Le LIVRE des maths existe-t-il?

Carole Muller

Université Libre de Bruxelles

Brussels Summer School of Mathematics 2018

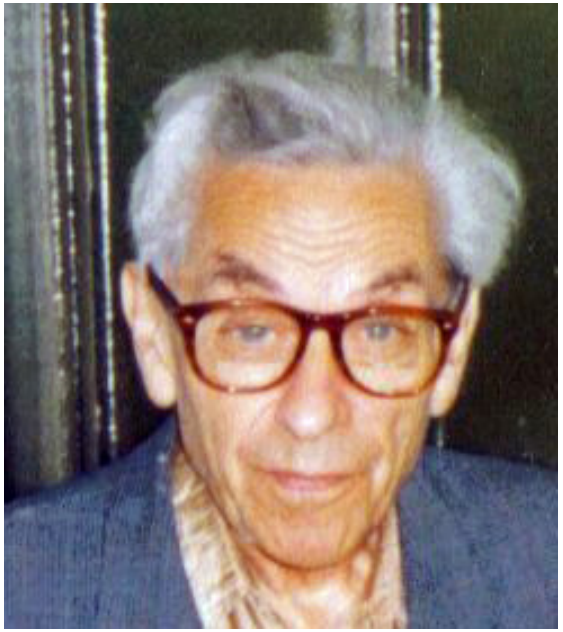
Ceci existe-t-il ?

- $\sqrt{2}$
- Axiome du choix
- Hypothèse du continu
- Dieu
- Le LIVRE des maths

Le LIVRE des maths - qu'est-ce que c'est ?

Le LIVRE des maths - qu'est-ce que c'est ?

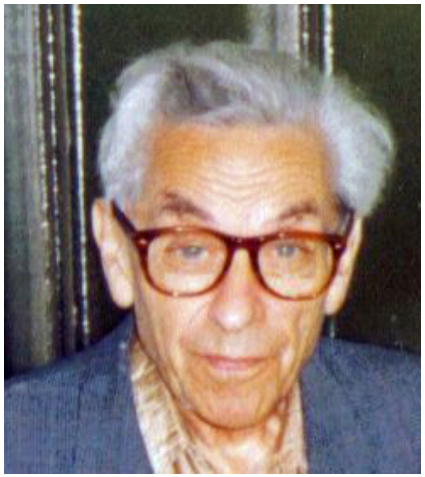
Le LIVRE des maths - qu'est-ce que c'est ?



Le LIVRE des maths - qu'est-ce que c'est ?

Critères du LIVRE

- Compréhensibilité
- Elégance
- Longueur
- Originalité



P. Erdős

You don't have to believe in God,
but you should believe in the BOOK.

Paul Erdős, qui est-il ?

- Né le 26 mars 1913 à Budapest
- Hongrois
- (Co-)auteur de 1475 publications scientifiques
- 511 co-auteurs
- Décédé le 20 septembre 1996 à Varsovie

Le vocabulaire d'Erdős

epsilon	enfant
boss	femme
slave	homme

Le vocabulaire d'Erdős

epsilon	enfant
boss	femme
slave	homme
captured	marrié
liberated	divorcé

Le vocabulaire d'Erdős

epsilon	enfant
boss	femme
slave	homme
captured	marrié
liberated	divorcé
arrive	naître
die	arrêter de faire des mathématiques
preach	donner un cours de maths
leave	mourir

Le vocabulaire d'Erdős

epsilon	enfant
boss	femme
slave	homme
captured	marrié
liberated	divorcé
arrive	naître
die	arrêter de faire des mathématiques
preach	donner un cours de maths
leave	mourir
noise	musique
poison	alcool

Le vocabulaire d'Erdős

epsilon	enfant
boss	femme
slave	homme
captured	marrié
liberated	divorcé
arrive	naître
die	arrêter de faire des mathématiques
preach	donner un cours de maths
leave	mourir
noise	musique
poison	alcool
Sam	Etats-Unis
Joe	Union soviétique

Le vocabulaire d'Erdős

epsilon	enfant
boss	femme
slave	homme
captured	marrié
liberated	divorcé
arrive	naître
die	arrêter de faire des mathématiques
preach	donner un cours de maths
leave	mourir
noise	musique
poison	alcool
Sam	Etats-Unis
Joe	Union soviétique
Supreme Fascist (SF)	dieu

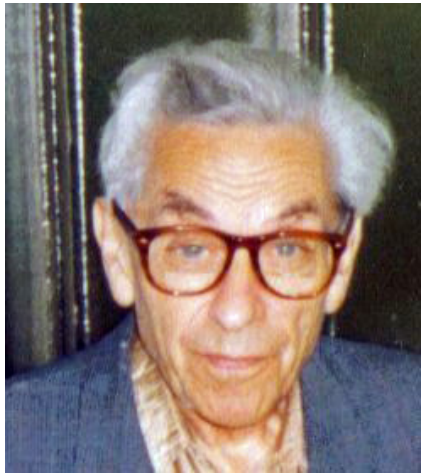
Le nombre d'Erdős

https://www.oakland.edu/enp/ https://files.oakland.edu/users/grossman/enp/Erdos0.html

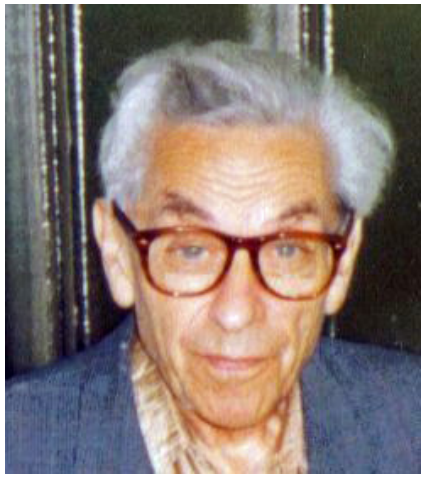
- Erdős : 0
- Collaborateurs d'Erdős : 1
- Collaborateurs des collaborateurs : 2
- ...
- Sans publication ou sans connexion : ∞

Proofs from THE BOOK

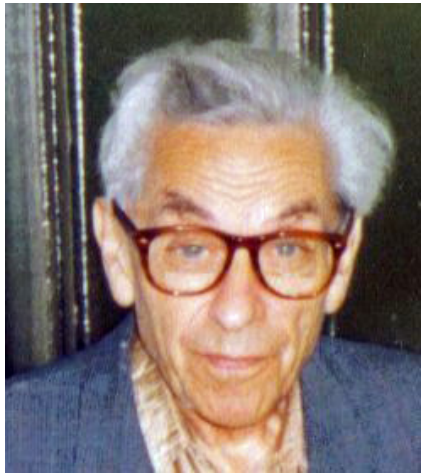
Proofs from THE BOOK

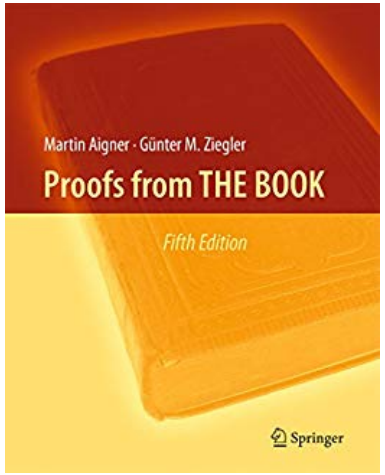


Proofs from THE BOOK



Proofs from THE BOOK





Proofs from THE BOOK - fun facts

- Auteurs : Martin Aigner et Günter M. Ziegler
- Première édition (en anglais) : 1998
- 5 domaines abordés : théorie des nombres, géométrie, analyse, combinatoire, théorie des graphes
- 32 chapitres (44 dans la 6e édition)
- 326 pages (6e édition)
- 2018 Leroy P. Steele Prize
- Version française : *Raisonnements divins*

Les problèmes du jour

Une infinité de nombres premiers

Comment surveiller les galleries d'art ?

Sylvester-Gallai...

... via Euler

Un problème ouvert intéressant

Section 1

Une infinité de nombres premiers

Une infinité de nombres premiers

Définition

Un nombre $p \in \mathbb{N}$ est *premier* s'il a exactement deux diviseurs, à savoir 1 et lui-même.

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Une infinité de nombres premiers

Définition

Un nombre $p \in \mathbb{N}$ est *premier* s'il a exactement deux diviseurs, à savoir 1 et lui-même.
On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Théorème

Il existe une infinité de nombres premiers.

Une infinité de nombres premiers

Définition

Un nombre $p \in \mathbb{N}$ est *premier* s'il a exactement deux diviseurs, à savoir 1 et lui-même.
On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Théorème

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration d'Euclide.

Voir tableau. $\square$

Une infinité de nombres premiers

D'autres preuves utilisent entre autre

- les nombres de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$;
- les nombres de Mersenne $2^p - 1$ (où p est premier) et le théorème de Lagrange ;
- la fonction $\phi(x) = |\{p \leq x \mid p \in \mathbb{P}\}|$ et des logarithmes ;
- la topologie.

La 6e preuve de PFTB

Soit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la séquence des nombres premiers en ordre croissant.

Théorème

La série $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

La 6e preuve de PFTB

Soit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la séquence des nombres premiers en ordre croissant.

Théorème

La série $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Corollaire

Il existe une infinité de nombres premiers.

La 6e preuve de PFTB

Soit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la séquence des nombres premiers en ordre croissant.

Théorème

La série $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Corollaire

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration du théorème due à Erdős.

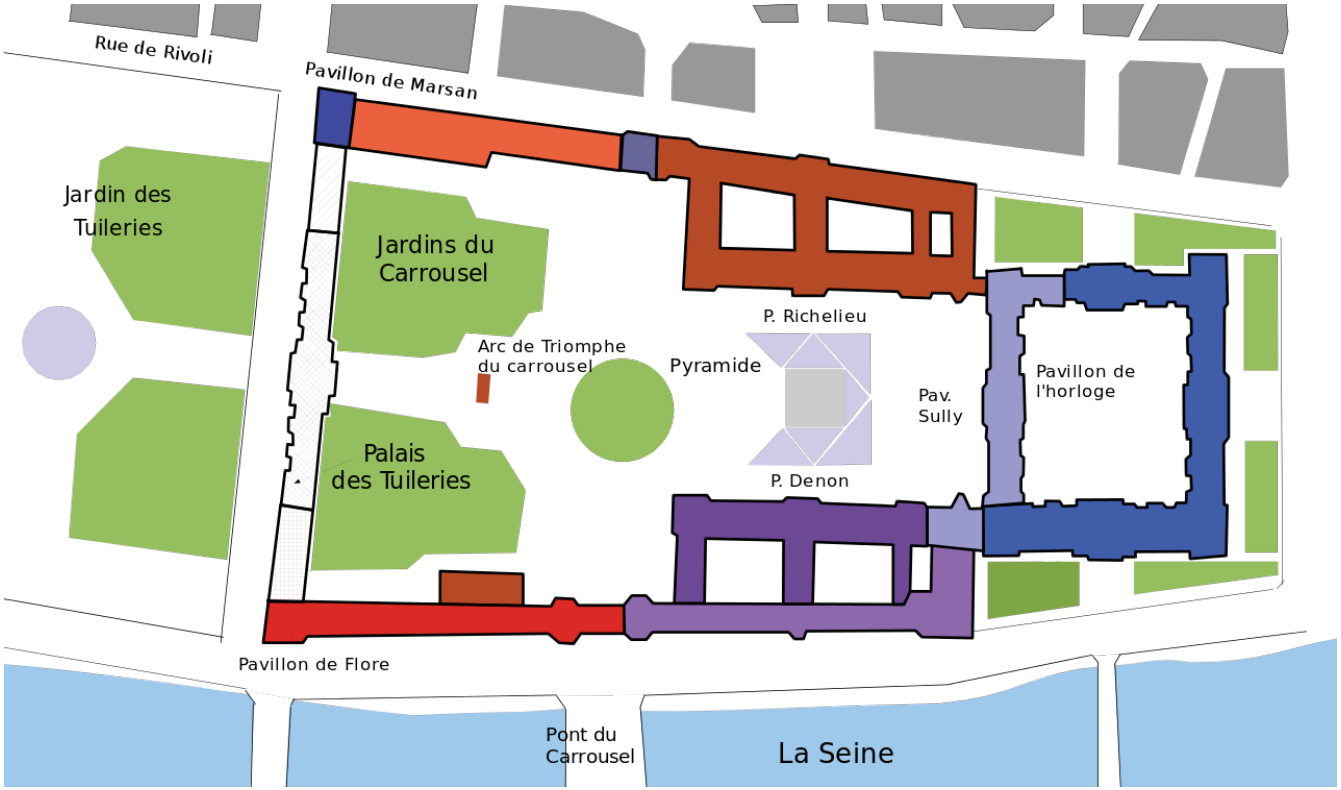
Voir tableau. $\square$

Section 2

Comment surveiller les galleries d'art ?

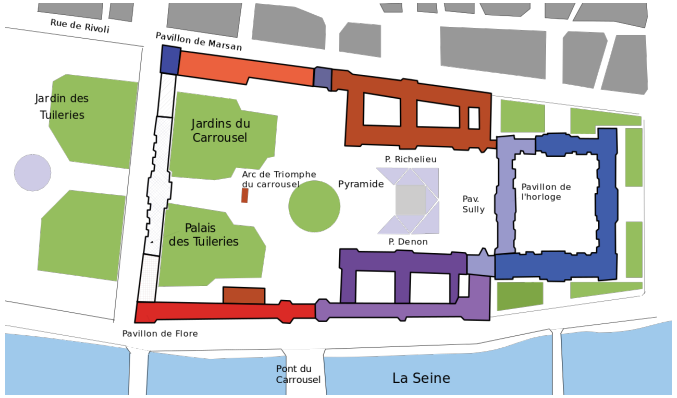
Comment surveiller les galleries d'art ?

Comment surveiller les galleries d'art ?



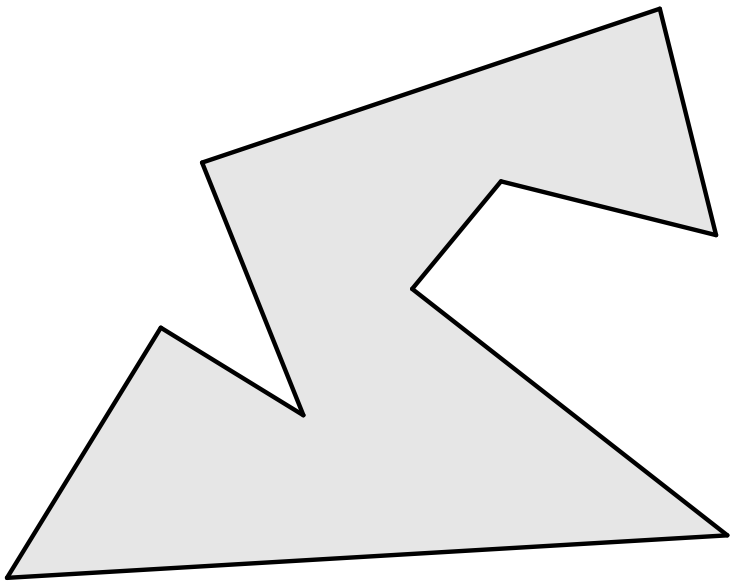
Comment surveiller les galleries d'art ?

Quel est le nombre minimum de gardiens nécessaires pour surveiller le Louvre ?



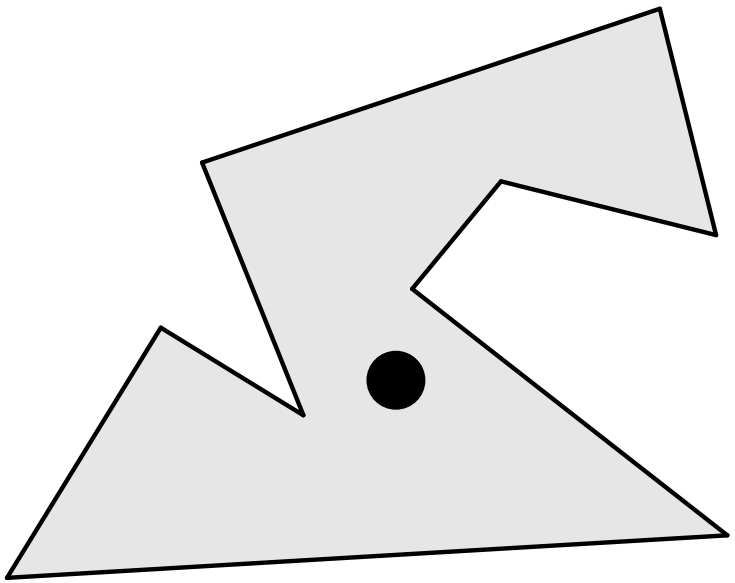
Comment surveiller les galleries d'art ?

- *Gallerie d'art* : polygone en 2 dimensions (sans trou)



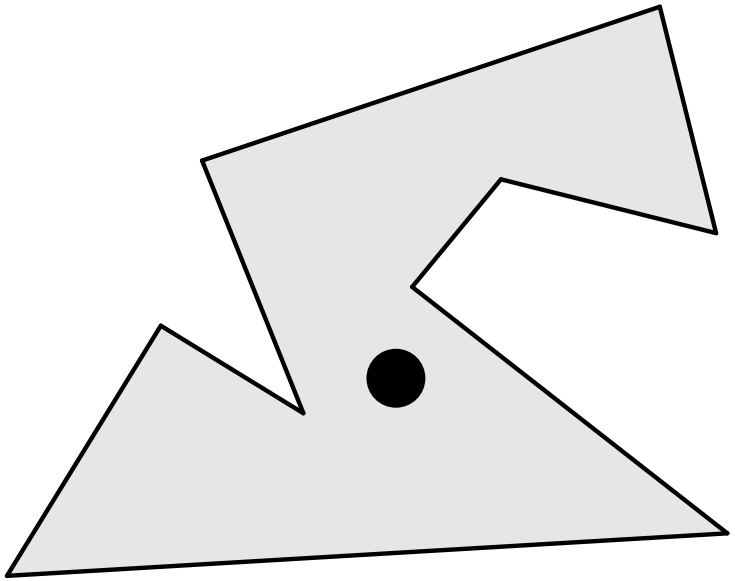
Comment surveiller les galleries d'art ?

- *Gallerie d'art* : polygone en 2 dimensions (sans trou)
- *Gardien* : point à l'intérieur (ou sur le bord) du polygone



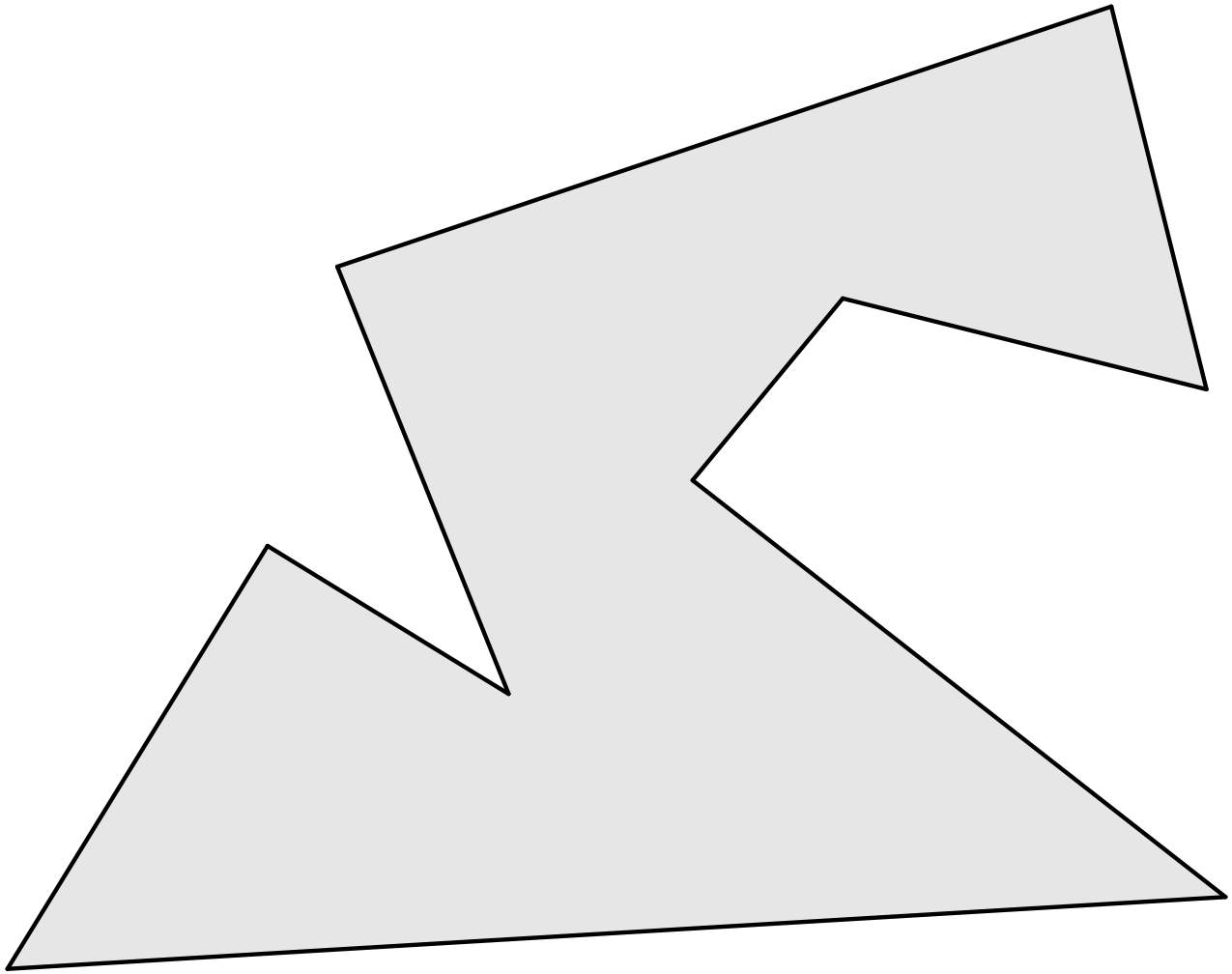
Comment surveiller les galleries d'art ?

- *Gallerie d'art* : polygone en 2 dimensions (sans trou)
- *Gardien* : point à l'intérieur (ou sur le bord) du polygone

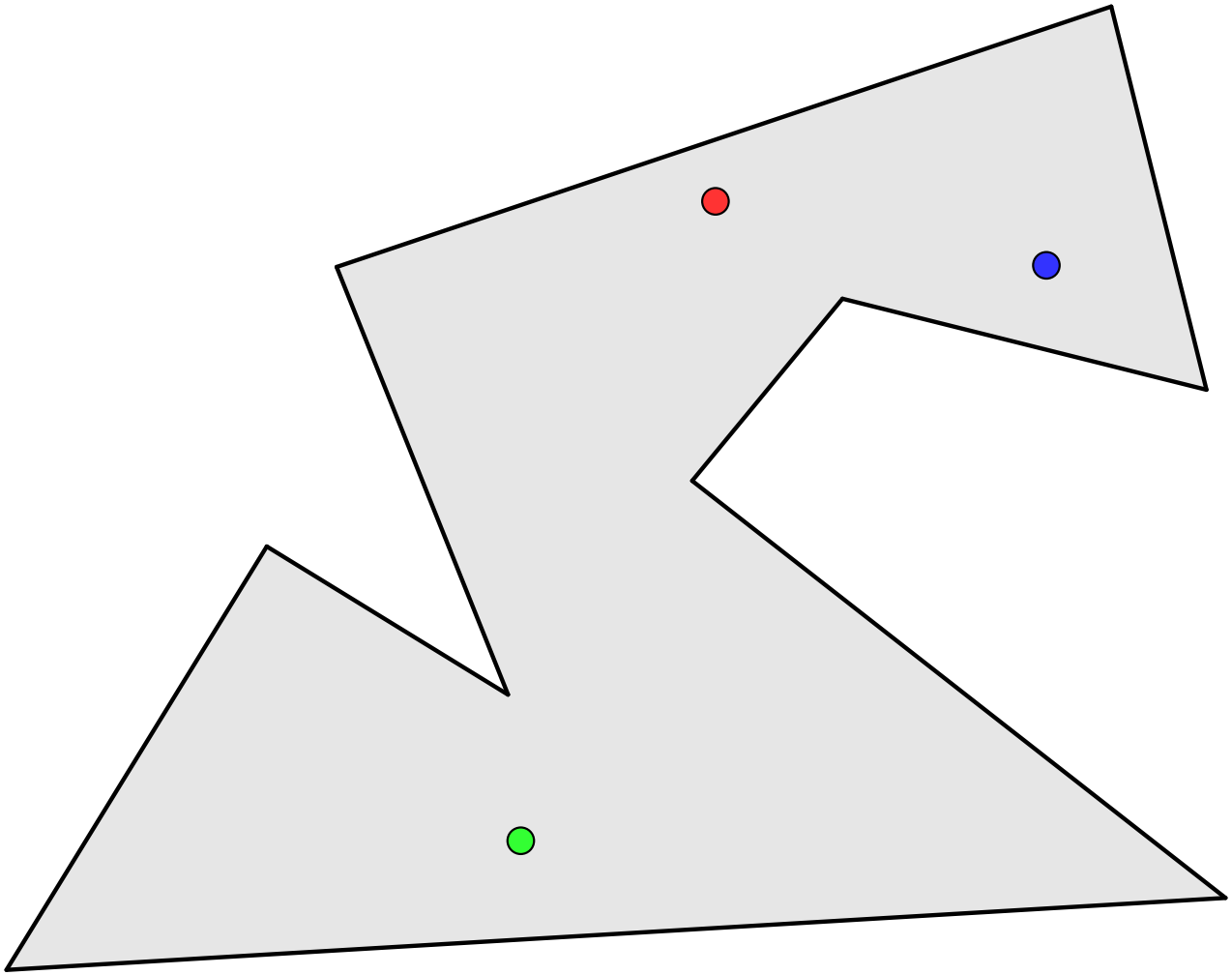


- La gallerie d'art est *gardée* si tout point est visible par au moins un gardien.

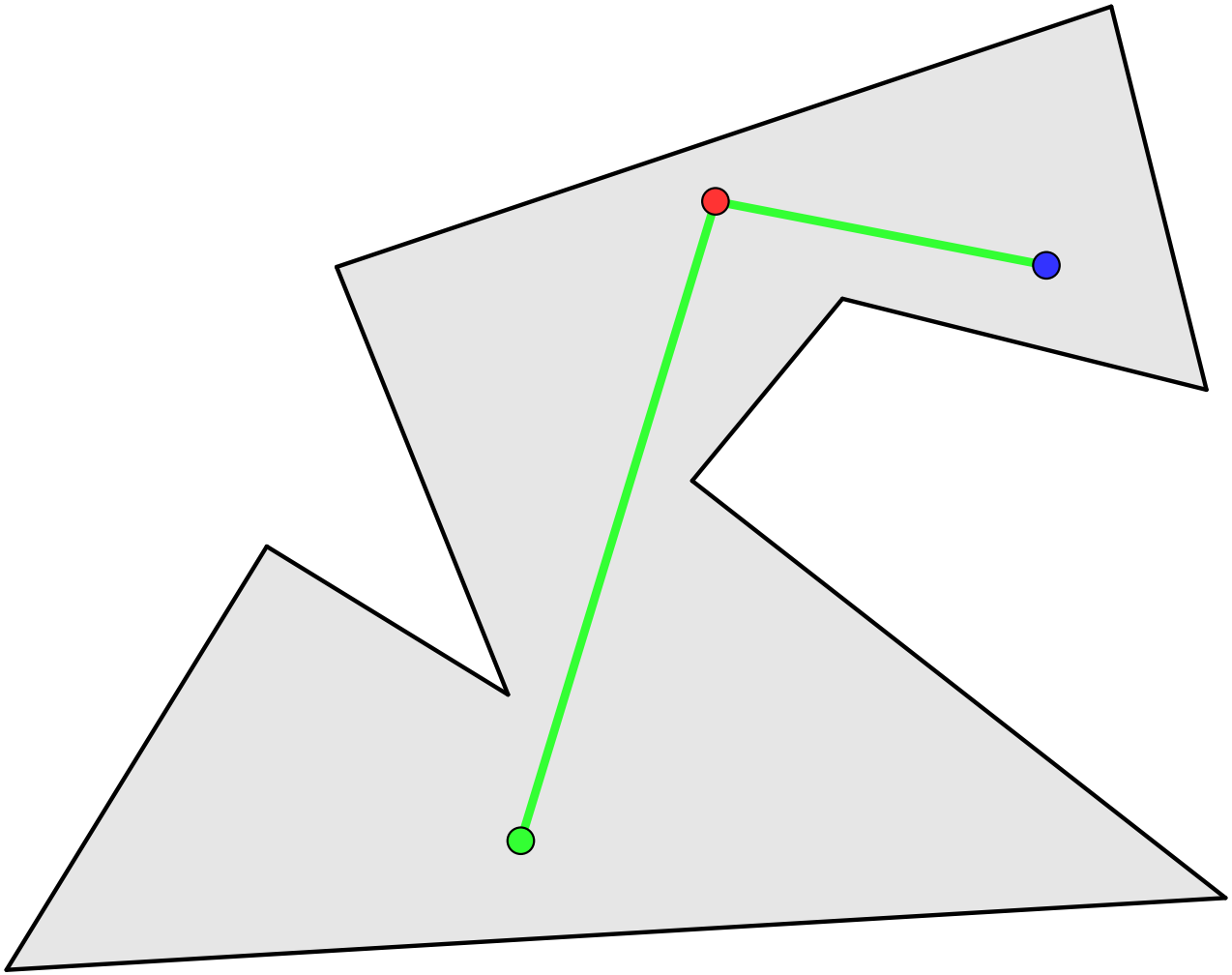
Visibilité des gardiens



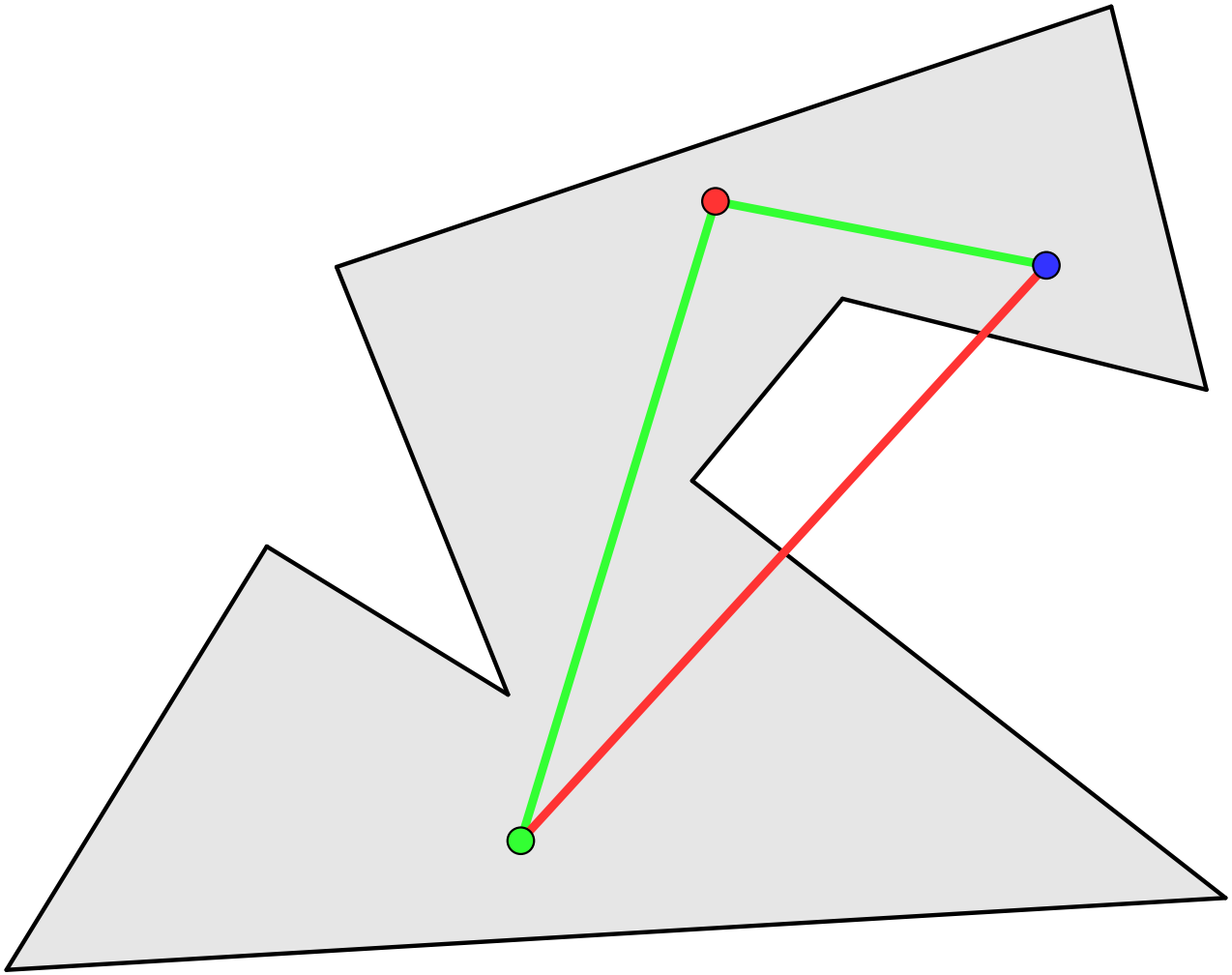
Visibilité des gardiens



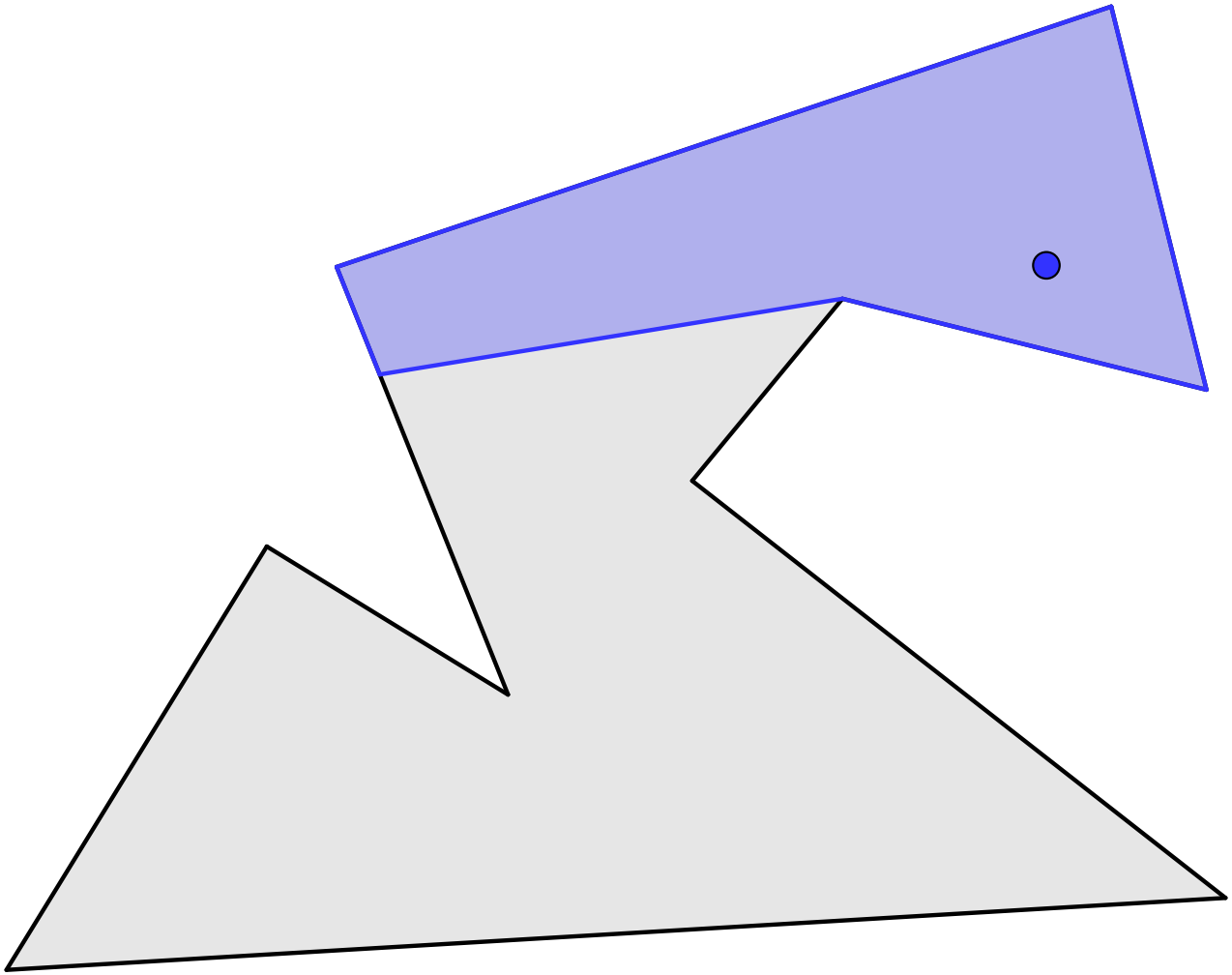
Visibilité des gardiens



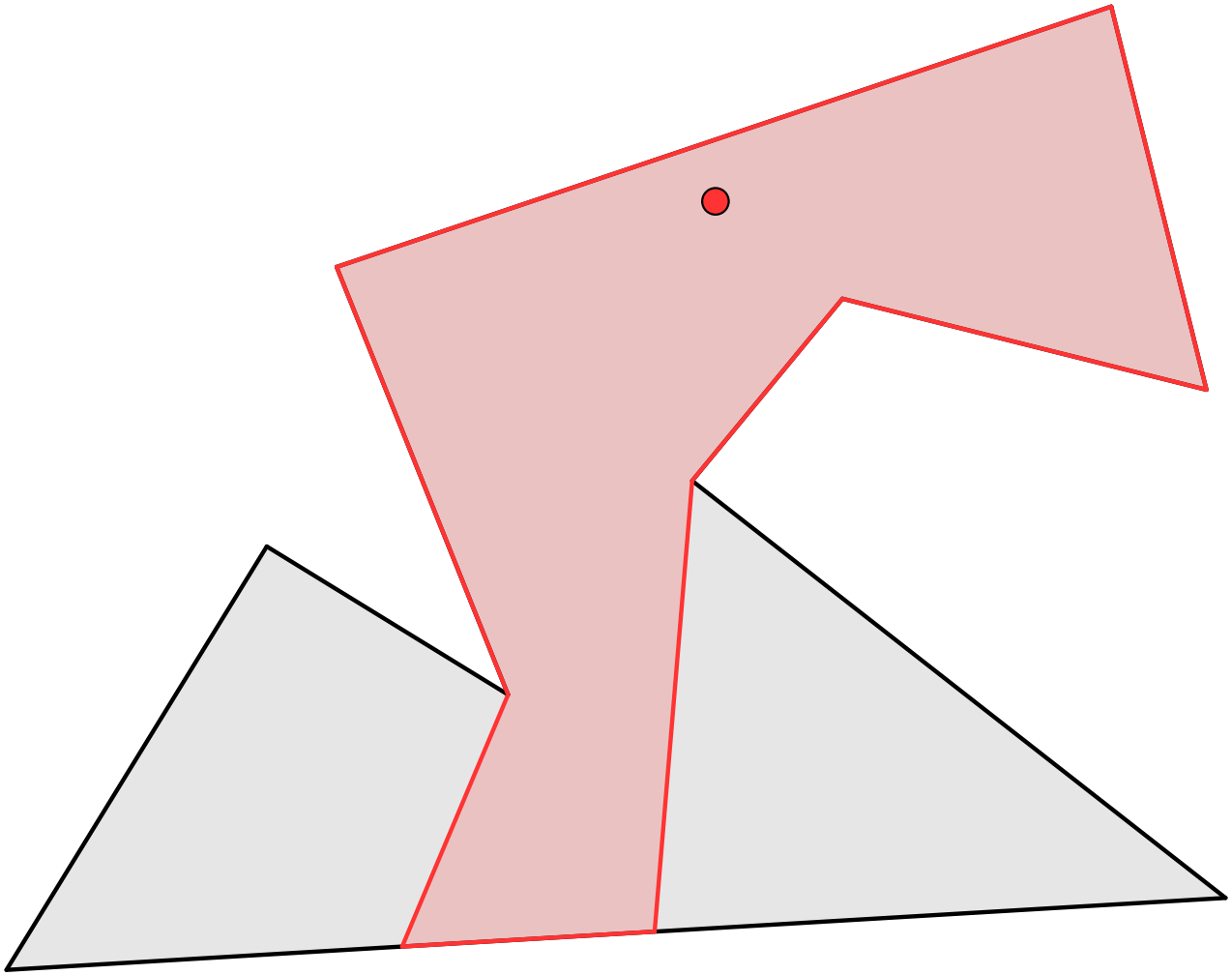
Visibilité des gardiens



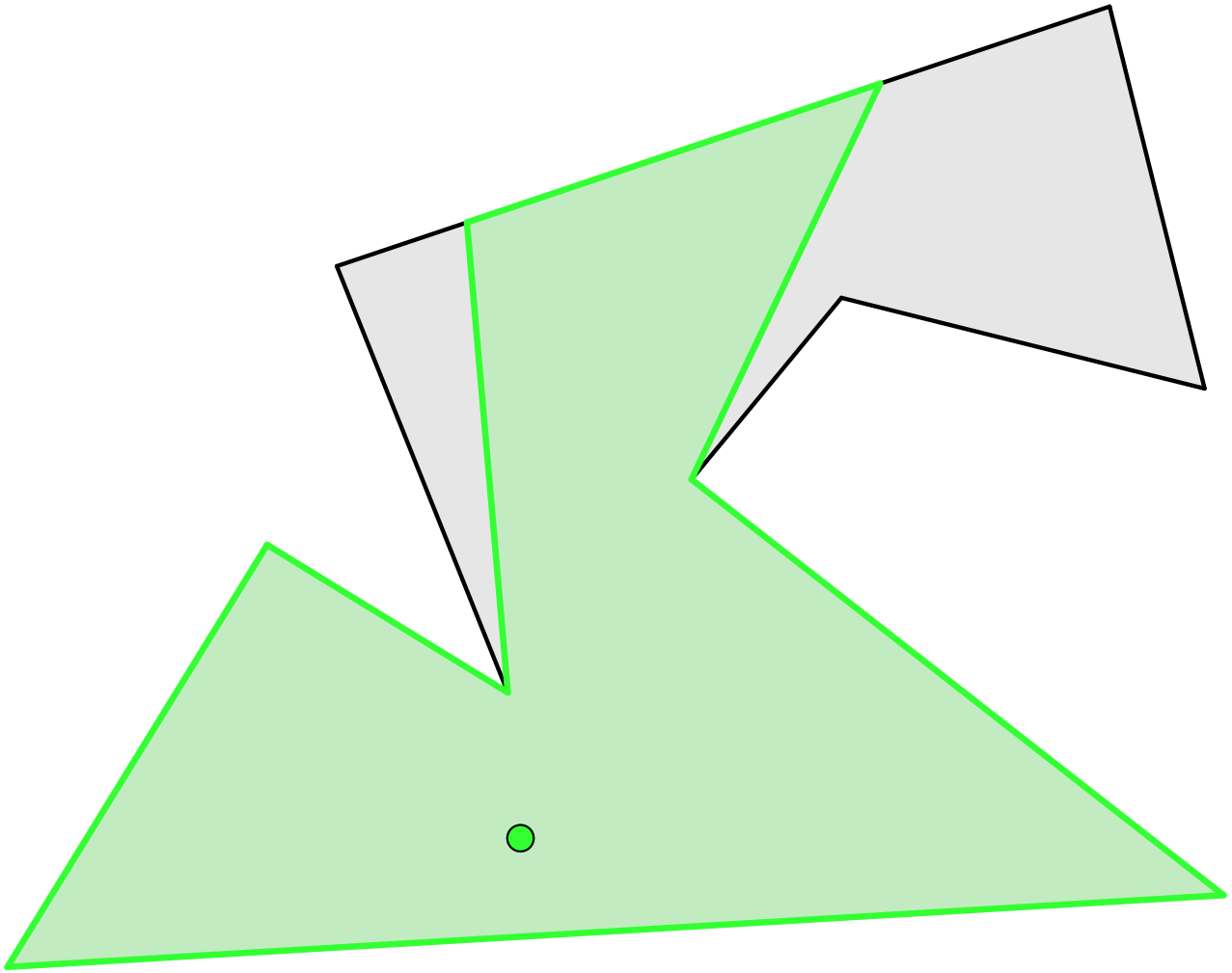
Visibilité des gardiens



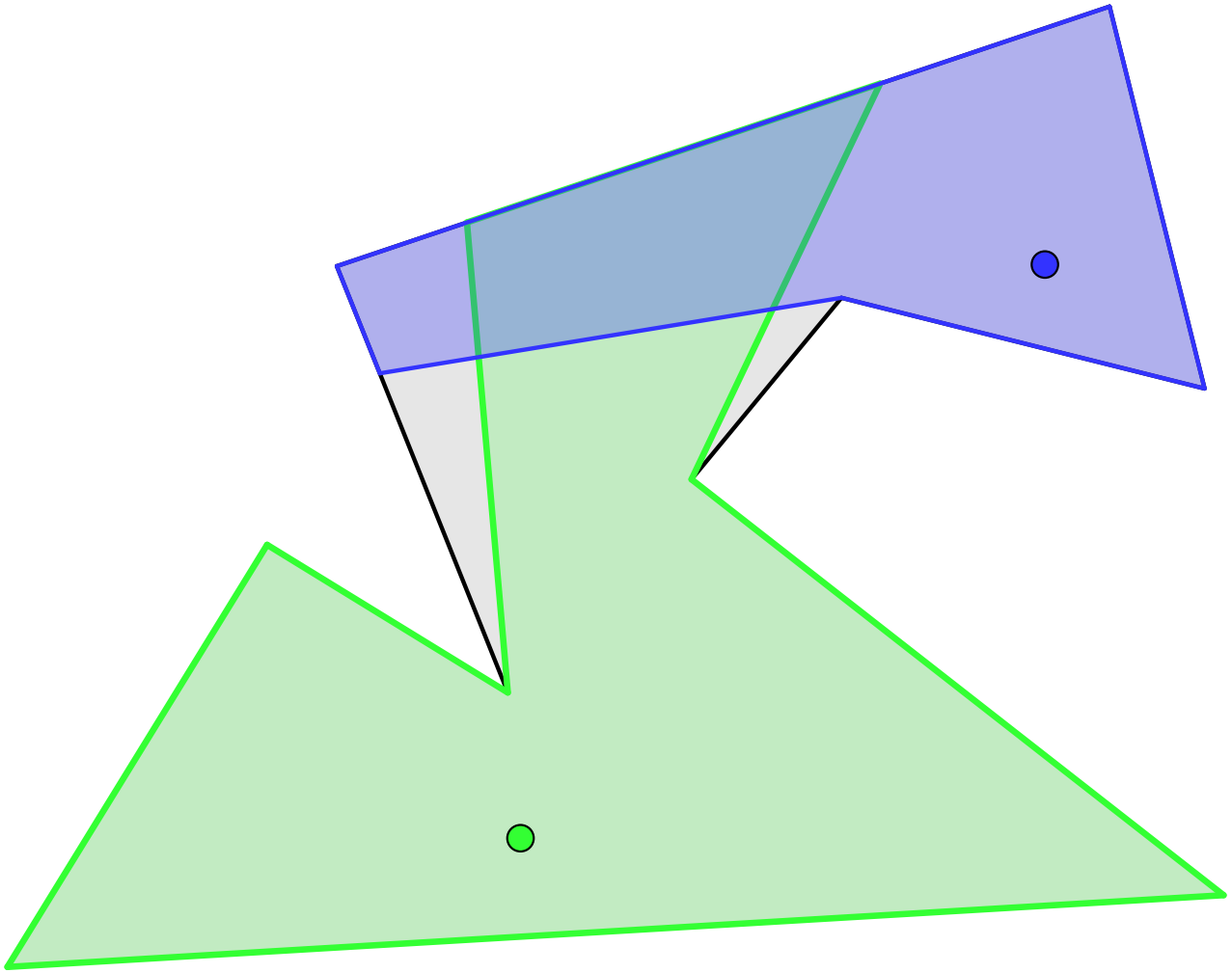
Visibilité des gardiens



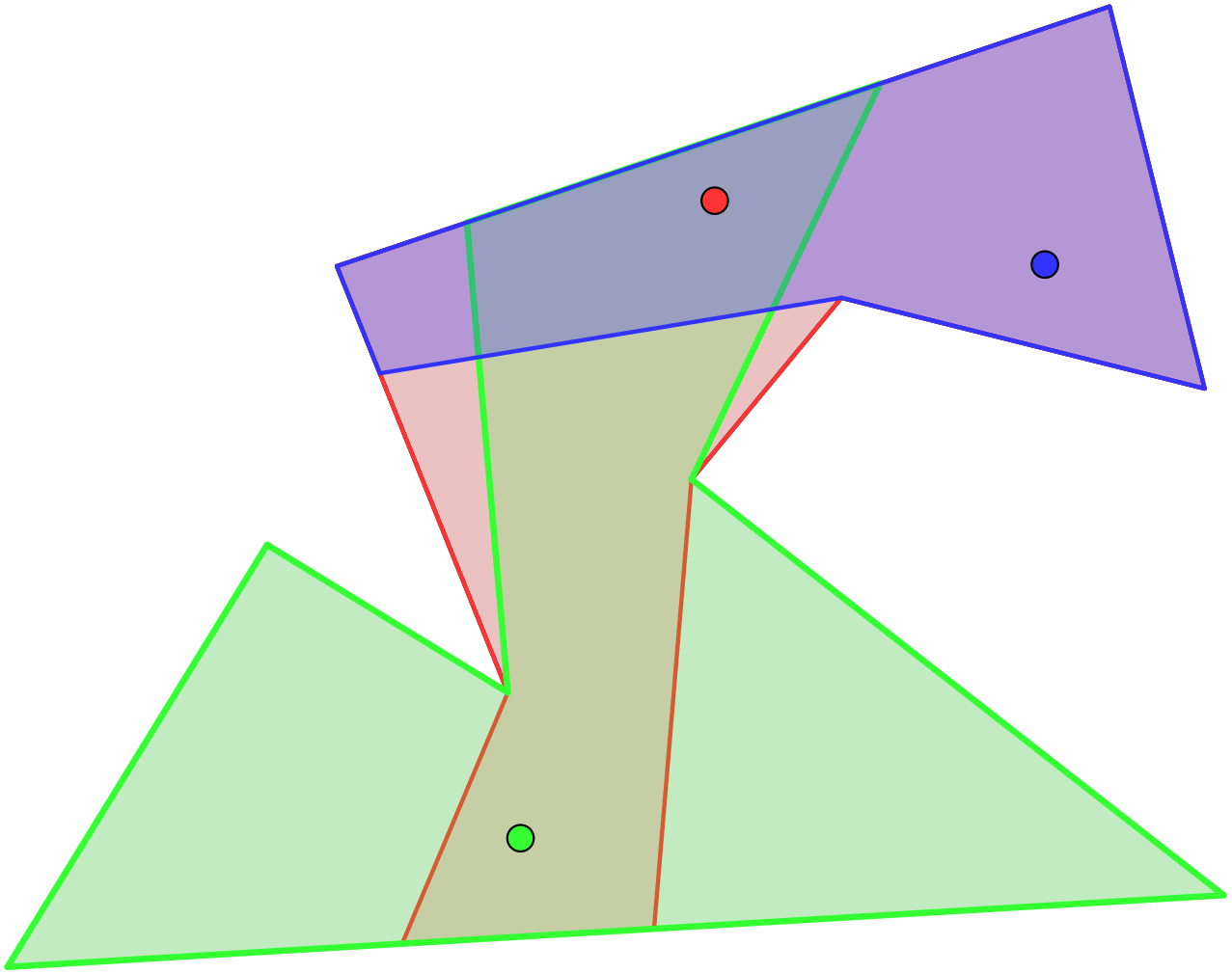
Visibilité des gardiens



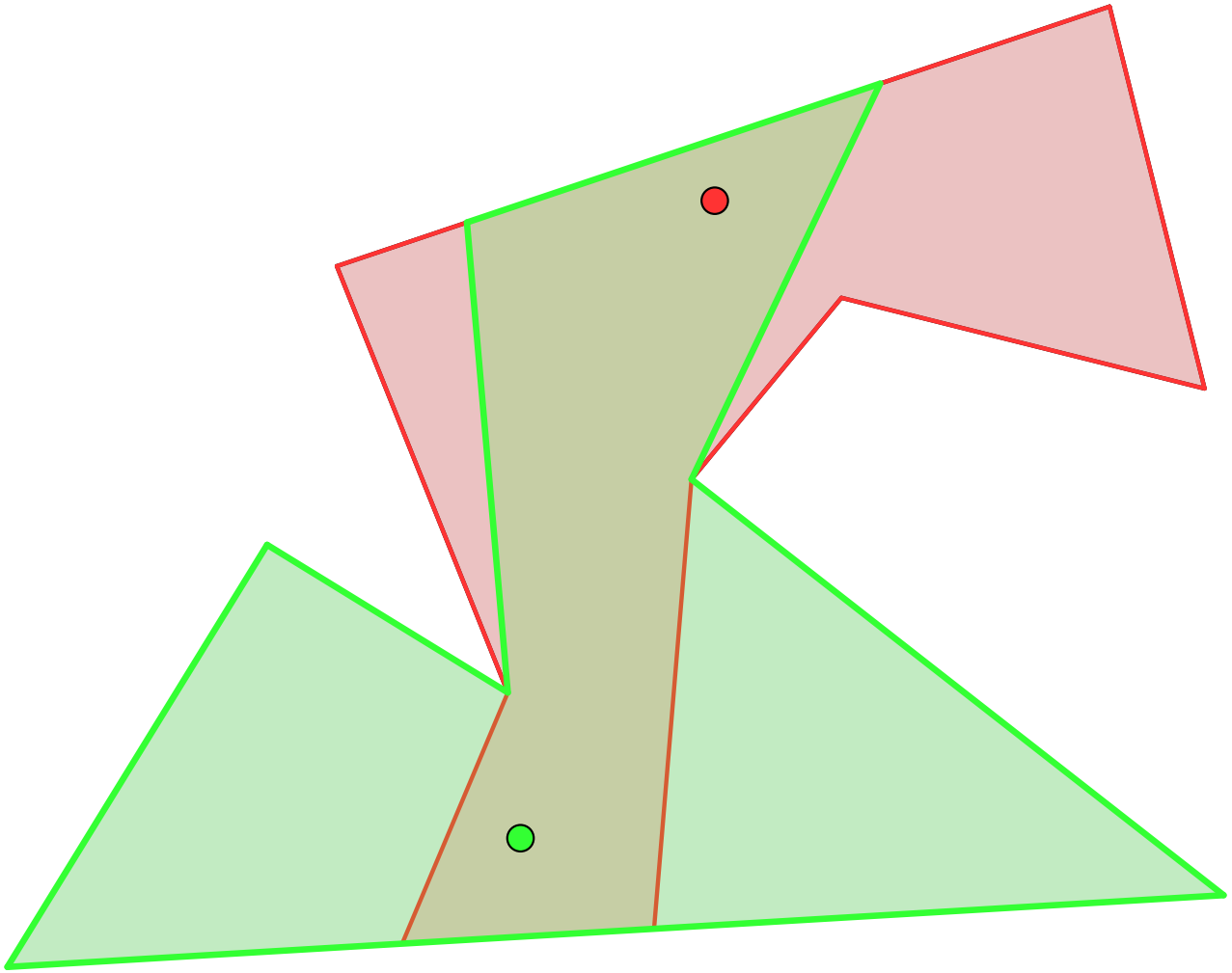
Visibilité des gardiens



Visibilité des gardiens

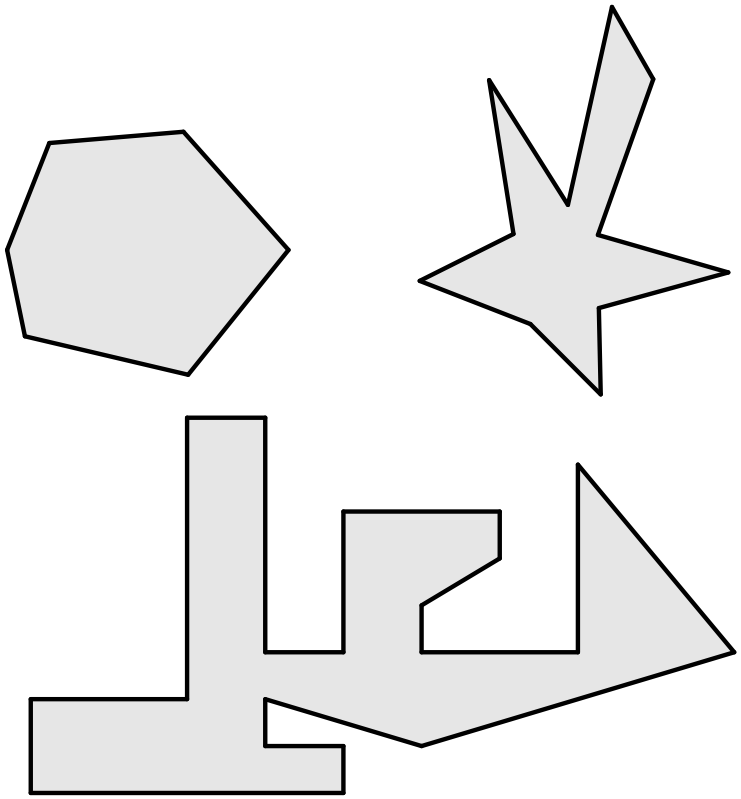


Visibilité des gardiens



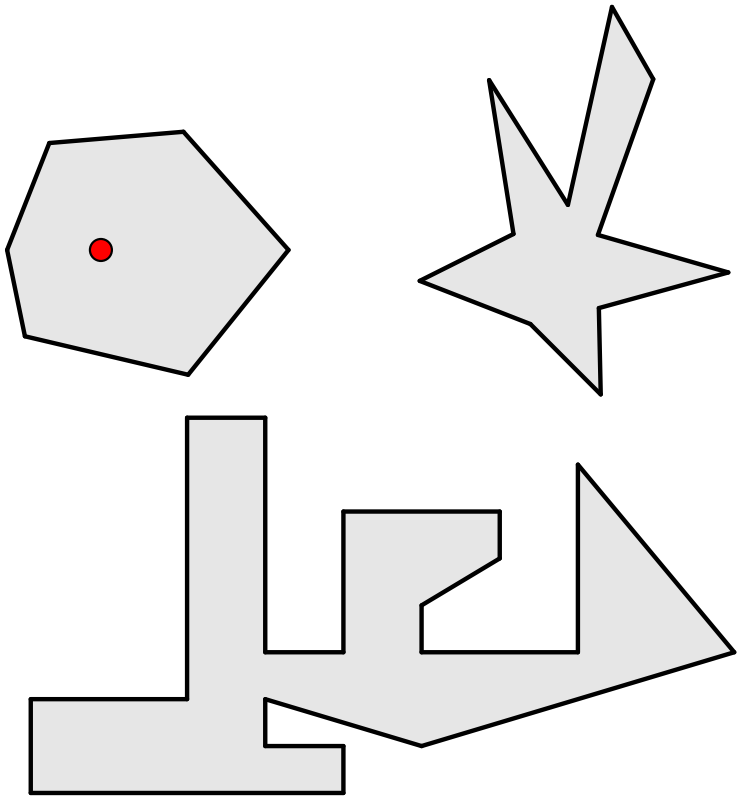
Exemples de galleries d'art

Combien de gardiens faut-il minimum pour garder ces galleries ?



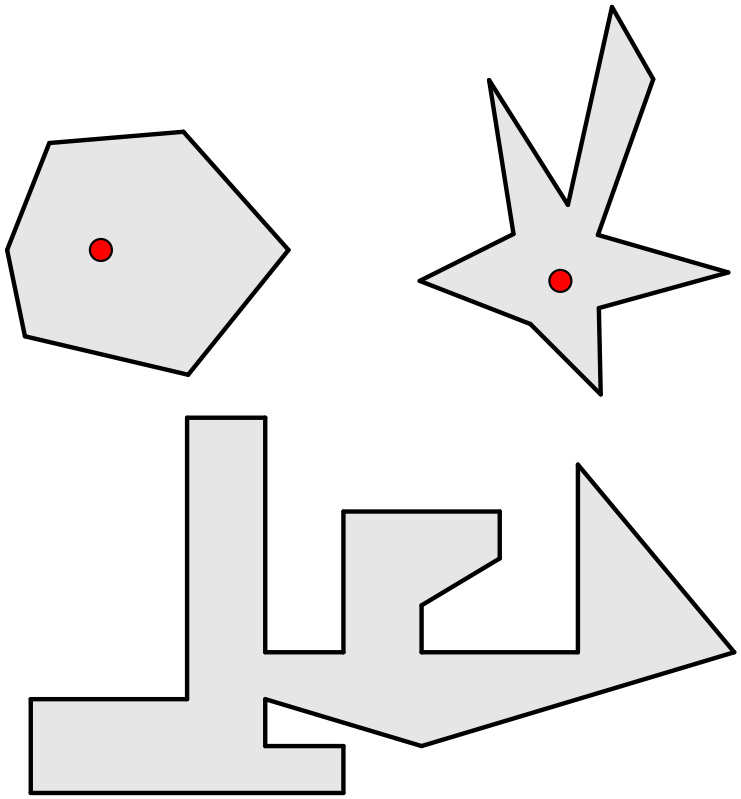
Exemples de galleries d'art

Combien de gardiens faut-il minimum pour garder ces galleries ?



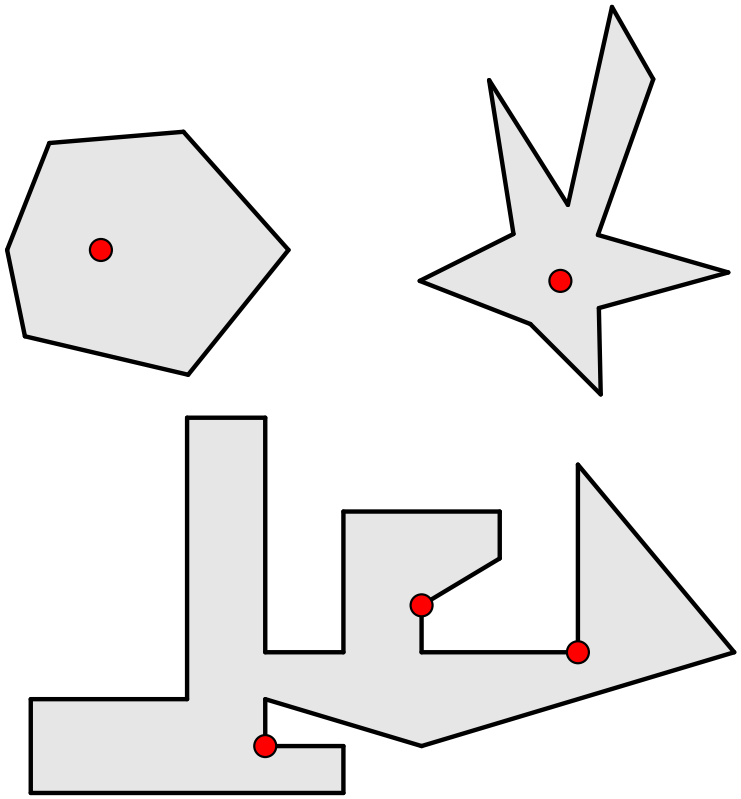
Exemples de galleries d'art

Combien de gardiens faut-il minimum pour garder ces galleries ?



Exemples de galleries d'art

Combien de gardiens faut-il minimum pour garder ces galleries ?



Le théorème des galleries d'art

Question (V. Klee, 1973) : Combien de gardiens faut-il minimum pour surveiller n'importe quelle gallerie d'art avec m murs ?

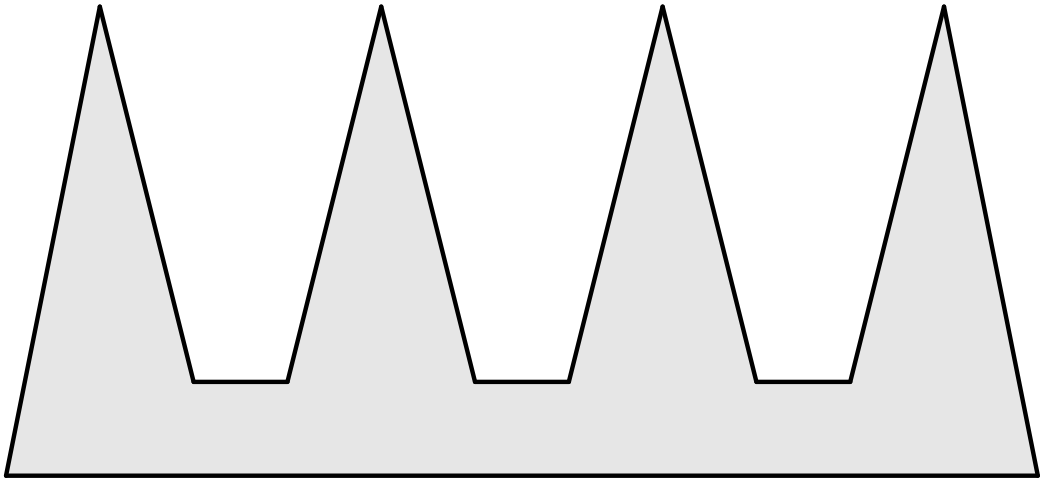
Le théorème des galleries d'art

Question (V. Klee, 1973) : Combien de gardiens faut-il minimum pour surveiller n'importe quelle gallerie d'art avec m murs ?

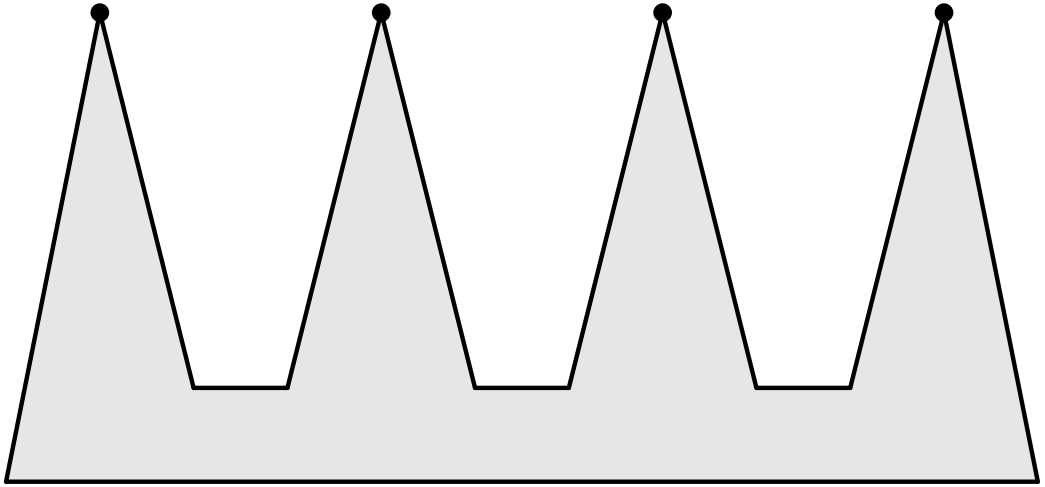
Théorème (Chvátal, 1975)

Soit P une gallerie d'art avec m murs. Alors $\lfloor \frac{m}{3} \rfloor$ gardiens sont parfois nécessaires et toujours suffisants pour garder P.

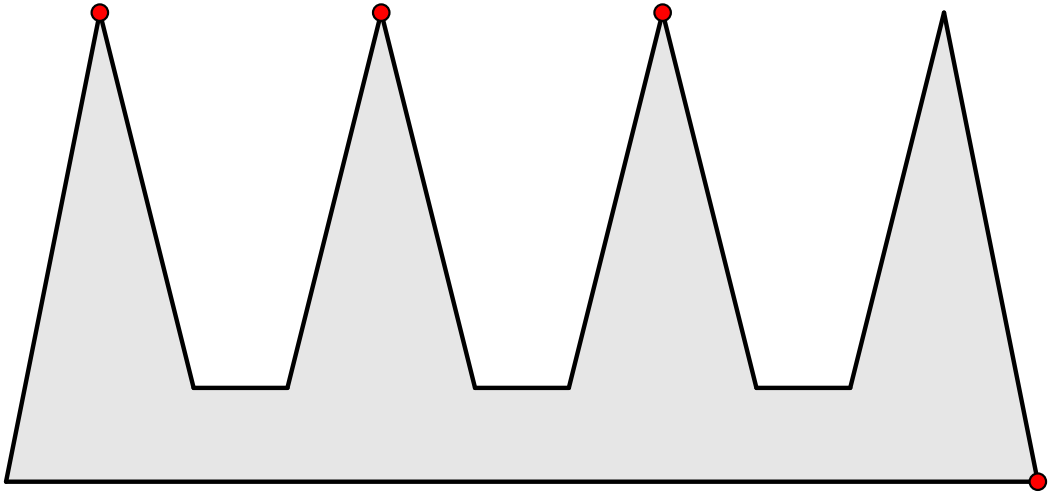
$\frac{m}{3}$ gardiens sont parfois nécessaires



$\frac{m}{3}$ gardiens sont parfois nécessaires



$\frac{m}{3}$ gardiens sont parfois nécessaires



La preuve de Fisk (1978)

JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B 24, 374 (1978)

Note

A Short Proof of Chvátal's Watchman Theorem

STEVE FISK

Department of Mathematics, Bowdoin College, Brunswick, Maine 04011

Communicated by the Editors

Received October 27, 1977

This note contains a short proof of Chvátal's Watchman Theorem using the existence of a three-coloring of a triangulated polygon.

In 1975 Chvátal [1], proved the following result:

THEOREM. *If S is a polygon with n vertices, then there is a set T of at most $n/3$ points of S such that for any point p of S there is a point q of T with the segment pq lying entirely in S.*

If we think of S as a museum, with paintings on the walls, then the theorem gives a bound on the number of stationary watchmen required to guard every part of the museum. We present a simple proof.

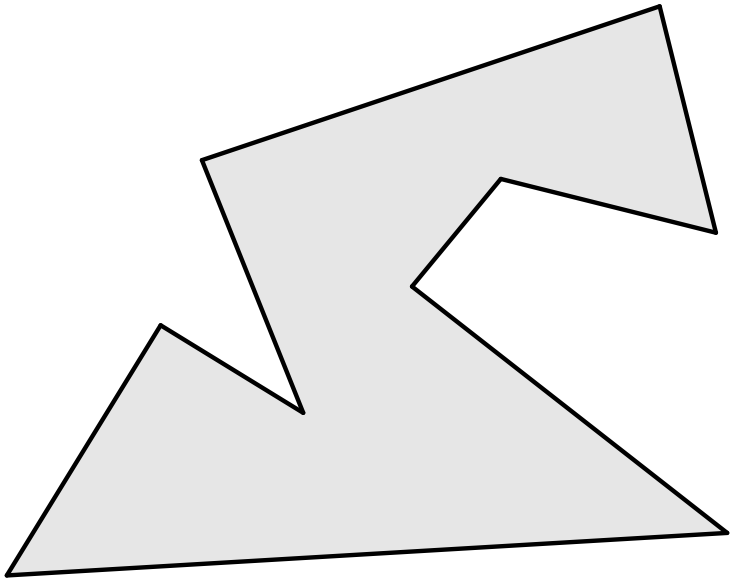
Proof. Triangulate S so that no new vertices are added. Every such triangulation has a coloring with three colors a, b, c. Let T_k be the set of vertices colored a, and assume that $|T_a| \leqslant |T_b| \leqslant |T_c|$. Choosing $T = T_a$ implies $|T| \leqslant n/3$. Finally, every point q of S lies in some triangle of S, and every triangle of S has a point p of T on it. Since triangles are convex, we have $pq \subset S$.

REFERENCE

1. V. CHVÁTAL, A combinatorial theorem in plane geometry, *J. Combinatorial Theory B* **18** (1975), 39–41.

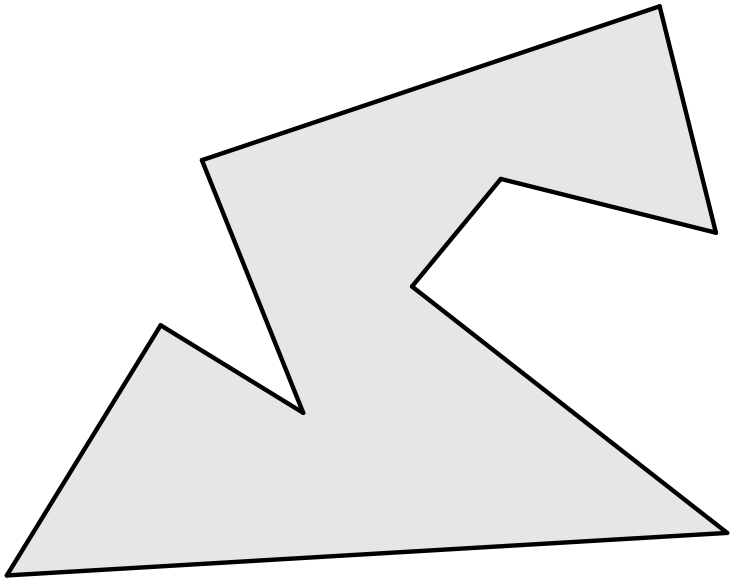
0095-8956/78/0243–0374$02.00/0
Copyright © 1978 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

La preuve de Fisk (1978)



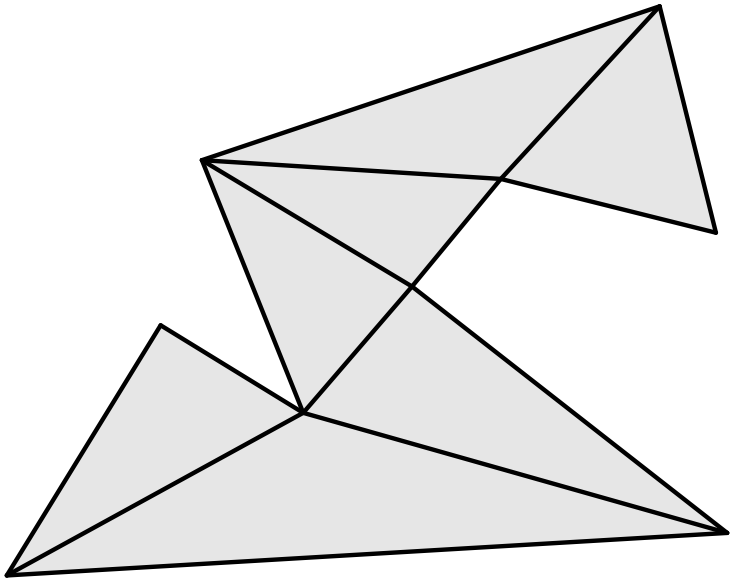
La preuve de Fisk (1978)

1. Triangulation du polygone



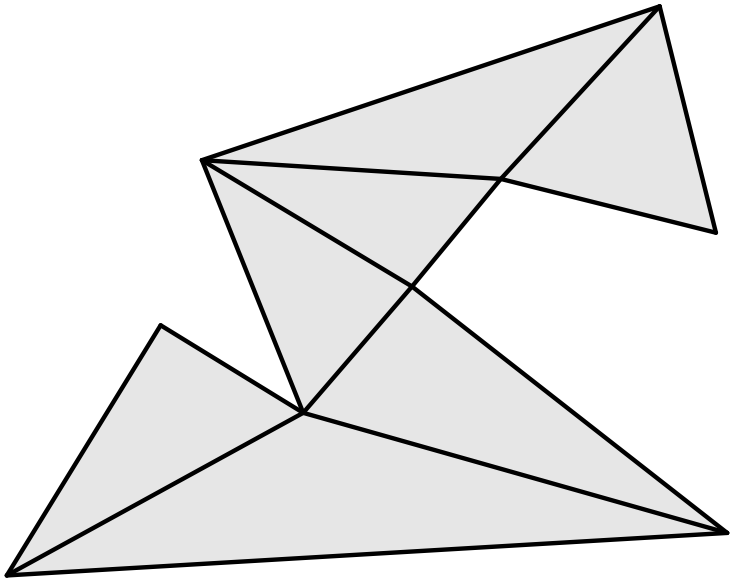
La preuve de Fisk (1978)

1. Triangulation du polygone



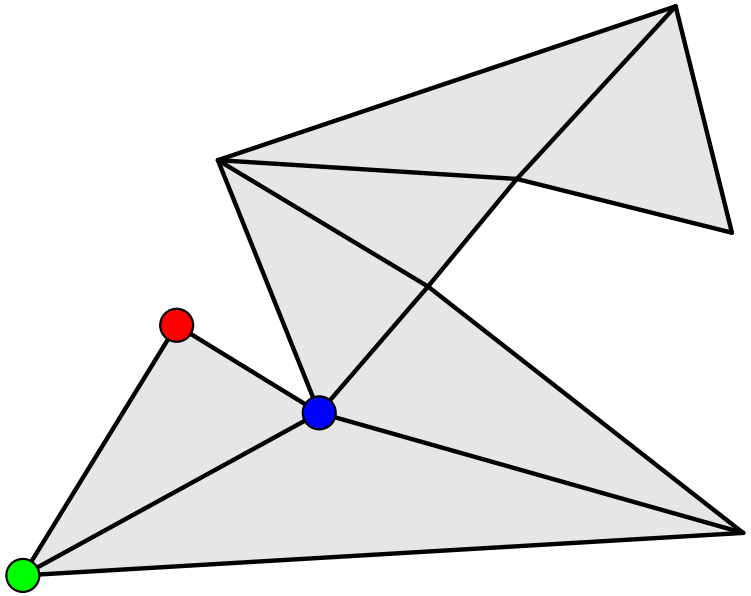
La preuve de Fisk (1978)

1. Triangulation du polygone
2. Coloration des sommets t.q. deux sommets adjacents ont des couleurs différentes



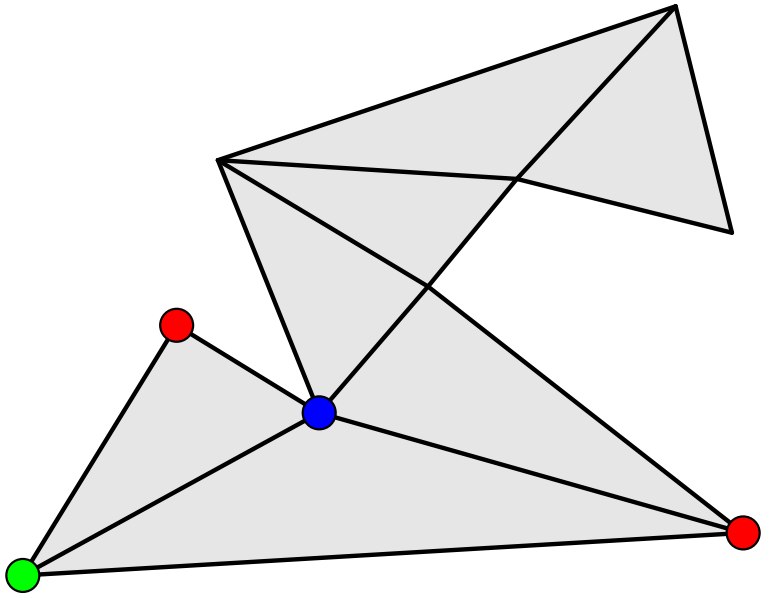
La preuve de Fisk (1978)

1. Triangulation du polygone
2. Coloration des sommets t.q. deux sommets adjacents ont des couleurs différentes



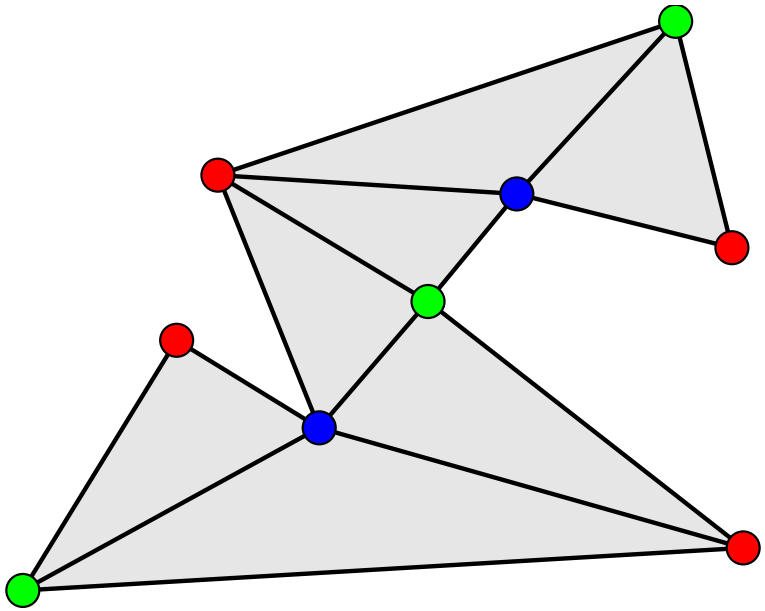
La preuve de Fisk (1978)

1. Triangulation du polygone
2. Coloration des sommets t.q. deux sommets adjacents ont des couleurs différentes



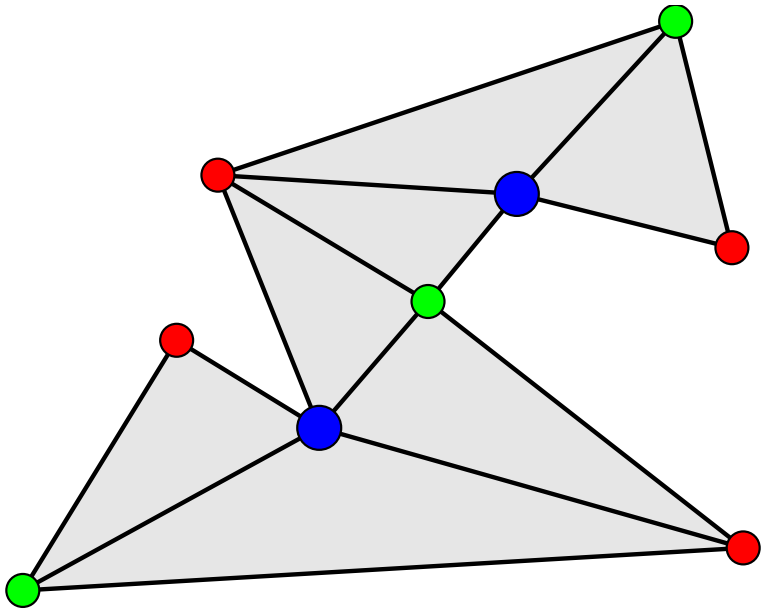
La preuve de Fisk (1978)

1. Triangulation du polygone
2. Coloration des sommets t.q. deux sommets adjacents ont des couleurs différentes



La preuve de Fisk (1978)

1. Triangulation du polygone
2. Coloration des sommets t.q. deux sommets adjacents ont des couleurs différentes
3. Choisir les sommets de la couleur la moins utilisée



Existence des triangulations

Preuve par induction.

Existence des triangulations

Preuve par induction.

Cas de base. P a 3 sommets. OK.

Existence des triangulations

Preuve par induction.

Cas de base. P a 3 sommets. OK.

Cas de récurrence.

Existence des triangulations

Preuve par induction.

Cas de base. P a 3 sommets. OK.

Cas de récurrence. Montrer l'existence d'une diagonale qui coupe P en deux polygones P_1, P_2 avec un segment en commun.

Existence des triangulations

Preuve par induction.

Cas de base. P a 3 sommets. OK.

Cas de récurrence. Montrer l'existence d'une diagonale qui coupe P en deux polygones P_1, P_2 avec un segment en commun. Par récurrence, P_1 et P_2 sont triangulables.

Existence des triangulations

Preuve par induction.

Cas de base. P a 3 sommets. OK.

Cas de récurrence. Montrer l'existence d'une diagonale qui coupe P en deux polygones P_1, P_2 avec un segment en commun. Par récurrence, P_1 et P_2 sont triangulables. L'union des deux triangulations est une triangulation de P.

Existence des triangulations

Preuve par induction.

Cas de base. P a 3 sommets. OK.

Cas de récurrence. Montrer l'existence d'une diagonale qui coupe P en deux polygones P_1, P_2 avec un segment en commun. Par récurrence, P_1 et P_2 sont triangulables. L'union des deux triangulations est une triangulation de P.

Existence d'une diagonale. Voir tableau.

Galleries orthogonales

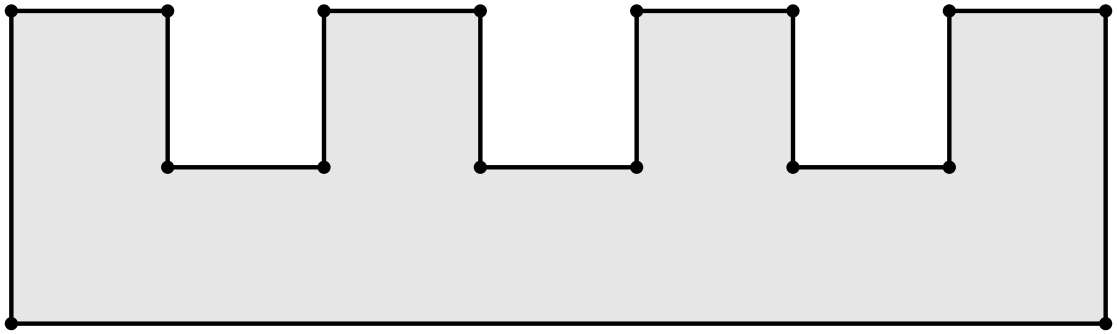
Théorème

Soit P un polygone orthogonal avec m arêtes. Alors $\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ gardiens sont parfois nécessaires et toujours suffisants pour garder P.

Galleries orthogonales

Théorème

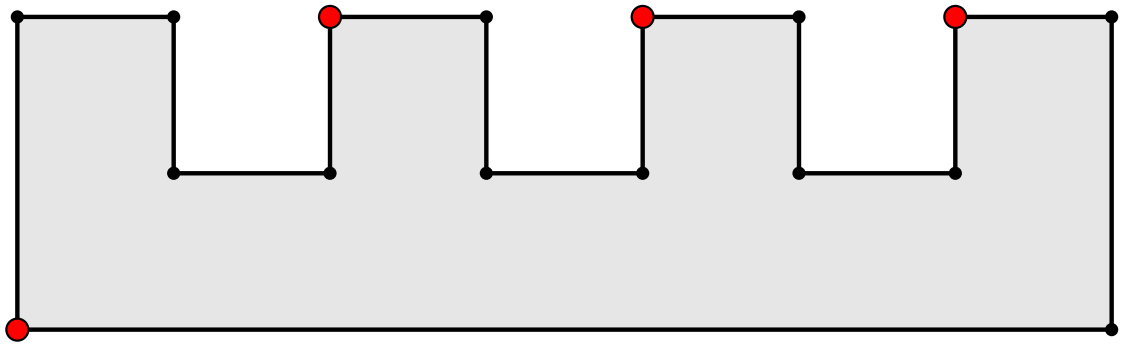
Soit P un polygone orthogonal avec m arêtes. Alors $\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ gardiens sont parfois nécessaires et toujours suffisants pour garder P.



Galleries orthogonales

Théorème

Soit P un polygone orthogonal avec m arêtes. Alors $\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ gardiens sont parfois nécessaires et toujours suffisants pour garder P.

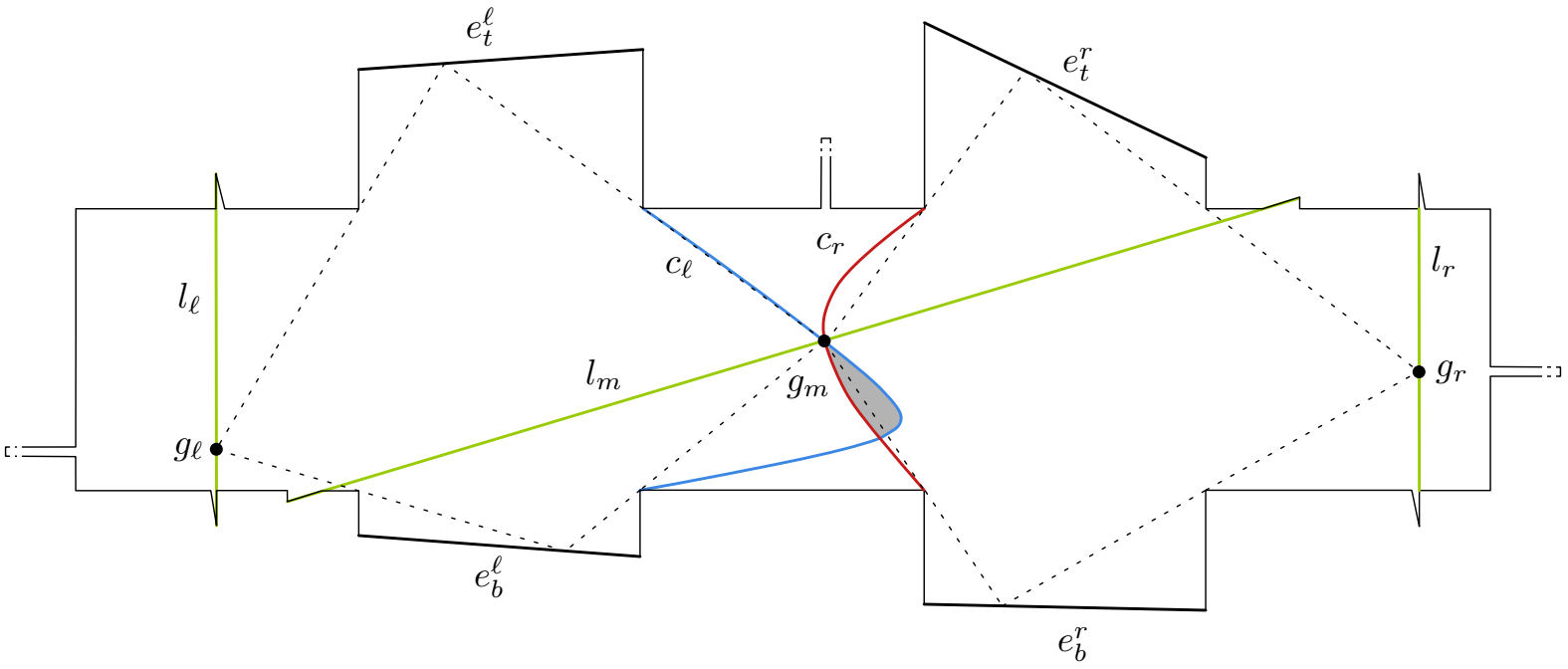


Où placer les gardiens ?

- Dans l'intérieur du polygone.
- Sur les sommets.
- Sur des segments à l'intérieur. Chaque gardien voit tous les points visibles depuis les points du segment.
- Restrictions supplémentaires.

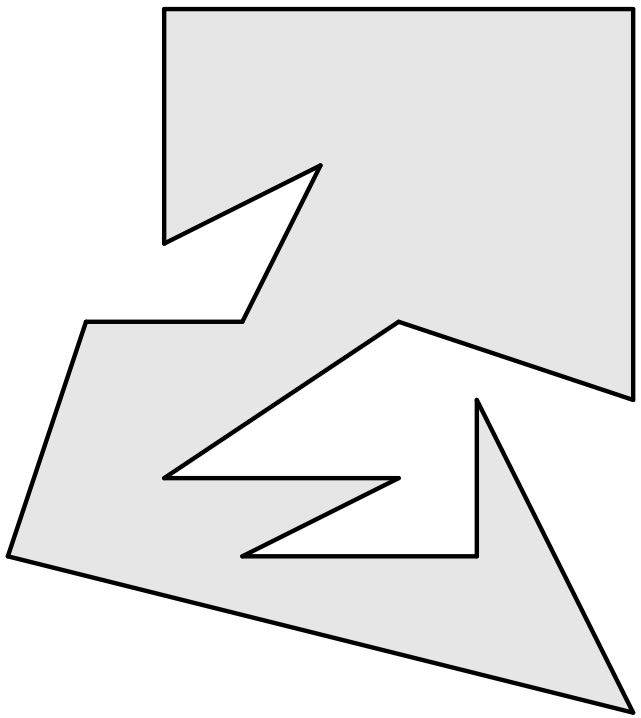
Où placer les gardiens ?

Abrahamsen, Miltzow et Lubiw (2017) :
parfois besoin de *coordonnées irrationnelles*



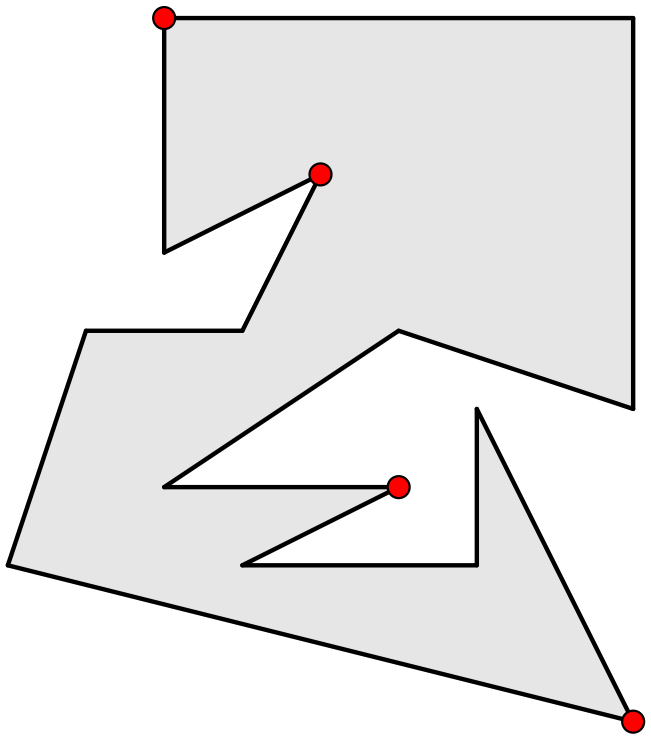
Défendre les forteresses ...

- On veut surveiller l'extérieur d'un polygone P au lieu de l'intérieur avec des gardiens placés sur les sommets de P.
- Les gardiens sur les sommets sont les *vertex guards*.



Défendre les forteresses ...

- On veut surveiller l'extérieur d'un polygone P au lieu de l'intérieur avec des gardiens placés sur les sommets de P.
- Les gardiens sur les sommets sont les *vertex guards*.



Défendre les forteresses ...

- On veut surveiller l'extérieur d'un polygone P au lieu de l'intérieur avec des gardiens placés sur les sommets de P.
- Les gardiens sur les sommets sont les *vertex guards*.

Théorème (O'Rourke, Wood, 1983)

Soit P un polygone avec n sommets. Alors, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vertex guards sont parfois nécessaires et toujours suffisants pour surveiller l'extérieur de P.

... et les prisons

- On veut surveiller l'intérieur **et** l'extérieur simultanément par des vertex guards.

... et les prisons

- On veut surveiller l'intérieur **et** l'extérieur simultanément par des vertex guards.

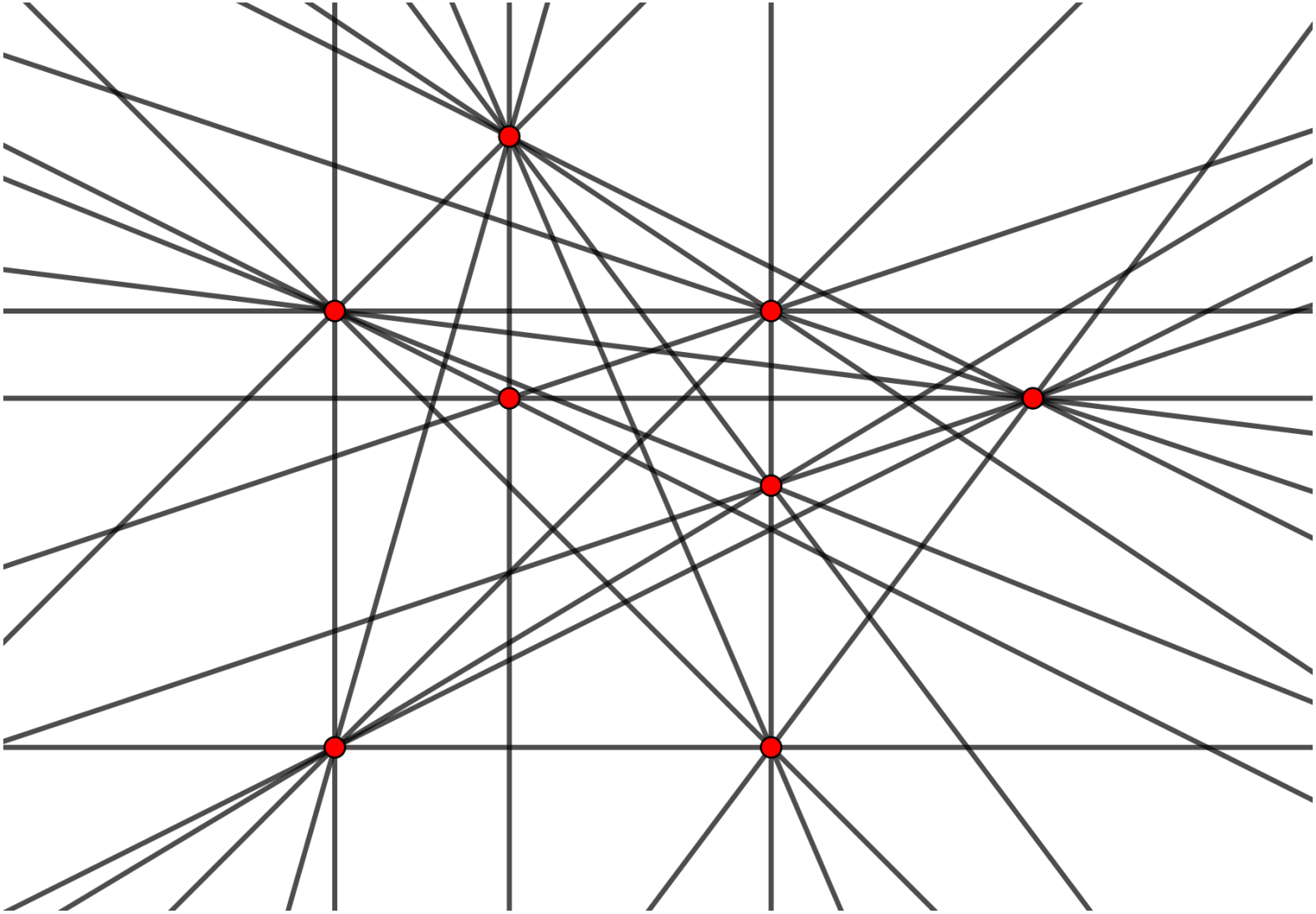
Théorème (Füredi, Kleitman, 1994)

Soit P un polygone convexe de n sommets. Alors $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vertex guards sont nécessaires pour garder l'intérieur et l'extérieur de P. Si P est non-convexe, alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vertex guards sont suffisants.

Section 3

Sylvester-Gallai...

Points et lignes dans le plan



Points et lignes dans le plan

J.J. Sylvester demande en 1893 :

Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line.

Points et lignes dans le plan

J.J. Sylvester demande en 1893 :

Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line.

Théorème (Sylvester-Gallai)

Dans une configuration de n points dans le plan, non tous alignés, il existe une droite passant par exactement 2 points.

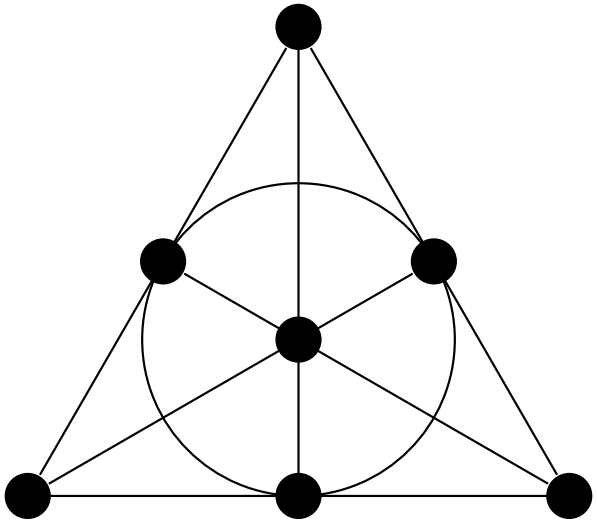
Démonstration de Gallai.

Voir tableau. $\square$

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Le plan de Fano ne peut être plongé dans le plan réel.



Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

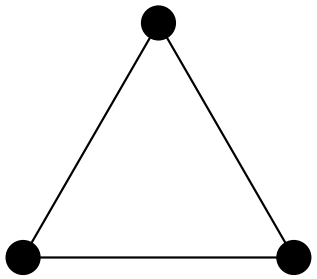
Démonstration.

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

Démonstration.



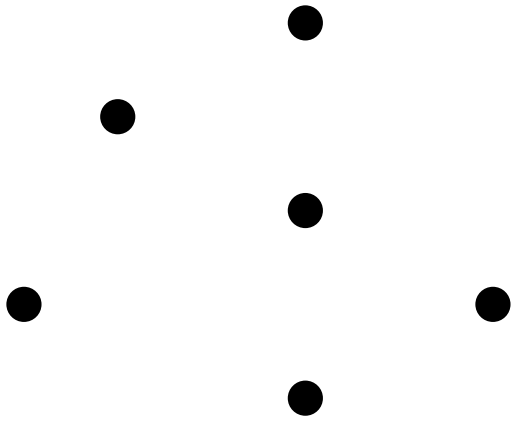
$\square$

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

Démonstration.



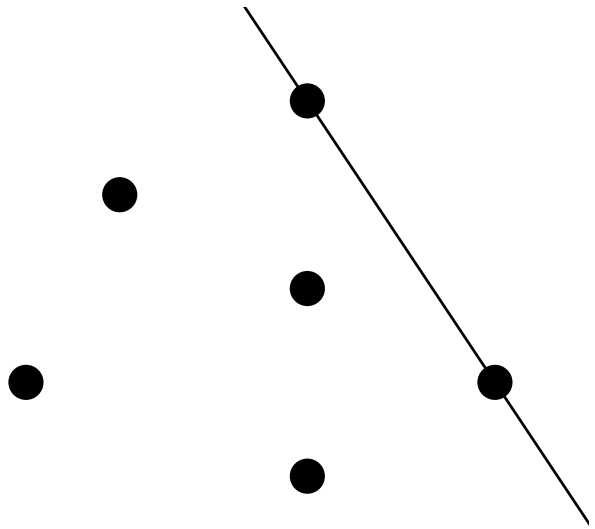
$\square$

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

Démonstration.



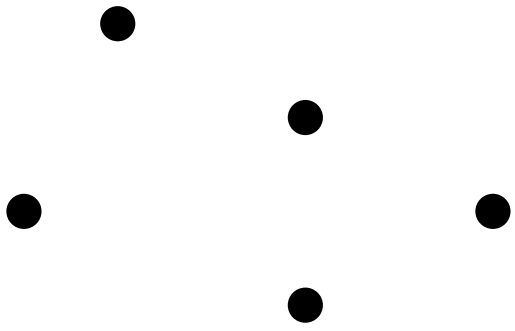
$\square$

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

Démonstration.



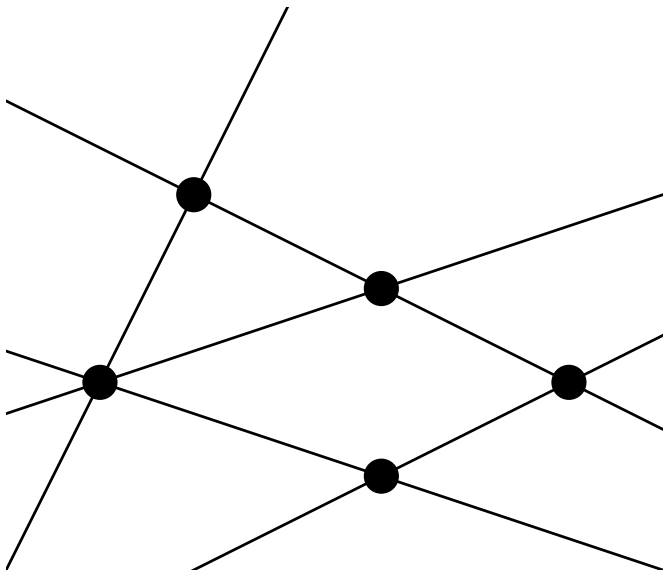
$\square$

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

Démonstration.



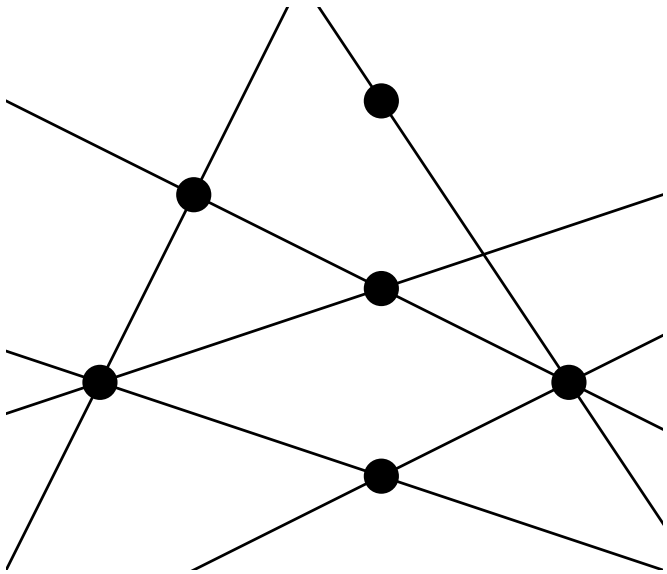
$\square$

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

Démonstration.



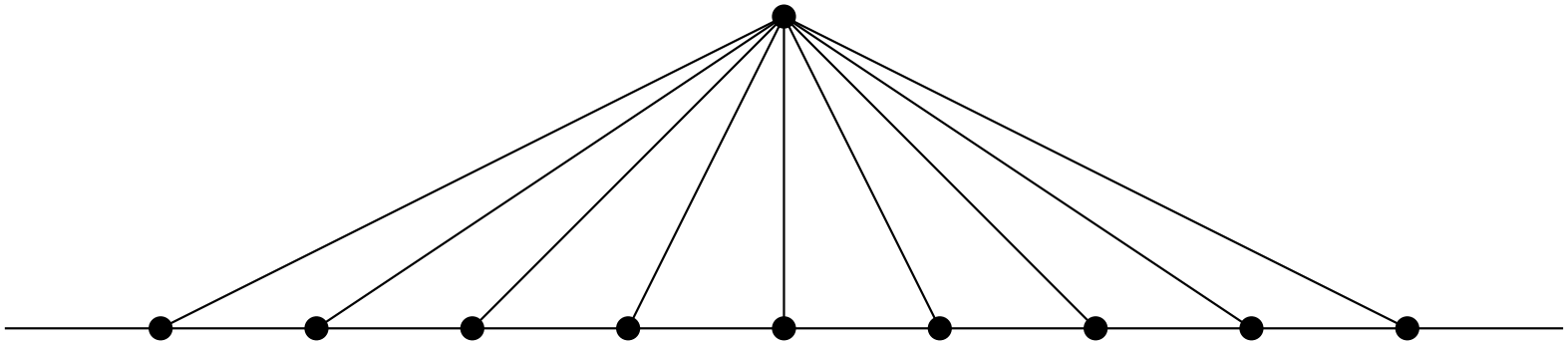
$\square$

Applications de Sylvester-Gallai

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de $n \geq 3$ points dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par au moins 2 points de $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}$ contient au moins n droites.

Démonstration.



$\square$

Une généralisation colorée de Sylvester-Gallai

Théorème (Chakerian, 1970)

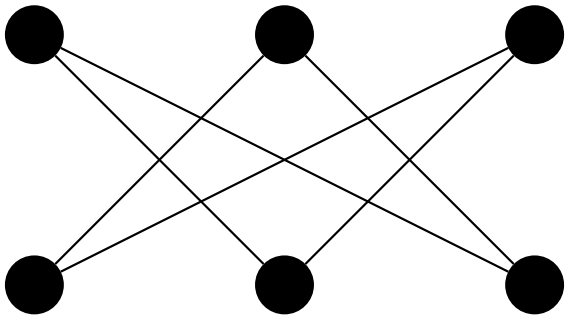
Soit une configuration finie de points noirs et blancs telle que tous les points ne sont pas alignés. Alors il existe toujours une ligne monochrome, c-à-d. que cette ligne contient au moins 2 points et tous ses points sont de la même couleur.

Section 4

... via Euler

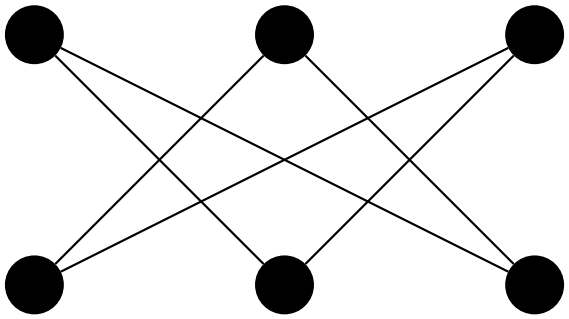
Graphes planaires

- Un *graphe simple* G est une paire $G = (V, E)$ tq. V (fini) est l'ensemble de *sommets* et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble d'*arêtes*.



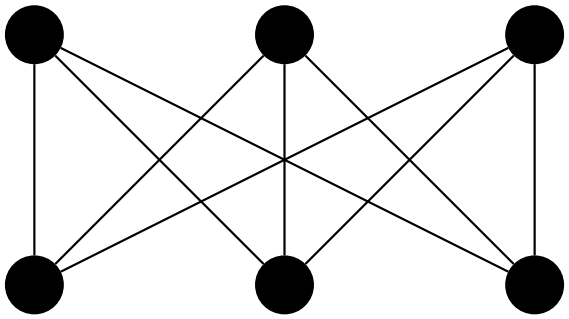
Graphes planaires

- Un *graphe simple* G est une paire $G = (V, E)$ tq. V (fini) est l'ensemble de *sommets* et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble d'*arêtes*.
- G est *planaire* s'il existe une représentation de G sans croisement d'arêtes.



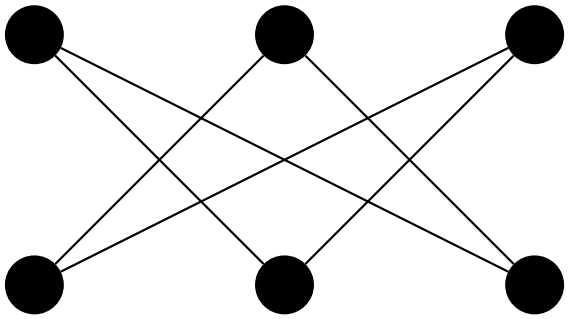
Graphes planaires

- Un *graphe simple* G est une paire $G = (V, E)$ tq. V (fini) est l'ensemble de *sommets* et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble d'*arêtes*.
- G est *planaire* s'il existe une représentation de G sans croisement d'arêtes.



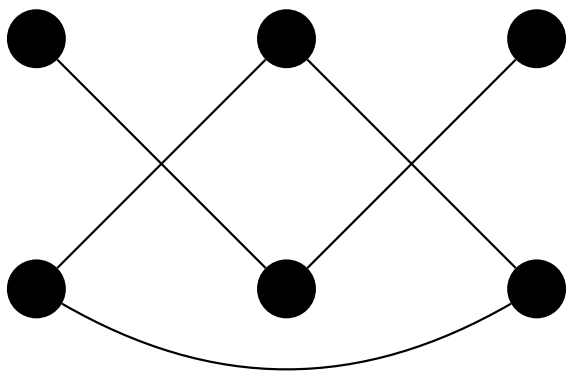
Graphes planaires

- Un *graphe simple* G est une paire $G = (V, E)$ tq. V (fini) est l'ensemble de *sommets* et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble d'*arêtes*.
- G est *planaire* s'il existe une représentation de G sans croisement d'arêtes.
- G est *connexe* si pour tous sommets $u, v \in V$ il existe un chemin de u à v dans G.



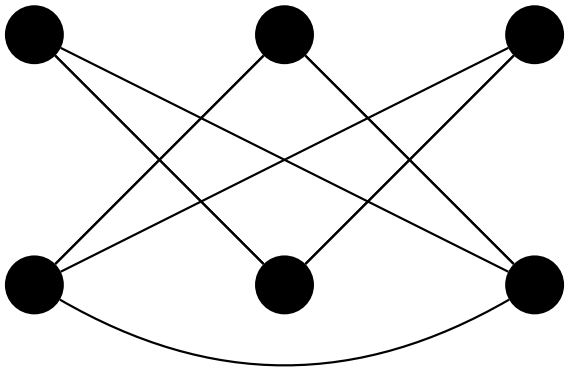
Graphes planaires

- Un *graphe simple* G est une paire $G = (V, E)$ tq. V (fini) est l'ensemble de *sommets* et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble d'*arêtes*.
- G est *planaire* s'il existe une représentation de G sans croisement d'arêtes.
- G est *connexe* si pour tous sommets $u, v \in V$ il existe un chemin de u à v dans G.



Graphes planaires

- Un *graphe simple* G est une paire $G = (V, E)$ tq. V (fini) est l'ensemble de *sommets* et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble d'*arêtes*.
- G est *planaire* s'il existe une représentation de G sans croisement d'arêtes.
- G est *connexe* si pour tous sommets $u, v \in V$ il existe un chemin de u à v dans G.
- Le *degré* d'un sommet $v \in V$ est le nombre d'arêtes adjacentes à v.



Formule d'Euler

Théorème

Soit G un graphe planaire, simple, connexe, avec n sommets, e arêtes et f faces. Alors

$$n - e + f = 2.$$

Démonstration.

`https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/` □

Formule d'Euler

Corollaire

Soit G un graphe planaire simple avec $n > 2$ sommets. Alors

1. G a au plus $3n - 6$ arêtes.
2. G a un sommet de degré ≤ 5.

Formule d'Euler

Corollaire

Soit G un graphe planaire simple avec $n > 2$ sommets. Alors

1. G a au plus $3n - 6$ arêtes.
2. G a un sommet de degré ≤ 5.
3. Si on colore les arêtes de G avec deux couleurs, alors il existe un sommet avec au plus deux changements de couleur dans l'ordre cyclique.

Reprouvons Sylvester-Gallai !

- $P_1, \ldots, P_n$ points dans le plan Π
- $\mathcal{S}$ sphère strictement au-dessus de Π
- p_i (points antipodaux) projeté de P_i sur $\mathcal{S}$
- C_i cercles tels que $\langle x, q_i \rangle = 0$ pour $x \in C_i$

Reprouvons Sylvester-Gallai !

- $P_1, \ldots, P_n$ points dans le plan Π
- $\mathcal{S}$ sphère strictement au-dessus de Π
- p_i (points antipodaux) projeté de P_i sur $\mathcal{S}$
- C_i cercles tels que $\langle x, q_i \rangle = 0$ pour $x \in C_i$

Observations

- Le graphe défini par $C_1, \ldots, C_n$ et leurs intersections est planaire.
- Les sommets de ce graphe correspondent aux droites de Π.
- Il existe un sommet de degré 4.

Section 5

Un problème ouvert intéressant

Un problème ouvert qui nécessite votre aide !

Un problème ouvert qui nécessite votre aide !

Conjecture

La BSSM 2018 est la meilleure !

Acknowledgements

Financement.
C. Muller est soutenue par le Fonds National de la Recherche, Luxembourg (FNR). Grant Agreement Nr. 11628910.

Photos.
Photo page 2 (C. Muller), Photo page 3 (BSSM), G.H. Hardy (https://fr.wikipedia.org/wiki/Godfrey_Harold_Hardy), P. Erdős (https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul_Erdos), M. Aigner (http://page.mi.fu-berlin.de/ren05gia/pictures/aigner03.jpg), G. M. Ziegler (http://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/discgeom/ziegler/Ressourcen/Bilder/KayHerschelmann/GMZKayHerschelmann.jpg?width=1300&density=1), Proofs from THE BOOK (https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/41LPxknvdrL._SX349_BO1,204,203,200_.jpg), Le Louvre (https://fr.wikipedia.org/wiki/Musee_du_Louvre), Plan du Louvre (https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Plan_louvre1.svg), Article de Fisk [7], Figure des coordonnées irrationnelles [1].

Pour aller plus loin

- La vie d'Erdős [9]
- Papiers d'Erdős `https://users.renyi.hu/~p_erdos/`
- Nombre d'Erdős `https://www.oakland.edu/enp/`
- Proofs from the Book [2]
- Infinité de nombres premiers [6]
- Galleries d'art [7, 4, 8, 10]
- Sylvester-Gallai, Euler et Graphes [3, 11, 5]

M. Abrahamsen, A. Adamaszek, and T. Miltzow.
Irrational guards are sometimes needed.
CoRR, abs/1701.05475, 2017.

M. Aigner and G. M. Ziegler.
Proofs from THE BOOK.
Springer Publishing Company, Incorporated, 6th edition, 2018.

G. D. Chakerian.
Sylvester's problem on collinear points and a relative.
The American Mathematical Monthly, 77(2) :164–167, 1970.

V. Chvátal.
A combinatorial theorem in plane geometry.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 18(1) :39 – 41, 1975.

R. Diestel.
Graph Theory, 4th Edition, volume 173 of *Graduate texts in mathematics*.
Springer, 2012.

P. Erdős.
Uber die reihe $\sum \frac{1}{p}$ (in german).
Mathematica, Zutphen B, 7 :1–2, 1938.

S. Fisk.
A short proof of chvátal's watchman theorem.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 24(3) :374, 1978.

Z. Füredi and D. J. Kleitman.
The prison yard problem.
Combinatorica, 14(3) :287–300, Sep 1994.

P. Hoffman.
The Man who Loved Only Numbers : The Story of Paul Erdös and the Search for Mathematical Truth.
Fourth Estate paperbacks. Fourth Estate, 1998.

J. O'Rourke.
Art Gallery Theorems and Algorithms.
Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1987.

J. J. Sylvester.
Mathematical question 11851.
The Educational Times, 46, 1893.