$

Le quaternion q est pur si $a = 0$ et réel si $b = c = d = 0$.

La norme de q est $|q| \;=\; \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

La trace de q est $\mathrm{Tr}(q) \;=\; 2\,a$.

Le conjugué de q est $\overline{q} \;=\; a\,\mathbf{1} - b\,\mathbf{I} - c\,\mathbf{J} - d\,\mathbf{K}$.

Lemme

$$q\,\overline{q} \;=\; |q|^2 \qquad \text{et} \qquad q + \overline{q} \;=\; \mathrm{Tr}(q).$$

Si $q' \;=\; a'\,\mathbf{1} + b'\,\mathbf{I} + c'\,\mathbf{J} + d'\,\mathbf{K}$, où $a',\ b',\ c',\ d' \in \mathbb{R}$, il vient

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(q\,\overline{q'}) \;=\; a\,a' + b\,b' + c\,c' + d\,d'$$

(le produit scalaire usuel des vecteurs (a, b, c, d) et (a', b', c', d')).

Petit rappel. Notre but est d'exhiber

un recouvrement double de $SO(3)$ par $SU(2)$.

Nous avons vu que les matrices unitaires

(celles qui représentent un élément de $SU(2)$)

sont de la forme

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{I} + c\,\mathbf{J} + d\,\mathbf{K}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |u|^2 + |v|^2 = 1, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Ce sont donc exactement les quaternions de norme 1 : retenons

$$SU(2) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}.$$

Mais où se cache $SO(3)$?

Nous avons un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{H}$ (de dim. 4).

Définition

A chaque quaternion q non nul associons l'application

$$\sigma_q \ : \quad \mathbb{H} \to \mathbb{H} \ : \quad x \mapsto q\,x\,q^{-1}.$$

Remarque. L'inverse du quaternion non nul q est $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\,\overline{q}$.

Proposition

L'application σ_q est une isométrie centrée de $\mathbb{H}$,
et même un déplacement (elle respecte l'orientation spatiale).

De plus, σ_q fixe chaque quaternion réel;
elle stabilise donc l'ensemble des quaternions purs.

Deux quaternions non nuls q et q' donnent $\sigma_q = \sigma_{q'}$
si et seulement si $q = \lambda\, q'$ pour un quaternion réel λ.

Le groupe $SU(2)$ recouvre doublem.t le groupe $SO(3)$

Considérons les applications σ_q seulement pour $|q| = 1$,
en les restreignant à l'ensemble $\mathbb{H}_p$ des quaternions purs.
Soit τ_q cette restriction : $\tau_q(x) = q\,x\,\overline{q}$, où $x \in \mathbb{H}_p$.

Proposition

Pour $|q| = 1$, l'application τ_q est un déplacement centré de l'espace euclidien centré $\mathbb{H}_p$.

Chaque déplacement centré de $\mathbb{H}_p$ est ainsi obtenu.

Pour $|q| = |q'| = 1$, les deux déplacements centrés τ_q et $\tau_{q'}$ sont identiques ssi $q = \pm q'$.

Pour les preuves, voir par exemple
GALLIER, *Geometric Methods and Applications* (2011).

Donc τ_q est une rotation. Elle fixe $b\,\mathbf{I} + c\,\mathbf{J} + d\,\mathbf{K}$ (la partie pure de q).

Son angle θ est donné par $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \dfrac{|q|}{|a|}$.

A chaque quaternion q de norme 1, nous avons associé l'application

$$\tau_q \;:\; \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}_p \;:\; x \mapsto q\,x\,q^{-1},$$

qui est une rotation de l'espace euclidien $\mathbb{H}_p$ fixant o.

Proposition

L'application

$$f \;:\; SU(2) \to SO(3) \;:\; q \mapsto \tau_q$$

est un homomorphisme surjectif de groupes, de noyau $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$.

L'application f est celle que nous avons déjà rencontrée,

d'une sphère de dimension topologique 3

vers l'espace projectif tridimensionnel

(identification de chaque point de la sphère à son antipode).

L'application f est continue,

de par la définition de la topologie de l'espace projectif

(par exemple : la plus grande topologie qui rende f continue).

Trois expériences

Projections parallèles et centrales

L'enseignement de la géométrie

Un mot sur la géométrie projective

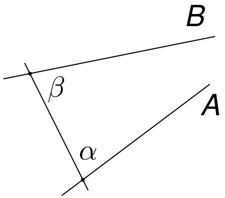
Un tour diffère de deux tours

Le groupe $SU(2)$ recouvre doublement le groupe $SO(3)$

Deux mots sur les géométries non-euclidiennes

La longue histoire du cinquième postulat d'EUCLIDE

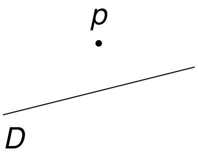
Enoncé original :



si $\alpha + \beta < 180°$,

alors les droites *A* et *B* se coupent.

Formulation équivalente due à JOHN PLAYFAIR (1748–1819) :



par un point *p* extérieur à une droite *D* passe exactement une droite parallèle à la droite donnée.

Le cinquième postulat se déduit-il des autres hypothèses ?

Beaucoup d'essais de preuve de la réponse positive, par l'absurde : en niant le cinquième postulat, on cherche à déduire une absurdité.

Par exemple, GIOVANNI SACCHERI (1667–1733) conclut par

> "…car cela répugne à la nature de la ligne droite."

Implicitement, on étudie une géométrie non-euclidienne. Ensuite

CARL FRIEDRICH GAUSS	(vers 1817, sans oser publier),
JÁNOS BOLYAI	(en 1823, publié en 1825),
NIKOLAI LOBACHEVSKI	(en 1823, publié en 1829)

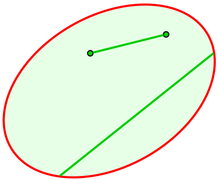
développent une telle géométrie.

EUGENIO BELTRAMI (en 1868) et FELIX KLEIN (en 1871) :
l'existence du plan euclidien implique celle du plan non-euclidien, et réciproquement.

Modèle de KLEIN

Définissons les

"points" comme étant les points à l'intérieur d'une ellipse fixée,



"segments" comme les segments usuels,

"droites" comme les restrictions non vides des droites usuelles.

La condition de PLAYFAIR n'est pas satisfaite.

Remarque. Il faut encore définir une distance, la mesure d'angles, etc.

Une autre géométrie non-euclidienne

En 1854, BERNHARD RIEMANN conçoit une géométrie sans droites parallèles

(elle ne satisfait donc pas la condition de PLAYFAIR).

Sur la sphère, nous avons des segments et des grands cercles.

Deux points p et q déterminent un unique segment et un unique grand cercle…

… sauf si p et q sont diamétralement opposés.

Appelons “point” une paire de points opposés sur la sphère et “droite” l'ensemble de ces paires sur un grand cercle fixé.

“Points” et “droites” forment un plan projectif.

Nous avons en plus une distance.

Il en résulte une autre géométrie non-euclidienne (sans droites parallèles).

Implications philosophiques et pédagogiques

Baser l'enseignement sur l'observation du monde physique est ...
... risqué.

POINCARÉ (1854–1912) : “Une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre, elle peut simplement être plus commode.”

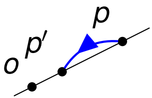
Des physiciens introduisent ensuite d'autres notions d'espace :

- ▷ relativité restreinte, avec 4 dimensions (ALBERT EINSTEIN, 1905);
- ▷ relativité générale, avec 4 dimensions(ALBERT EINSTEIN, 1915);
- ▷ espace des cordes vibrantes (10 ou 11 dimensions, YOICHIRO NAMBU, HOLGER NIELSEN et LEONARD SUSSKIND, 1970, puis MICHAEL B. GREEN, JOHN H. SCHWARZ, etc.);
- ▷ espace des membranes vibrantes (EDWARD WITTEN, 1995);
- ▷ etc.

L. MLODINOW,
Euclid's Window: the story of geometry from parallel lines to hyperspace.
Free Press, 2001; Penguin, 2002.

Les inversions et la géométrie conforme

Soit o un point du plan euclidien et k un réel strictement positif.



$$|op| \cdot |op'| = k$$

Définition (inversion)

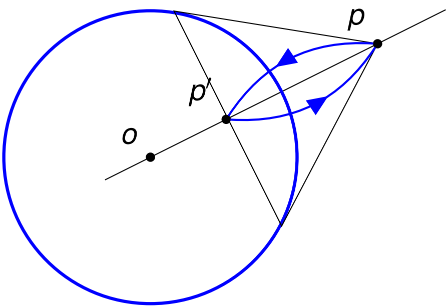
L'inversion de pôle o et de puissance k (avec $k > 0$) envoie tout point p distinct de o sur le point p' tel que

- o, p et p' sont alignés,
- $|op| \cdot |op'| = k$,
- p et p' sont du même côté de o.

Cette inversion envoie donc p' sur p (elle est involutive), et fixe les points à distance $\sqrt{k}$ du point o.

Il est naturel d'ajouter un unique point au plan euclidien, noté ∞, et de décider que l'inversion échange o et ce point.

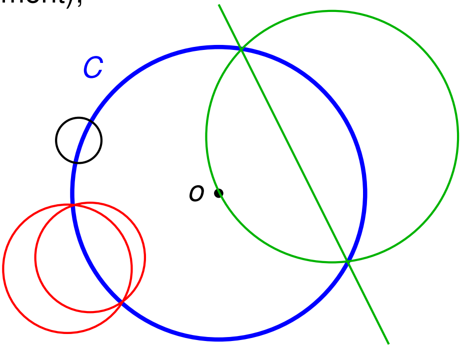
Toute inversion du plan euclidien complété (par le point ∞) est déterminée par son cercle de points fixes.



Le point ∞ appartient à chaque droite complétée, mais à aucun cercle.

L'inversion de cercle C de points fixes et pôle o envoie

- ▷ toute droite complétée contenant o sur une droite complétée contenant o;
- ▷ toute droite complétée évitant o sur un cercle par o (et réciproquement);



- ▷ tout cercle évitant o sur un cercle évitant o;
- ▷ renverse l'orientation du plan;
- ▷ respecte les |mesures| d'angles entre droites/cercles.

Appelons cycle un cercle ou (une droite complétée par ∞).

Par rapport aux inversions, les notions de géométrie $_{\text{planes}}$ sont

non résistantes	résistantes
droite cercle	‘cycle’
segment de droite	‘arc de cycle’
	$\lvert$mesures$\rvert$ d’angle

Les notions résistantes sont dites conformes.

Définition (plan conforme)

Le plan conforme est le plan euclidien complété par le point ∞, structuré par l’ensemble des cycles.

On oublie la distinction entre les anciens points et le nouveau point.

On peut aussi ajouter la mesure d’angle.

Et le miroir ?

L'image dans un miroir échange gauche et droite,

mais pas haut et bas. Pourquoi ?

Dans l'explication, distinguer objets 2D et objets 3D

et tenir compte des effets psychologiques.

Voir

BURKARD POLSTER (The Mathologer),

“Why do mirrors flip left and right but not up and down?”

`https://www.youtube.com/watch?v=o_D-HsMOYQ8`

Conclusions

Nombreuses géométries :

- euclidienne;
- affine;
- projective;
- non-euclidiennes;
- conforme;
- relativité restreinte (4 dimensions);
- relativité générale (4 dimensions);
- espace des cordes, espace des membranes;
- etc.

Merci de votre intérêt !