

# Quelques déplacements infinitésimaux en pays non-standard

THIBAUT GROUY

L'analyse non-standard, initiée par A. Robinson [1] dans les années 1960s, entend réhabiliter le concept d'infinitésimal en lui conférant un cadre rigoureux. Tout commence par la construction d'une extension du corps des réels, appelée corps des *hyperréels* ou *réels non-standard*. Il s'agit d'un corps ordonné non-archimédien contenant, en plus des nombres dits *standard*, des nombres infinis et des nombres infinitésimaux. Il constitue le cadre idéal pour décrire les comportements asymptotiques en analyse. On refait alors toutes les définitions de base, comme la continuité ou la différentiabilité, à la sauce non-standard et on redémontre certains résultats classiques avec une étonnante facilité [2, 3].

De manière plus générale, on associe une version non-standard à n'importe quel ensemble et on *transfère* les propriétés de cet ensemble à sa version non-standard. Outre son côté pédagogique et amusant, la théorie non-standard s'est avérée être un outil pertinent dans certains domaines comme la théorie des mesures et probabilités, les processus stochastiques ou la physique mathématique [2]. Dans cet exposé, après avoir défini le corps des réels non-standard, on se familiarisera avec l'arithmétique des infinitésimaux et des infinis que l'on appliquera ensuite à l'analyse de base. On poussera un peu plus loin notre excursion en se dirigeant vers la topologie dont on traduira les concepts fondamentaux dans ce langage alternatif. Enfin, ce voyage en pays non-standard s'achèvera par une brève incursion en géométrie différentielle dite infinitésimale, qui n'en est qu'à ses balbutiements [4, 5].

## Références

- [1] A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.
- [2] N. J. CUTLAND (ED.), *Nonstandard Analysis and its Applications*, London Mathematical Society Student Texts 10, Cambridge, 1988.
- [3] A. E. HURD AND P. A. LOEB, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*, Pure and Applied Mathematics, 118. Orlando etc., Academic Press, Inc., 1995.

- [4] R. ALMEIDA, Nonstandard Analysis and Differentiable Manifolds – Foundations, *Differential Geometry, Dynamical Systems* **11** (2009), 1 – 19.
- [5] T. NOWIK AND M. G. KATZ, Differential Geometry via Infinitesimal Displacements, *Journal of Logic and Analysis* **7** (2015), 1 – 44.