

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences

Département de Mathématique

BRUSSELS SUMMER OF  
PROBABILITY AND OPTIMIZATION

Mini-cours organisés par CHRISTOPHE LEY et YVIK SWAN

Participants : ISABELLE CHARLIER, MAXIME GHEYSENS et JULIEN MEYER

Année académique 2007-2008

Août 2008

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Au royaume des probabilités</b>	<b>3</b>
1.1	Quelques échauffements . . . . .	3
1.1.1	Quand le paramètre transcende . . . . .	3
1.1.2	Astrophysique probabiliste . . . . .	5
1.1.3	Théorie des nombres probabiliste . . . . .	7
1.2	Le problème des fournisseurs . . . . .	9
1.3	Le paradoxe de Monty Hall . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Le principe d'optimalité appliqué aux Jeux Olympiques</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Théorie des graphes</b>	<b>17</b>
3.1	Le problème du carrefour . . . . .	17
3.2	Le problème du plus court chemin . . . . .	20
3.3	Le problème du postier . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Le problème de la ruine pour 2 joueurs</b>	<b>27</b>
4.1	La ruine du joueur . . . . .	27
4.1.1	Probabilité de ruine . . . . .	27
4.1.2	Durée moyenne de l'espoir du joueur . . . . .	29
4.2	Quelques propriétés incongrues de la promenade aléatoire . . . . .	30

# Avant-propos de Christophe

L'IDÉE DE CETTE ÉCOLE D'ÉTÉ m'est venue en voiture, après le dernier tp donné à ma classe de BA1 Maths. Regrettant amèrement la fin de ma collaboration avec eux et ayant remarqué leur motivation et l'intérêt qu'ils portent aux mathématiques, je me suis dit que ce serait trop dommage d'en rester là. Ainsi ai-je imaginé que des cours particuliers dans un cadre hors-universitaire (mais universitaire quand même) pourraient accroître leur sympathie à l'encontre de cette matière. Aussi ai-je contacté mon collègue et ami Yvik (je profite de l'occasion pour lui exprimer ma gratitude d'avoir pu profiter de son expérience et de ses connaissances pour mes débuts comme assistant) afin qu'il m'épaulé dans ce projet. Sa réaction fut un «Oui» enthousiaste. Ainsi est né le so-called «Brussels Summer of Probability and Optimization», dont la première édition se trouve dans le présent document. Je suis très content que Isabelle, Maxime et Julien aient décidé de sacrifier leur temps libre pour venir assister à ces mini-cours d'une durée de trois jours. Une expérience vraiment enrichissante et merveilleuse. Une expérience que j'espère rééditer l'été prochain!

Christophe

# Avant-propos d'Yvik

C'EST LA FAUTE À CHRISTOPHE ! Pour ma dernière année d'assistant au département de mathématique de l'ULB, j'ai eu la double chance d'avoir une classe remplie d'étudiants talentueux (dont certains sont en plus luxembourgeois) et d'avoir l'aide d'un jeune chercheur en statistiques (lui aussi luxembourgeois). Ce garçon jovial a apporté un vent de fraîcheur et d'enthousiasme pour l'enseignement des probabilités que nous ne pouvions laisser retomber une fois l'année finie. Sous son impulsion, nous avons donc décidé de poursuivre le mouvement lancé pendant l'année scolaire en dehors du cadre strictement réglementaire. Pour ce faire, nous avons imaginé créer une sorte d'école d'été, pendant laquelle nous enseignerions aux étudiants qui le souhaiteraient certains aspects des mathématiques qui sortent des sentiers battus. Cette première école d'été, pompeusement intitulée "Brussels Summer of Probability and Optimization" est donc née de l'ambition – démesurée ? – de motiver de futurs mathématiciens à ne pas voir en leur discipline qu'une austère succession de vérités abstraites, mais plutôt une source d'amusements et de joies pour quiconque se donne la peine d'élargir un peu son horizon. L'enthousiasme communicatif de Christophe a permis de motiver trois étudiants de première année à quitter leur plage (espagnole, cannoise ou luxembourgeoise) pour s'installer sur les bancs de l'école, et découvrir de nouvelles choses. Les quelques pages qui suivent sont le compte-rendu de cette première expérience que nous espérons voir grandir et se développer dans les années à venir.

Yvik

# Chapitre 1

## Au royaume des probabilités

CE PREMIER CHAPITRE sert de doux rappel des bases du calcul de probabilités. Nous nous y attaquons à divers problèmes auxquels nous apportons une réponse élégante et rigoureuse, que ce soit à l'aide d'arguments intuitifs ou purement computationnels. Nous concluons le chapitre par une mise en garde : même si elle est indispensable, l'intuition peut s'avérer trompeuse et il faut se garder de s'y fier sans discernement !

### 1.1 Quelques échauffements

#### 1.1.1 QUAND LE PARAMÈTRE TRANSCENDE

On tire au sort une variable aléatoire  $X_N$  en  $N$  temps de la façon suivante : on tire d'abord une variable aléatoire  $X_1$  selon la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  ; le tirage ayant donné la valeur  $X_1 = x_1$ , on tire ensuite la variable aléatoire  $X_2$  selon la loi  $\mathcal{B}(x_1, p)$  ; ce tirage ayant donné la valeur  $X_2 = x_2$ , on tire ensuite la variable aléatoire  $X_3$  selon la loi  $\mathcal{B}(x_2, p)$  et ainsi de suite jusqu'à tirer la variable aléatoire  $X_N$  selon la loi  $\mathcal{B}(x_{N-1}, p)$ . Quelle est la loi de  $X_N$  ?

#### SOLUTION : APPROCHE INTUITIVE

Imaginons  $n$  personnes auxquelles nous demandons d'effectuer (individuellement)  $N$  expériences consécutives de probabilité de succès  $p$  et définissons  $X_1$  comme le nombre de personnes ayant réussi la première expérience,  $X_2$  le nombre de personnes ayant réussi les deux premières,  $X_3$  le nombre de personnes ayant réussi les trois premières etc. Clairement  $X_1$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . De même, si  $x_1$  personnes ont réussi la première expérience, alors  $X_2$  suivra la loi  $\mathcal{B}(x_1, p)$  vu qu'elle compte le nombre de réussites de la deuxième *parmi ceux* qui ont réussi la première. En poursuivant le même raisonnement, nous voyons que pour tout  $j = 3, \dots, n$  la variable  $X_j$  sera de loi

$\mathcal{B}(x_{j-1}, p)$  : nous sommes donc dans une situation identique à celle de l'énoncé. Or, en élargissant notre point de vue, nous pouvons envisager la suite de  $N$  expériences comme une grande expérience (appelons-la  $N$ -expérience) de probabilité de succès  $p^N$  (probabilité de réussir les  $N$  petites expériences). Dans cette optique,  $X_N$  compte le nombre de personnes réussissant la  $N$ -expérience, et donc suit une loi  $\mathcal{B}(n, p^N)$ .

**Remarque 1.** *Le raisonnement utilisé permet de généraliser aisément la solution si la probabilité de succès vaut  $p_i$  pour la variable aléatoire  $X_i$ . Nous obtenons simplement*

$$X_N \sim \mathcal{B}\left(n, \prod_{i=1}^N p_i\right).$$

#### SOLUTION : APPROCHE COMPUTATOIRE

Soit  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  et supposons que  $X_j$  suive une loi  $\mathcal{B}(n, p^j)$ . Dès lors, pour tout  $k$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{j+1} = k] &= \sum_{l=0}^n \mathbb{P}[X_{j+1} = k \mid X_j = l] \mathbb{P}[X_j = l] \\ &= \sum_{l=k}^n \binom{l}{k} p^k q^{l-k} \binom{n}{l} (p^j)^l (1-p^j)^{n-l}. \end{aligned}$$

Simplifions les notations en posant :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{j-1} p^i,$$

ce qui nous permet d'écrire  $(1-p^j)^{n-l} = q^{n-l} \alpha^{n-l}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{j+1} = k] &= p^k q^{n-k} \sum_{l=k}^n \frac{l!}{k!(l-k)!} \cdot \frac{n!}{l!(n-l)!} (p^j)^l \alpha^{n-l} \\ &= p^k q^{n-k} \frac{n!}{k!} \sum_{l=k}^n \frac{(p^j)^l \alpha^{n-l}}{(l-k)!(n-l)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\ &= p^k q^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{l=k}^n \binom{n-k}{l-k} (p^j)^l \alpha^{n-l}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous plus particulièrement à la somme en posant  $l' = l - k$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=k}^n \binom{n-k}{l-k} (p^j)^l \alpha^{n-l} &= \sum_{l'=0}^{n-k} \binom{n-k}{l'} (p^j)^{l'+k} \alpha^{n-k-l'} \\
 &= (p^j)^k \sum_{l'=0}^{n-k} \binom{n-k}{l'} (p^j)^{l'} \alpha^{n-k-l'} \\
 &= (p^j)^k (p^j + \alpha)^{n-k} \\
 &= (p^j)^k \left( \sum_{i=0}^j p^i \right)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

*In fine,*

$$\begin{aligned}
 P[X_{j+1} = k] &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (p^j)^k \left( \sum_{i=0}^j p^i \right)^{n-k} \\
 &= \binom{n}{k} (p^{j+1})^k (1-p^{j+1})^{n-k},
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $X_{j+1}$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p^{j+1})$ . Comme  $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p)$ , la récurrence est initialisée, achevant ainsi la démonstration.

### 1.1.2 ASTROPHYSIQUE PROBABILISTE

La planète Zorg est une boule de centre  $O$ . Trois vaisseaux (que nous appellerons  $A$ ,  $B$  et  $C$ ) atterrissent au hasard sur la surface de Zorg, leurs positions étant indépendantes et distribuées de manière uniforme sur la surface. Deux vaisseaux  $A$  et  $B$  (par exemple) peuvent communiquer par radio si l'angle  $AOB$  est plus petit que  $90^\circ$ . On vous demande de montrer que la probabilité que les trois vaisseaux puissent communiquer (avec, par exemple,  $A$  qui communique avec  $C$  via  $B$  si nécessaire) est donnée par  $(\pi + 2)/(4\pi)$ .

#### SOLUTION

Etant donnée la parfaite symétrie de la planète Zorg, nous fixerons arbitrairement le pôle Nord au point  $A$ . Par ailleurs, comme nous ne travaillerons qu'avec la surface ou des portions de surface de la planète Zorg, il n'est pas restrictif de supposer que celle-ci a un rayon de 1. Une fois considérée la position du vaisseau  $A$ , deux cas sont à envisager :

1. les vaisseaux  $B$  et  $C$  peuvent communiquer directement avec  $A$  ;
2. un des deux autres vaisseaux n'a pas de liaison directe avec  $A$ .

Le premier cas est assez simple : il suffit que  $B$  et  $C$  atterrissent (azorguissent ?) dans l'hémisphère dont  $A$  est le pôle, ce qui se produit avec une probabilité de  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . Le deuxième cas est plus subtil et nécessite l'usage simultané des probabilités continues et des intégrales doubles.

Remarquons d'abord que, lorsque les positions de  $A$  et  $B$  sont arrêtées, il existe toujours des zones où  $C$  peut atterrir afin que la communication reste possible. Dès lors, le calcul de la probabilité du deuxième cas s'obtiendra en intégrant sur la position de  $B$  la probabilité pour que  $C$  assure la communication (soit en servant de lien entre  $A$  et  $B$ , soit en se servant de  $B$  pour atteindre  $A$ ). En utilisant les coordonnées sphériques usuelles (il est sous-entendu que nous sommes dans le cas où un des trois vaisseaux se trouve dans l'hémisphère Sud), un abus flagrant de notations nous permet d'écrire

toujours ??

$$P[\text{communication}] = \iint_{\text{Zorg}} P[\text{communication} \mid B = (\theta, \varphi)] P[B = (\theta, \varphi)].$$

Le dernier facteur de l'intégrale ci-dessus,  $P[B = (\theta, \varphi)]$ , doit bien sûr être remplacé par la fonction de densité de  $B$ , qui vaut, sur toute la surface de la planète Zorg,  $\frac{1}{4\pi}$ . Le premier facteur est quant à lui moins immédiat à obtenir, et nécessite de faire la distinction entre différentes configurations selon la position de  $B$  :

1. Si  $B$  est dans l'hémisphère Nord ( $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ),  $C$  doit se trouver dans l'hémisphère Sud tout en formant un angle inférieur à  $\frac{\pi}{2}$  avec  $B$ , ce qui nécessite que  $C$  atterrisse dans un fuseau d'angle  $\theta$ . Ceci se produit avec une probabilité de  $\frac{2\theta}{4\pi}$ .
2. Si  $B$  est dans l'hémisphère Sud ( $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ),  $C$  doit se trouver dans le fuseau qui lui permet de communiquer avec  $A$  et  $B$ , qui est d'angle  $\theta - 2(\theta - \frac{\pi}{2}) = \pi - \theta$ . Ceci se produit avec une probabilité de  $\frac{2(\pi - \theta)}{4\pi}$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P[\text{communication}] &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P[\text{communication} \mid B = (\theta, \varphi)] \frac{1}{4\pi} \sin \theta \, d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\theta \sin \theta}{4\pi} \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{2(\pi - \theta) \sin \theta}{4\pi} \, d\theta \right] d\varphi \\ &= \frac{2}{16\pi^2} \cdot 2\pi \left[ [-\theta \cos \theta + \sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi [\cos \theta]_{\frac{\pi}{2}}^\pi + [\theta \cos \theta - \sin \theta]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

En additionnant la probabilité du deuxième cas, nous obtenons bien  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi+2}{4\pi}$ , ce que nous devons démontrer.

**1.1.3 THÉORIE DES NOMBRES PROBABILISTE**

Soit  $s > 1$ , et définissons  $\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n^{-s}$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans  $\mathbb{N}_0$  satisfaisant

$$P[X = n] = P[Y = n] = n^{-s} / \zeta(s).$$

1. Prouver que les événements ( $E_p : p$  premier), où  $E_p = \{X \text{ est divisible par } p\}$ , sont indépendants.
2. Expliquer, par un raisonnement probabiliste, la formule d'Euler :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s}).$$

3. Prouver que

$$P[X \text{ n'est divisible par aucun nombre élevé au carré autre que } 1] = 1/\zeta(2s).$$

4. Soit  $H$  le plus grand commun diviseur de  $X$  et  $Y$ . Montrer que

$$P[H = n] = n^{-2s} / \zeta(2s).$$

**SOLUTION**

Soient  $s$  un réel ( $s > 1$ ) et  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts.

1. Nous devons montrer, pour  $p \neq q$  :

$$P[E_p \cap E_q] = P[E_p] P[E_q]$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} P[E_p] &= P[\exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } X = kp] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P[X = kp] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(kp)^{-s}}{\zeta(s)} \\ &= \frac{p^{-s}}{\zeta(s)} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k^{-s} \\ &= p^{-s}, \end{aligned}$$

et, en suivant le même raisonnement, que

$$\begin{aligned}
 P[E_p \cap E_q] &= P[X \text{ est divisible simultanément par } p \text{ et } q] \\
 &= P[\exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } X = kpq] \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P[X = kpq] \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(kpq)^{-s}}{\zeta(s)} \\
 &= (pq)^{-s}.
 \end{aligned}$$

La clé du raisonnement réside dans l'égalité

$$P[X \text{ est divisible par } p_1, \dots, p_l] = P\left[\exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } X = k \prod_{i=1}^l p_i\right],$$

qui est vérifiée aussi longtemps que les  $p_i$  sont premiers entre eux (ce qui est nécessairement vrai puisqu'ils sont premiers et distincts deux à deux). Nous en déduisons donc l'indépendance totale des événements ( $E_p : p$  premier).

2. Par construction,  $\frac{1}{\zeta(s)} = P[X = 1]$ . Or, 1 est le seul naturel qui n'est divisible par aucun nombre premier. Nous pouvons donc en déduire la formule d'Euler, grâce à l'indépendance précédemment prouvée :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\zeta(s)} &= P[\text{aucun nombre premier ne divise } X] \\
 &= \prod P[\neg E_p] \\
 &= \prod (1 - P[E_p]) \\
 &= \prod (1 - p^{-s}).
 \end{aligned}$$

les produits s'entendent sur tous les nombres premiers — convention dont nous userons tout au long de cette section

3. Notons  $p \mid q$  et  $p \nmid q$ , respectivement «  $p$  divise  $q$  » et sa négation. En appliquant le même raisonnement qu'aux points précédents, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
 P[p^2 \mid X] &= P[\exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } X = kp^2] \\
 &= p^{-2s},
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de voir que les événements  $E_{p_1^2}, \dots, E_{p_l^2}$  sont également totalement indépendants. Il découle alors rapidement que la probabilité pour qu'aucun nombre élevé au carré autre que 1 ne divise  $X$  vaut

$$\begin{aligned}
 \prod_p P[p^2 \nmid X] &= \prod (1 - p^{-2s}) \\
 &= \frac{1}{\zeta(2s)}.
 \end{aligned}$$

**Remarque 2.** *Le raisonnement utilisé se généralise très aisément pour démontrer que, pour  $r$  naturel :*

$$P[\text{aucune } r^e \text{ puissance autre que 1 ne divise } X] = \frac{1}{\zeta(rs)}.$$

4. Par indépendance et définition du plus grand commun diviseur de deux nombres, nous démarrons par l'égalité suivante :

$$P[H = n] = P[n \mid X] P[n \mid Y] P\left[\text{pgcd}\left(\frac{X}{n}, \frac{Y}{n}\right) = 1 \mid (n \mid X), (n \mid Y)\right].$$

Or il est aisé de montrer que, sous la condition  $n$  divise  $X$ ,  $\frac{X}{n}$  suit la même loi que  $X$ . Nous obtenons alors

$$P[H = n] = n^{-2s} P[H = 1], \quad (1.1)$$

et donc

$$\begin{aligned} P[H = 1] &= P[\text{aucun nombre premier ne divise simultanément } X \text{ et } Y] \\ &= \prod P[p \text{ ne divise pas simultanément } X \text{ et } Y] \\ &= \prod (1 - P[p \mid X \wedge p \mid Y]) \\ &= \prod (1 - p^{-2s}) \\ &= \frac{1}{\zeta(2s)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

**Remarque 3.** *Une méthode plus rapide pour déterminer ce dernier facteur est d'additionner les relations de (1.1) pour obtenir*

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} P[H = 1].$$

## 1.2 Le problème des fournisseurs

Considérons un système à deux ampoules qui fonctionne aussi longtemps qu'au moins une des deux ampoules, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, est encore en bon état de fonctionnement. Supposons par ailleurs que nous ayons deux fournisseurs de telles ampoules, que nous noterons  $F_1$  et  $F_2$ . Dès lors, trois cas sont envisageables : commander les deux ampoules chez  $F_1$ , commander les deux ampoules chez  $F_2$  ou alors commander une ampoule chez  $F_1$  et l'autre chez  $F_2$ . Bien entendu,

si les ampoules fournies par  $F_1$  sont en tout point meilleures que celles fournies par  $F_2$ , il est préférable d'appliquer la première des trois tactiques citées ci-dessus. Par contre, si les ampoules des deux fournisseurs sont de qualité équivalente (mais pas identique), il est naturel de se demander s'il vaut mieux se restreindre à un seul des deux fournisseurs pour les deux ampoules, ou alors acheter une ampoule de chacun ?

Ce premier exemple peut, à priori, paraître artificiel. Cependant, il illustre à merveille bon nombre de situations qui se retrouvent dans la vie quotidienne : un hôpital alimenté par deux sources électriques, un épicier devant choisir entre un ou deux fournisseurs, un particulier hésitant entre deux lignes téléphoniques (même opérateur pour le fixe et pour le portable ?), ... Dans chacun de ces cas, un décideur est confronté au choix de plusieurs fournisseurs pouvant lui procurer un même service, et doit répondre à l'éternelle question : *vaut-il toujours mieux mettre ses oeufs dans un même panier ?*

En termes mathématiques, la question se traduit de la façon suivante. Notons  $G_1$  et  $G_2$  la distribution des durées de vie des ampoules fournies respectivement par le fournisseur  $F_1$  et le fournisseur  $F_2$ . Notons également  $Z_1$  et  $Z_2$  les durées de vie des deux ampoules, que nous supposons indépendantes. On cherche alors à maximiser  $E[\max(Z_1, Z_2)]$  parmi les trois situations suivantes : soit on prend  $Z_1, Z_2$  i.i.d. de loi  $G_1$ , soit  $Z_1, Z_2$  i.i.d. de loi  $G_2$ , soit  $Z_1$  de loi  $G_1$  et  $Z_2$  de loi  $G_2$ .

Le reste de cette section est dédié à la résolution de ce problème. Toutefois, un bon mathématicien ne pourrait se satisfaire d'un cas particulier. Nous allons donc nous adonner au passe-temps favori du mathématicien joyeux : la généralisation. À cet effet, appelons  $n$ -groupe une famille de  $n$  variables aléatoires indépendantes. Si ces variables sont identiquement distribuées, on parlera de  $n$ -groupe similaire. La performance d'un tel  $n$ -groupe correspondra alors à l'espérance mathématique du maximum de ses éléments.

Nous adopterons les notations suivantes :

- $X_i$  est un élément quelconque du  $i^{\text{e}}$   $n$ -groupe ;
- $X_i^j$  est le  $j^{\text{e}}$  élément du  $i^{\text{e}}$   $n$ -groupe ;
- $X_i^{(n)} = \max(X_i^1, \dots, X_i^n)$  et  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$  ;
- $M_i = E[X_i^{(n)}]$  et  $\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$ .

**Théorème 1.** *Soit un  $n$ -groupe  $X_1, \dots, X_n$  où chaque variable aléatoire  $X_i$  est positive et issue d'un  $n$ -groupe similaire avec  $E[X_i^{(n)}] = M_i$ . Alors nous avons*

$$E[X_{(n)}] \geq \bar{M}.$$

*De plus, nous avons l'égalité si et seulement si les  $X_i$  sont indépendants et identiquement distribués (en d'autres termes, ils forment un  $n$ -groupe similaire).*

*Démonstration.*

Puisque la moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique, il est facile de voir que

$$1 - u_1 u_2 \dots u_n \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - u_i^n). \quad (1.2)$$

Comme les  $X_i$  sont des variables aléatoires positives, il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[X_{(n)}] = \int_0^\infty [1 - F_1(x)F_2(x)\dots F_n(x)] dx \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty [1 - F_i^n(x)] dx = \bar{M},$$

où  $F_i$  est la fonction de répartition associée à la variable aléatoire  $X_i$ . De plus, l'inégalité (1.2) se transforme en égalité si et seulement si les  $u_i$  sont tous égaux, en d'autres termes  $\mathbb{E}[X_{(n)}] = \bar{M}$  si et seulement si  $F_1 = F_2 = \dots = F_n$ . ■

Ce théorème confirme donc l'adage populaire selon lequel il ne faut *pas* mettre tous ses oeufs dans le même panier (ou nëmmen op ee Päerd setzen<sup>1</sup>). En effet, il nous révèle que la performance moyenne de deux fournisseurs se situe au-dessus de la performance à laquelle on pourrait s'attendre en se restreignant uniquement à un des deux fournisseurs. En d'autres mots, nous avons toujours intérêt à « mixer » les fournisseurs si nous ne disposons pas d'autres contraintes.

### 1.3 Le paradoxe de Monty Hall

Ce paradoxe, inspiré du jeu télévisé américain *Let's make a Deal*, a fait couler beaucoup d'encre (et de fiel) au sein de la communauté mathématique. Il est ainsi nommé en honneur du présentateur Monty Hall, qui à la fin de chaque émission proposait au candidat ayant le gain le plus important de miser ce gain pour gagner une voiture. En découla un célèbre problème mathématique, pour la première fois posé dans *Parade Magazine* en septembre 1990 dans la rubrique *Ask Marilyn* de Marilyn vos Savant, la personne avec le plus haut quotient intellectuel sur Terre (QI de 228). En voici l'énoncé :

*Supposez que vous êtes sur le plateau d'un jeu télévisé, face à trois portes et que vous devez choisir d'en ouvrir une seule, en sachant que derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres des chèvres. Vous choisissez une porte, disons la numéro 1, et le présentateur, qui lui sait ce qu'il y a derrière chaque porte, ouvre une autre porte, disons la numéro 3, porte qui une fois ouverte découvre une chèvre. Il vous demande alors : « Désirez-vous ouvrir la porte numéro 2 ? ». A votre avis, est-ce à votre avantage de changer de choix et d'ouvrir la porte 2 plutôt que la porte 1 initialement choisie ? <sup>2</sup>*

<sup>1</sup>ndlr : adage luxembourgeois

<sup>2</sup>cf wikipedia

Marylin vos Savant a soutenu qu'il était avantageux de changer de choix, ce qui a suscité le courroux de bon nombre de mathématiciens, qui se sont adonnés à un véritable exercice d'insultes envers Marylin vos Savant :

- *May I suggest that you obtain and refer to a standard textbook on probability before you try to answer a question of this type again?* (Charles Reid, Ph.D. University of Florida)
- *I am sure you will receive many letters on this topic from high school and college students. Perhaps you should keep a few addresses for help with future columns.* (W. Robert Smith, Ph.D. Georgia State University)
- *You blew it, and you blew it big! Since you seem to have difficulty grasping the basic principle at work here, I'll explain. After the host reveals a goat, you now have a one-in-two chance of being correct. Whether you change your selection or not, the odds are the same. There is enough mathematical illiteracy in this country, and we don't need the world's highest IQ propagating more. Shame!* (Scott Smith, Ph.D. University of Florida)

Ces trois commentaires illustrent la teneur de près de 10.000 lettres de réclamation envoyées à la rédaction de *Parade Magazine* après publication des conclusions de Marylin vos Savant. Pourtant, malgré l'érudition des contestataires, la solution de Marylin est correcte, bien que contre-intuitive. Nous allons maintenant vous le démontrer.

Imaginons que la voiture se situe derrière la deuxième porte, et qu'il y a des chèvres derrière les deux autres portes. Trois cas de figure se présentent alors :

- (i) Le candidat choisit la porte 1 avec une chèvre derrière. Le présentateur ouvrira forcément la porte 3  $\rightarrow$  le candidat gagne en changeant
- (ii) Le candidat choisit la porte 2 avec la voiture derrière. Le présentateur ouvrira soit la porte 1 soit la porte 3  $\rightarrow$  le candidat perd en changeant
- (iii) Le candidat choisit la porte 3 avec une chèvre derrière. Le présentateur ouvrira forcément la porte 1  $\rightarrow$  le candidat gagne en changeant

Deux des trois scénarios permettent de gagner ; il s'ensuit que la probabilité de gagner en effectuant un changement est de  $2/3$ , et donc qu'on a effectivement intérêt à changer !

L'appellation de "paradoxe" pour ce problème à priori anodin provient de ce qu'à première vue, il semblerait que l'ouverture d'une porte par le présentateur ne change en rien l'équiprobabilité des deux portes restantes. Pourtant, la clé de voûte de ce raisonnement réside dans le comportement du présentateur. En effet, ce dernier *sait* où se trouve la voiture, et donc en ouvrant une porte, il implante son savoir dans le jeu, ce qui fait que les deux portes restantes ne sont justement *plus* équiprobables à ce stade-là. Le tout changerait si le présentateur ne connaissait pas l'emplacement de

la voiture ou s'il ouvrirait une porte *avant* que le candidat n'eût fait son choix (ce qui, bien évidemment, transformerait le problème en un bête choix entre deux portes).

Pas convaincu(e)s ? Imaginons alors mille portes, dont on choisit une, disons la porte 3 ; le présentateur ouvre alors 998 portes, à l'exception de la porte 144. Changer ou garder sa porte ? On est déjà bien plus tenté de changer... alors que la situation en tant que telle est exactement la même que pour le cas de trois portes.

Toujours pas convaincu(e)s ? Bon, prenons alors notre courage à deux mains et ayons recours au théorème de Bayes pour résoudre le problème. Notons  $P_i$  l'événement « la voiture se situe derrière la porte  $i$  » et  $O_i$  l'événement « le présentateur ouvre la porte  $i$  ». Clairement,  $\cup_{i=1}^3 P_i = \Omega$ , et donc on dispose bien d'une partition de l'ensemble fondamental. Nous allons maintenant étudier une situation précise, à savoir celle où le candidat a choisi la porte 3. Le présentateur ouvre alors forcément la porte 1. Quelle est *maintenant* la probabilité que la voiture se situe derrière la porte 2 ?

$$P[P_2|O_1] = \frac{P[O_1 | P_2] P[P_2]}{\sum_{i=1}^3 P[O_1 | P_i] P[P_i]} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} * (0 + 1 + \frac{1}{2})} = \frac{2}{3},$$

ce qui montre bien que changer de porte donne effectivement 2 chances sur trois de gagner.

Convaincu(e)s ? On l'espère ...

## Chapitre 2

# Le principe d'optimalité appliqué aux Jeux Olympiques

QUI EST LE ROI de l'athlétisme ? Qui en est la reine ? Certes, des médaillés d'or aux Jeux Olympiques, mais qui sont ceux ou celles qui se distinguent encore davantage du reste ? De prime abord on pourrait penser aux vainqueurs de courses phares telles le 100m ou le marathon. Les vainqueurs de telles compétitions sont, à juste titre, considérés comme de grands champions, mais sont-ils pour autant les rois incontestés ? La réponse à cette question est négative : la reine de l'athlétisme est la femme qui remporte le heptathlon, et roi devient l'homme qui dominera le décathlon. En effet, ces deux disciplines combinent des épreuves différentes (et parfois antithétiques), comme par exemple le 100 m, le saut en hauteur, en longueur, des épreuves de force ou encore d'endurance. Les vainqueurs de ces épreuves sont donc des athlètes complets, qui méritent leur couronne.

Il est clair que l'entraînement d'un tel athlète doit être bien dosé ; en effet, trop de muscles empêchent de bonnes performances au saut en hauteur, de même qu'un entraînement visant une endurance incroyable est défavorable à une course rapide. Sur toute l'année, l'athlète se voit donc soumis à un plan élaboré par son équipe d'entraîneurs, et établir un plan « optimal » n'est pas évident. Surtout la dernière semaine avant l'épreuve, où il s'agit de raffiner ses techniques par un entraînement quotidien. De plus, il est favorable de choisir un programme identique pour chaque journée, afin de ne pas déranger la concentration du futur champion. Se pose alors la question : comment choisir le programme d'entraînement de manière à optimiser les chances de victoire ?

Pour répondre à cette question, commençons par la traduire en langage mathématique. Pour ce faire, notons  $T$  le temps d'entraînement disponible chaque jour pour l'athlète, et  $d_i$  la durée de l'entraînement  $i$  (durée déterminée à l'avance de telle manière que l'entraînement soit le plus efficace) pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous supposons que  $T$  et  $d_i$  sont des entiers, tous deux multiples d'une unité d'entraînement. Sup-

posons également que nous soyons en mesure d'associer à chaque entraînement une *utilité*  $u_i$ , c'est-à-dire une mesure absolue de la nécessité de l'entraînement  $i$  pour une bonne réussite aux JO. En mathématiques, la question posée ci-dessus devient alors : comment maximiser  $\sum_{i \in I} u_i$  sous la contrainte  $\sum_{i \in I} d_i \leq T$  avec  $I$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  ?

Une méthode de résolution consiste à énumérer toutes les solutions possibles, qui sont au nombre de  $2^n$ . Or, ceci déboucherait sur une méthode de résolution tout à fait irréaliste ; si on suppose que l'évaluation d'une solution par ordinateur prend une milliseconde, alors pour  $n = 40$ , correspondant à  $2^{40}$  solutions, un ordinateur mettra environ 35 années pour déterminer le programme d'entraînement idéal. Mieux vaut donc trouver un algorithme plus rapide.

Que signifie « être rapide » dans le cas d'un algorithme ? Le critère de performance d'un algorithme est le temps d'exécution, encore appelé *complexité*, qui doit être considéré indépendamment de la machine utilisée. Ce temps d'exécution ne dépend que des opérations élémentaires  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\dots$  et est exprimé en fonction du nombre  $n$  (d'entraînements dans notre cas).

**Définition 1.** Soit  $f$  une fonction. On dit qu'une fonction  $g(n)$  est  $O(f(n))$  s'il existe des constantes  $c > 0$  et  $n_0 > 0$  telles que  $0 \leq g(n) \leq cf(n) \forall n \geq n_0$ .

Lors de l'exécution de l'algorithme d'énumération, il y a  $2^n$  choix possibles, pour chacun desquels il faudra effectuer au plus  $2(n-1)$  additions et 1 comparaison. Suivront finalement encore  $2^n - 1$  comparaisons pour déterminer la valeur la plus grande. Ceci prouve que la complexité de l'algorithme d'énumération est d'ordre  $O(n2^n)$ , et confirme notre intuition que cet algorithme n'est pas rapide.

Nous allons donc maintenant fabriquer un meilleur algorithme, en appliquant une célèbre devise d'informaticien : "divide and conquer". L'idée de la méthode est la suivante : le problème initial étant trop complexe, nous le subdivisons en sous-problèmes de plus en plus petits, jusqu'à tomber sur le plus petit sous-problème possible. Une fois ce dernier résolu de manière optimale, nous pouvons rebrousser chemin pour obtenir la solution optimale de sous-problèmes de plus en plus complexes, jusqu'à aboutir à la solution optimale au problème général.

En pratique, nous commençons par déterminer la solution optimale pour un nombre variable d'unités de temps  $t \in \{0, \dots, T\}$  dans le cas où il n'y a qu'un seul entraînement (solution triviale, par définition, qui consiste à effectuer le seul entraînement disponible si le temps nécessaire à sa réalisation est plus petit que le temps total dont nous disposons). En notant cette solution  $h_1(t)$ , nous obtenons

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \dots, d_1 - 1 \\ u_1 & \text{si } t = d_1, \dots, T. \end{cases}$$

Partant de là, considérons  $h_2(t)$ , à savoir le plan d'entraînement optimal en utilisant les deux premiers entraînements. De nouveau, il faut discuter en fonction de  $t$ , le

temps total imparti. Si  $t \in \{0, \dots, d_2 - 1\}$ , il ne sera pas possible d'effectuer le deuxième entraînement et, par conséquent,

$$h_2(t) = h_1(t).$$

En revanche, si  $t \in \{d_2, \dots, T\}$ , nous pouvons effectuer le deuxième entraînement (bien que, peut-être, pas le premier). Nous devons donc choisir la combinaison optimale des deux entraînements, et donc

$$h_2(t) = \max\{h_1(t), h_1(t - d_2) + u_2\}.$$

Notons maintenant  $h_m(t)$  la solution optimale en utilisant les entraînements de 1 à  $m \leq n$  et un temps limite  $t$ . La récurrence, portant sur l'indice  $m$ , se déduit aisément du raisonnement ci-dessus, et s'écrit

$$h_m(t) = \begin{cases} h_{m-1}(t) & \text{si } t = 0, \dots, d_m - 1 \\ \max\{h_{m-1}(t), h_{m-1}(t - d_m) + u_m\} & \text{si } t = d_m, \dots, T. \end{cases}$$

La valeur optimale du problème est  $h_n(T)$ , et s'obtient par application directe du "divide and conquer".

Quelle est la complexité d'un tel algorithme? Il est clair qu'il y a  $n$  étapes dans la récurrence, et qu'à chaque étape on fait au plus  $T$  additions et  $T$  comparaisons (ce qui comprend aussi les simples évaluations). Ainsi, dans le pire des cas, il y a  $2Tn$  opérations élémentaires à effectuer, et donc l'algorithme est de l'ordre de  $O(n)$ , autrement dit, il est linéaire.

**Remarque 4.** *En général un algorithme linéaire est considéré comme très rapide, mais il se peut très bien qu'il y ait moyen de faire mieux (par exemple  $O(\log(n))$ ). Toute proposition est la bienvenue!*

## Chapitre 3

# Théorie des graphes

LA RÉOLUTION DE CHACUN des problèmes pratiques décrits dans ce chapitre se base sur la théorie des graphes. Vous aurez donc un petit aperçu de l'utilité de cette branche des mathématiques.

### 3.1 Le problème du carrefour

On vient de construire un nouveau carrefour et on cherche à présent à régler les feux de telle manière qu'on puisse répartir les flux de circulation en groupes de voitures qui ne vont pas se croiser. Ainsi, les flux d'un même groupe auront le feu vert simultanément, alors que, pendant cette période, les autres flux auront le feu rouge. Se pose alors la question : comment régler les feux de manière optimale, c'est-à-dire de façon à ce que le temps d'attente moyen pour chaque voiture soit minimal ?

Afin d'utiliser la théorie des graphes pour la résolution de ce problème, nous devons tout d'abord définir les notions les plus élémentaires.

**Définition 2.**

- Un graphe non orienté  $G = (V, E)$  est composé d'un ensemble  $V$  de sommets et d'un ensemble  $E$  d'arêtes.
- Une arête est une paire (non ordonnée) de sommets. On note  $[v_i, v_j]$  l'arête reliant les sommets  $v_i$  et  $v_j$ .
- Deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  d'un graphe  $G$  sont dits adjacents si  $[v_i, v_j] \in E$ .

A titre d'illustration, considérons un exemple concret, qui est fourni par la figure 3.1. Nous allons procéder comme suit pour résoudre le problème : attribuons à chaque flux de circulation possible dans notre exemple un sommet dans un graphe  $G = (V, E)$ . Ceci débouche sur l'ensemble  $V$  suivant ( $XY$  désigne le flux de  $X$  vers  $Y$ ) :

$$V = \{AC, AD, BC, BD, CD, DC\}.$$

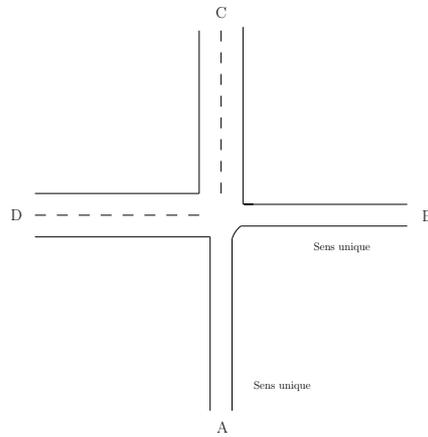


FIG. 3.1: Carrefour à deux sens uniques

En ce qui concerne les arêtes du graphe, nous relierons entre eux deux sommets si leurs flux correspondants se croisent. Ainsi nous obtenons (voir figure 3.2)

$$E = \{[AC, BC], [AC, BD], [AC, DC], [AD, BD], [AD, CD], [AD, DC], [BC, DC], [BD, CD], [BD, DC]\}.$$

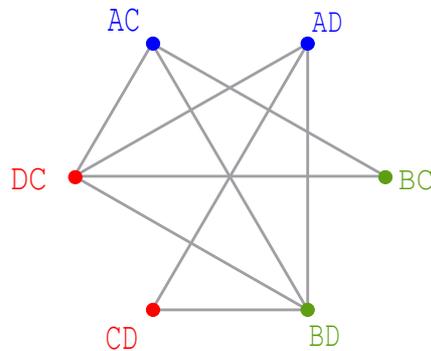


FIG. 3.2: Schématisation en graphe du carrefour, avec une coloration

Régler les feux rouges de façon optimale revient en théorie des graphes à chercher une partition minimale (en le nombre de groupes différents) des sommets de  $G$  qui assure que les flux d'un même groupe ne se croisent pas. En d'autres termes, on cherche à colorier le graphe de telle manière que des sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes, le tout dans l'objectif de minimiser le nombre total de couleurs. Le problème du carrefour se métamorphose donc en un problème de coloration de graphe.

Ici, il est facile de trouver une coloration qui n'utilise que trois couleurs différentes ; comment être sûr qu'il n'est pas possible de faire mieux ?

**Définition 3.**

- Une clique dans un graphe non orienté est un sous-ensemble  $C$  de sommets tel que  $\forall v_i, v_j \in C : [v_i, v_j] \in E$ . On note par  $\omega(G)$  le cardinal de la plus grande clique dans  $G$ .
- Une coloration réalisable d'un graphe non orienté  $G$  est une coloration des sommets de  $G$  telle que tous les sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. On note par  $\gamma(G)$  le nombre minimum de couleurs d'une coloration réalisable de  $G$ .

Il est clair que, quel que soit le graphe  $G$  considéré, on a toujours que  $\omega(G) \leq \gamma(G)$ . L'égalité n'est pas forcément garantie pour tout graphe. Néanmoins, si on arrive à trouver une coloration qui donne l'égalité, on sait qu'on est tombé sur une solution optimale. Il s'ensuit que trois est le nombre minimal de couleurs (donc de phases dans le carrefour) nécessaires dans notre exemple.

**EXERCICES**

En guise d'entraînement, nous vous suggérons de vous attaquer aux trois problèmes suivants.

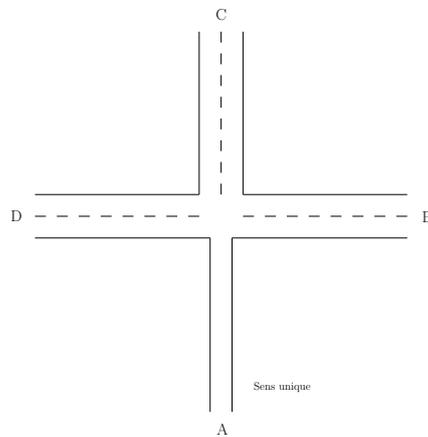


FIG. 3.3: Carrefour à un sens unique

1. Résoudre le problème du carrefour de la figure 3.3.
2. Tout carrefour dans votre environnement peut vous servir d'exemple.
3. Si vous avez un horaire à établir, n'hésitez pas non plus à vous servir de cette théorie.

### 3.2 Le problème du plus court chemin

Tout le monde sait que le plus court chemin entre  $A$  et  $B$  est le segment  $[A, B]$ . Or, on ne dispose pas toujours d'un hélicoptère pour se rendre par exemple de sa maison à un magasin qui va fermer dans dix minutes. Mieux vaut donc être capable de déterminer le chemin le plus court en suivant les routes existantes.

Le problème général est le suivant : considérons un ensemble de  $n$  villes (ou endroits, lieux, magasins, ...) séparées par des distances connues  $d_{ij}$  (longueur du chemin direct de la ville  $i$  à la ville  $j$ ; s'il n'existe pas de chemin direct, on pose  $d_{ij} = \infty$ ). Comment déterminer le chemin le plus court de la ville 1 à la ville  $n$  ?

Modélisons tout d'abord ce problème par un graphe, dans lequel chaque sommet représente une ville et chaque arête un chemin direct entre deux villes. La longueur d'une arête correspond bien sûr à la longueur du chemin qu'elle représente. Afin de mieux comprendre ce qui suit, il est indispensable de définir deux notions de base de la théorie des graphes :

**Définition 4.** Soit un graphe non orienté  $G = (V, E)$ .

- Un chemin dans  $G$  est une suite d'arêtes  $[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{k-1}, v_k]$  où  $v_1$  et  $v_k$  sont les extrémités du chemin.
- Un circuit dans  $G$  est un chemin dont les extrémités coïncident.
- Un graphe  $G$  est connexe s'il contient un chemin entre chaque paire de sommets de  $V$ .

N. B. : A partir d'ici, toute référence au mot « chemin » se rapporte à cette définition.

Il existe plusieurs algorithmes destinés à la résolution du problème de graphe exposé ci-dessus. Nous allons étudier dans la suite l'un des plus connus, à savoir l'algorithme de Dijkstra (qui n'est valide que pour des distances positives, donc applicable dans la vie de tous les jours). A cette fin, nous introduisons :

- un vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$ , où  $u_i$  désigne une distance provisoire de la ville 1 à la ville  $i$  ;
- un ensemble  $P$  contenant les villes déjà marquées (ce marquage sera explicité ci-dessous) ;
- un ensemble  $T$  contenant les villes non encore marquées.

L'algorithme de Dijkstra est basé sur les trois pas suivants :

**Pas 1** (initialisation) :

- $u_1 := 0$
- $u_j := d_{1j}$  pour tout  $j = 2, \dots, n$
- $P := \{1\}$
- $T := \{2, \dots, n\}$

**Pas 2** (marquage permanent) :

- Trouver  $k \in T$  tel que  $u_k = \min_{j \in T} u_j$
- $T := T \setminus \{k\}$
- $P := P \cup \{k\}$
- **Si**  $T = \emptyset$   
on s'arrête!
- **sinon**  
on passe au **Pas 3**.

**Pas 3** (mise à jour des étiquettes provisoires) :

- $u_j := \min\{u_j, u_k + d_{kj}\}$  pour tout  $j \in T$
- Retour au **Pas 2**.

Cet algorithme permet d'obtenir une solution du problème via un nombre limité d'opérations (il est de complexité  $O(n^2)$ ), et cette solution est optimale comme nous allons maintenant le démontrer.

*Démonstration.*

Remarquons tout d'abord que l'algorithme se termine en un temps fini; en effet, comme le nombre de villes est fini et qu'à chaque itération nous retirons une ville de l'ensemble  $T$ , nous arriverons bien à un moment donné à la situation  $T = \emptyset$ . Remarquons ensuite que, étant donné que les distances sont toutes positives, il existera toujours un chemin minimal passant par les villes de  $P$  et qui ne contient pas de circuit (le graphe est évidemment supposé connexe, sinon le problème n'a pas de sens). Nous pouvons donc nous concentrer sur ce qu'on appelle les chemins élémentaires (où on ne repasse pas par une certaine ville). Dès lors, la preuve repose entièrement sur les deux propriétés suivantes :

- a)  $\forall j \in T : u_j =$  longueur du plus court chemin de la ville 1 à la ville  $j$  qui ne passe que par des villes dans  $P$  (que nous appellerons respectivement, pour simplifier, *j-distance relative* et *j-chemin relatif*, en précisant  $P$  si nécessaire).
- b)  $\forall j \in P : u_j =$  longueur du plus court chemin de la ville 1 à la ville  $j$  (que nous appellerons respectivement *j-distance absolue* et *j-chemin absolu*).

Ces deux propriétés sont trivialement vraies lors de l'initialisation, puisqu'alors  $P = \{1\}$  et  $u_j = d_{1j}$ . Supposons à présent que ces propriétés sont vraies après la  $r$ -ième itération et montrons qu'elles restent valides après le  $(r+1)$ -ième passage par les pas 2 et 3.

- Lors de l'itération  $r+1$ , on choisit au Pas 2 la ville  $k$  telle que  $u_k = \min_{j \in T} \{u_j\}$ , puis on la retire à  $T$  pour l'ajouter à  $P$ . Il s'ensuit la mise à jour des étiquettes au Pas 3. Or, de par la définition même de cette mise à jour, le point a) est déjà satisfait, puisque, pour tout  $j \in T$ , la *j-distance relative*  $u_j$  prend comme valeur le minimum entre  $u_j$  et  $u_k + d_{kj}$ , le dernier terme étant la somme de la longueur du *k-chemin relatif* et de la distance entre la ville  $j$  et la ville  $k$ , qui appartient désormais à  $P$ .

- On vient donc de choisir la ville  $k$  dans  $T$  telle que  $u_k = \min_{j \in T} \{u_j\}$ . Par le point a), on sait maintenant que  $u_k$  représente la longueur du plus court chemin de 1 à  $k$  en ne passant que par des villes de  $P$ . Il s'agit de montrer que  $u_k$  est également la longueur du plus court chemin possible entre les villes 1 et  $k$ . Pour ce faire, ayons recours à une démonstration par l'absurde : supposons qu'il existe un chemin  $\mathcal{C}$  de 1 vers  $k$  dont la longueur est strictement inférieure à  $u_k$ . Alors, forcément, ce chemin doit passer par au moins une ville dans  $T$  (sinon on contredirait le point a)). Notons  $k'$  la première ville ainsi rencontrée au cours de  $\mathcal{C}$ . De nouveau grâce au point a), nous savons que  $u_{k'}$  désigne la plus courte distance de 1 à  $k'$  dans  $P$ , et comme  $k'$  est la première ville dans  $\mathcal{C}$  qui n'appartient pas à  $P$ , il suit que le plus court chemin de 1 vers  $k'$  a comme longueur  $u_{k'}$ . Or, comme  $u_{k'} \leq \text{distance}(\mathcal{C}) < u_k$ , nous nageons en pleine contradiction puisque  $u_k = \min_{j \in T} \{u_j\}$  ! Un tel chemin  $\mathcal{C}$  ne peut donc exister, ce qui établit la véracité de b).

Ces deux propriétés impliquent directement que l'algorithme de Dijkstra fournit bien le plus court chemin de la ville 1 à n'importe quelle autre ville, puisque, quand l'algorithme se termine,  $T$  est vide, et donc toutes les  $j$ -distances relatives sont devenues des  $j$ -distances absolues, de même que tous les  $j$ -chemins relatifs reçoivent le statut de  $j$ -chemins absolus. ■

**Remarque 5.** *La complexité de l'algorithme de Dijkstra est de l'ordre de  $O(n^2)$ ; notons ici qu'un algorithme à complexité polynomiale (qui comprend bien sûr le cas linéaire) figure parmi les algorithmes considérés comme rapides. Par ailleurs, un grand avantage de l'algorithme de Dijkstra par rapport à d'autres algorithmes de plus court chemin réside dans le fait qu'il donne le plus court chemin de la ville 1 à n'importe quelle autre ville, résultat qui a été établi dans la démonstration ci-dessus.*

**Remarque 6.** *Notre algorithme ne donne que la plus courte distance, mais il ne serait pas compliqué d'obtenir le tracé exact du chemin réalisant cette plus courte distance. En effet, il suffit de mémoriser le chemin emprunté à chaque étape pour l'obtenir.*

### 3.3 Le problème du postier

La tâche de tout postier est clairement définie : distribuer les lettres qu'on lui a remises, de telle manière que Monsieur X reçoit la lettre qui lui est destinée et pas celle qu'attend Madame Y. A cet effet, on attribue à tout postier une certaine route de travail. Il part donc de la centrale de tri, et (à moins qu'il ne fasse exagérément beau dehors et qu'il ait envie de traîner au soleil) cherche à terminer sa route au plus vite, c'est-à-dire revenir à son point de départ en étant passé par toutes les maisons sur sa route sans avoir fait de détours inutiles. Il aspire donc lui aussi à déterminer un plus court chemin. Facile, il n'a qu'à parler à un certain Monsieur Dijkstra qui lui donnera des précieux conseils. Précieux ? Oui, probablement, vu que M. Dijkstra est un mathématicien fort intelligent, mais en tout cas il devra élaborer

une toute nouvelle stratégie, car son fameux algorithme ne s'applique plus à cette situation-ci. En effet, notre postier ne cherche pas à aller d'un endroit à un autre le plus vite possible, mais à revenir au point de départ en étant passé par *toutes* les routes indiquées. De surcroît, il est aussi fort probable qu'il devra passer plusieurs fois par une même route, soit pour revenir soit pour gagner du temps. Donc, de manière générale, le postier parcourt les routes à deux vitesses différentes, selon qu'il distribue les lettres ou non. Sous toutes ces contraintes se pose alors la question : comment déterminer le parcours le plus rapide pour notre postier ?

A l'instar de la brillante résolution décrite dans la section précédente, ce problème se résout également en ayant recours, et ce de façon bien plus accentuée qu'avant, à la théorie des graphes. L'initiateur de cette théorie, le célèbre mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) a résolu un problème « similaire » à celui du postier en 1735, problème fort discuté à l'époque, celui des sept ponts de Koenigsberg. Ce problème se formule comme suit :

“ La ville de Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles reliées entre elles par un pont et six ponts relient le continent à l'une ou l'autre des deux îles. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Koenigsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.”<sup>1</sup>

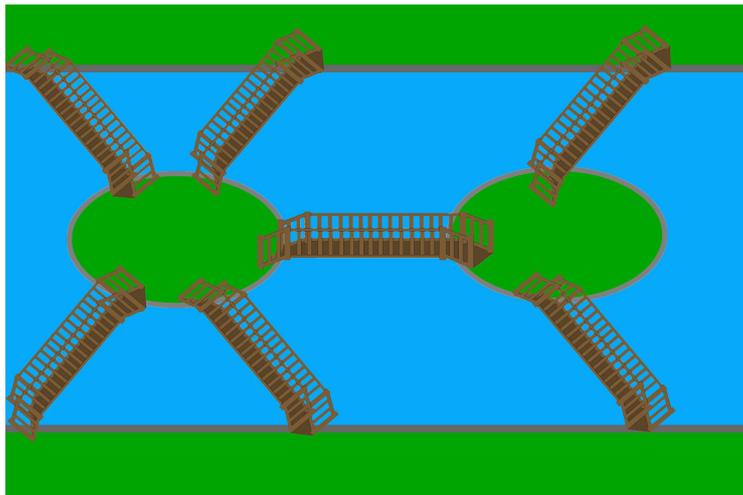


FIG. 3.4: Les sept ponts de Koenigsberg

Pour répondre à cette question, nous introduisons les notions et résultats suivants.

---

<sup>1</sup>cf wikipedia

**Définition 5.** Soit un graphe non orienté  $G = (V, E)$ .

- Un circuit eulérien est un circuit contenant exactement une fois chaque arête de  $E$ .
- Le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

**Théorème 2.** Un graphe connexe non orienté  $G = (V, E)$  contient un circuit eulérien si et seulement si chaque sommet de  $V$  est de degré pair.

*Démonstration.*

La condition nécessaire est immédiate, car, par définition, chaque fois que le circuit eulérien entre dans un sommet il doit en ressortir. Par conséquent, tout sommet est de degré pair.

Pour établir la condition suffisante, considérons un graphe connexe  $G$  dont tous les sommets sont de degré pair. On construit alors un circuit eulérien de la manière suivante :

- partir d'un sommet pour lequel il existe (encore) des arêtes incidentes, parcourir des arêtes jusqu'à revenir au sommet de départ. Ceci est possible car les sommets ont un degré pair et le graphe est supposé fini.
- éliminer le circuit ainsi obtenu. Les sommets restants gardent forcément des degrés pairs (comprenant le cas de degrés nuls).
- itérer jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'arêtes.

La connexité du graphe implique que tous les circuits construits sont reliés entre eux et forment ainsi un circuit eulérien. ■

La résolution du problème des sept ponts de Königsberg est maintenant facile (et laissée comme exercice). Comment appliquer cette théorie au problème de notre postier ? Associons au réseau routier donné un graphe connexe non orienté  $G = (V, E)$ .

- Si  $G$  contient un circuit eulérien, alors ce circuit est bien le circuit optimal pour notre postier.
- Si tel n'est pas le cas, alors forcément il faudra parcourir plusieurs arêtes plus d'une fois.

Dans le deuxième cas, comment déterminer ces arêtes de façon à ce que le chemin total soit le plus court ?

Considérons le trajet de notre postier. Toute route qui y apparaît plus d'une fois donnera lieu à une arête supplémentaire dans  $G$ , correspondant à ce trajet. Ceci conserve bien évidemment la connexité du graphe. En notant par  $d_e$  le temps de parcours de la route  $e$ , le problème se résume à la détermination d'un sous-ensemble  $E'$  de  $E$  tel que tout sommet  $v \in V$  a un degré pair pour  $E \cup E'$  (car, par le Théorème 2, pareille condition est équivalente au fait que  $G' = (V, E \cup E')$  contient un circuit eulérien) et tel que  $\sum_{e \in E'} d_e$  soit minimal. A cet effet, notons par  $V^0$  l'ensemble des sommets de degré pair et par  $V^1$  l'ensemble des sommets de degré impair dans  $V$ .

Clairement  $V = V^0 \cup V^1$ .

**Proposition 1.**

- $|V^1|$  est pair.
- On peut partitionner  $E'$  en un ensemble de  $\frac{|V^1|}{2}$  chemins dont les extrémités sont des sommets de  $V^1$ .

*Démonstration.*

- Rappelons que la somme des degrés d'un graphe vaut le double du nombre d'arêtes (puisque le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes et que chaque arête a deux extrémités), donc en particulier est paire. Or la somme des degrés pairs du graphe est elle-même évidemment paire et la somme des degrés impairs du graphe est une somme de  $|V^1|$  termes impairs : pour que la somme totale soit paire, il est par conséquent nécessaire que  $|V^1|$  soit lui-même pair.
- Par construction,  $G' = (V, E \cup E')$  contient un circuit eulérien. Ainsi, fatalement, il faut que le nombre d'arêtes de  $E'$  incidentes à un sommet de  $V^1$  soit impair et que celui d'arêtes incidentes à un sommet de  $V^0$  soit pair. Choisissons un sommet  $v \in V^1$  et construisons, à partir de  $v$ , un chemin ne contenant que des arêtes de  $E'$  jusqu'à aboutir en un autre sommet de  $V^1$ . Ceci est rendu possible grâce aux degrés pairs des sommets de  $V^0$  pour  $E'$ . Éliminons maintenant ce chemin et toutes les arêtes qui le constituent ; n'oublions pas de transférer les deux sommets extrêmes de ce chemin de  $V^1$  dans  $V^0$ . Itérons cette opération jusqu'à ce que  $V^1$  soit vide, ce qui correspond au total à  $\frac{|V^1|}{2}$  itérations. Les arêtes restantes forment un nouvel ensemble  $E''$  et ont toutes leurs extrémités dans  $V^0$ . Grâce au Théorème 2, nous savons donc que  $G'' = (V^0, E'')$  est eulérien, et peut donc être décomposé en circuits. ■

On en déduit que si  $E'$  contient un chemin de  $v$  à  $v'$  (les deux sommets étant bien entendu dans  $V^1$ ), alors ceci est un plus court chemin, puisqu'il ne contiendra pas de circuit de par la contrainte sur la distance totale à minimiser. Le problème est donc résolu... à ceci près qu'il manque encore la recette pratique pour pouvoir appliquer tous ces résultats théoriques ! Pour y aboutir, nous avons encore besoin des définitions suivantes.

**Définition 6.**

- Un graphe complet est un graphe qui possède une arête entre chaque paire de sommets.
- Un couplage dans un graphe  $G$  est un ensemble d'arêtes sans sommet commun.
- Un couplage parfait contient une arête incidente à chaque sommet, en d'autres termes tout sommet est « touché » par les arêtes du couplage parfait.

Etant donné un graphe de départ  $G = (V, E)$ , nous allons construire un graphe **complet** non orienté  $H = (V^1, F)$  ne contenant plus que les sommets de degré impair dans  $V$ . Comment déterminer l'ensemble  $F$ ? A chaque arête  $f = [v, v'] \in F$  est associé un « coût » (temps de parcours)  $d_f$  qui représente la longueur d'un plus court chemin de  $v$  à  $v'$  dans le graphe initial  $G$ . L'ensemble  $E'$  recherché s'obtient alors en cherchant un couplage parfait  $M$  de coût minimum dans  $H$  et en ajoutant les arêtes correspondantes dans le graphe de départ pour former  $E \cup E'$ . Un tel couplage parfait  $M$  existe-t-il toujours dans  $H$ ? Oui, puisque le nombre de sommets dans  $V^1$  est pair. Que vaut  $|M|$ ? Clairement  $|M| = \frac{|V^1|}{2}$ , et, étant donnée la perfection du couplage (c'est un couplage parfait!), nous savons dès lors que  $M$  contient tous les sommets et ce de manière à minimiser la distance totale à parcourir. Finalement, il est maintenant facile de voir que  $G' = (V, E \cup E')$  contient un circuit eulérien, qui sera la solution optimale au problème du postier.

**Remarque 7.** *La clé du raisonnement repose sur la complétude du graphe  $H$ , puisqu'elle nous oblige à relier entre eux TOUS les sommets de  $V^1$ , ce qui nous permet de tenir compte de toutes les routes supplémentaires envisageables.*

## Chapitre 4

# Le problème de la ruine pour 2 joueurs

DANS CE DERNIER CHAPITRE, nous allons brièvement aborder un phénomène fondamental dans l'histoire du développement de la théorie des probabilités : la *promenade aléatoire*. Ce concept simple et intuitif est une des pierres angulaires de la théorie des processus stochastiques et nous verrons que, malgré son apparente innocuité, il cache une forêt de résultats profonds et surprenants dont nous ne verrons que l'ombre...

### 4.1 La ruine du joueur

Soient  $S_0$  un nombre entier et  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de loi

$$P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = \frac{1}{2}.$$

Définissons la suite de sommes partielles  $S_n = S_0 + X_1 + \dots + X_n$ . Le processus  $S_0, S_1, S_2, \dots$  décrit la marche, dans le plan, d'une particule qui, à chaque étape, avance d'une unité horizontale et monte ou descend d'une unité verticale. On le nomme *promenade aléatoire*.

#### 4.1.1 PROBABILITÉ DE RUINE

La première question que nous chercherons à résoudre est la suivante :

*Supposons que  $S_0 = 0$ , et prenons deux nombres naturels  $A$  et  $B$ . Quelle est la probabilité que  $S_n$  atteigne la valeur  $A$  avant d'atteindre la valeur  $-B$  ?*

**Remarque 8.** *Ce problème est souvent connu sous le nom de Gambler's ruin, appellation qui peut se justifier comme suit. Considérons un joueur atavique, compulsif et excessivement riche, jouant plusieurs parties d'un jeu équilibré. S'il mise un euro à chaque partie, le processus  $S_n$  représentera sa fortune après les  $n$  parties. La question ci-dessus devient alors quelle est la probabilité que notre sympathique joueur gagne  $A$  euros avant d'en perdre  $B$ ?*

Répondre à cette question n'est pas une mince affaire. Nous nous y attelons donc en plusieurs phases, en nous inspirant de Steele (2001). Introduisons dans un premier temps la variable aléatoire *temps d'arrêt*  $\tau$  définie par

$$\tau = \min\{k \geq 0 \text{ tel que } S_k = A \text{ ou } S_k = -B\}$$

et définissons

$$f(k) = \mathbb{P}[S_\tau = A \mid S_0 = k], \text{ pour } -B \leq k \leq A.$$

Le problème initial revient, dans ces notations, à calculer  $f(0)$ .

Pour ce faire, remarquons tout d'abord que  $f(A) = 1$  et  $f(-B) = 0$ . De plus, en conditionnant par rapport au premier pas de la promenade, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_\tau = A \mid S_0 = k] &= \frac{1}{2} \mathbb{P}[S_\tau = A \mid S_0 = k \text{ et } X_1 = 1] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{P}[S_\tau = A \mid S_0 = k \text{ et } X_1 = -1]. \end{aligned}$$

Etant donné que

$$\mathbb{P}[S_\tau = A \mid S_0 = k \text{ et } X_1 = \pm 1] = f(k \pm 1),$$

nous obtenons la relation

$$f(k) = \frac{1}{2}f(k-1) + \frac{1}{2}f(k+1)$$

pour  $-B < k < A$ . Cette équation, combinée avec ses conditions initiales, définit une récurrence sur  $f(k)$  qui ne peut posséder qu'une unique solution. Celle-ci peut s'obtenir de multiples manières, dont une des plus simples est peut-être la suivante. Posons, provisoirement,  $f(-B+1) = \alpha$ . On obtient alors  $f(-B+2) = 2\alpha$ ,  $f(-B+3) = 3\alpha$  et, en poussant la logique un peu plus loin,  $f(k) = (k+B)\alpha$ . On en déduit, grâce aux conditions initiales, que

$$\mathbb{P}[S_\tau = A] = \frac{B}{A+B}, \tag{4.1}$$

et le problème est presque résolu.

**Remarque 9.** *On peut vérifier aisément que cette formule est raisonnable, en prenant par exemple  $A = B$  ou en laissant  $A$  filer à l'infini.*

L'équation (4.1) est un joli résultat, seulement voilà : il ne tient pas encore complètement étant donné que nous avons négligé le cas où  $\tau$ , la variable aléatoire temps d'arrêt, est infinie. Une telle éventualité serait source d'énormes problèmes car, dans ce cas, on chercherait à calculer  $P[S_\infty = A \mid S_0 = k]$ , expression mal définie vu que la promenade aléatoire ne converge pas ! Notre raisonnement ne tient donc la route que si  $\tau$  est finie presque sûrement et, avant de pouvoir se reposer sur des lauriers bien mérités, il nous faut donc prouver

(Pour s'en convaincre... on vous laisse réfléchir.)

$$P[\tau < \infty] = 1. \quad (4.2)$$

La route vers la vérité est encore semée d'embûches, que nous allons maintenant enjamber d'un pas svelte afin d'enfin pouvoir gambader gaiement dans les prés sacrés du savoir absolu représenté par la vérité mathématique.

Remarquons d'abord que, quelle que soit la position de la promenade aléatoire, une suite de  $A + B$  "+1" consécutifs suffira pour garantir que la barrière absorbante  $y = A$  sera dépassée. De plus, l'indépendance des pas permet aisément de voir que la probabilité de  $l$  montées consécutives est de  $(\frac{1}{2})^l$  et donc, en définissant  $E_k$  comme l'événement "gagner chaque partie de l'intervalle  $[k(A + B), (k + 1)(A + B) - 1]$ ", on obtient

$$P[E_k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B}.$$

Or on peut également montrer que les  $E_k$  sont indépendants pour tout  $k$ . Nous sommes donc en mesure de conclure que

$$P[\tau > n(A + B) \mid S_0 = 0] \leq (1 - p)^n, \quad (4.3)$$

pour  $p$  un réel compris entre 0 et 1. Etant donné que

$$P[\tau = \infty] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau > n(A + B)],$$

l'inégalité (4.3) nous garantit (4.2) et, dans le même élan, l'exactitude de (4.1).

#### 4.1.2 DURÉE MOYENNE DE L'ESPOIR DU JOUEUR

Evidemment, maintenant que nous avons prouvé la finitude de  $\tau$ , nous mourons d'envie de connaître son premier moment, non ? Pour le calculer, nous allons nous inspirer de la méthodologie décrite ci-dessus et définir  $g(k) = E[\tau \mid S_0 = k]$  : le problème revient à calculer  $g(0)$ . A nouveau, nous obtenons par conditionnement une relation de récurrence sur  $g(\cdot)$  de la forme

$$g(k) = \frac{1}{2}g(k - 1) + \frac{1}{2}g(k + 1) + 1, \quad (4.4)$$

avec les conditions de bord  $g(A) = g(-B) = 0$ . La présence d'un terme constant dans l'équation ci-dessus rend la récurrence moins aisée à résoudre que dans la section

précédente. Nous allons donc devoir utiliser une boîte à outils plus perfectionnée, et introduire la *dérivée forward* d'une fonction discrète définie par

$$\Delta g(k-1) = g(k) - g(k-1).$$

En appliquant (deux fois) cette dérivée discrète aux deux membres de (4.4), nous voyons que toute solution de (4.4) doit également satisfaire à

$$\frac{1}{2}\Delta^2 g(k-1) = -1 \text{ pour } -B < k < A.$$

Or une telle équation devrait vous inspirer l'intuition que  $g(\cdot)$  doit être quadratique en  $k$  pour être solution d'une telle relation (pour vous aider, il peut être utile de s'inspirer de l'équivalent continu de cette équation et de chercher des fonction dont la dérivée seconde est constante). Les conditions initiales suffisent alors pour obtenir la solution du problème, à savoir

$$g(k) = -(k-A)(k+B).$$

On en déduit la remarquable formule

$$E[\tau] = AB$$

qui, comme le dit si bien Michael Steele, est une merveille de simplicité – “*no better answer could even be imagined*”.

## 4.2 Quelques propriétés incongrues de la promenade aléatoire

Qui pense promenade aléatoire, pense naturellement aux coefficients binomiaux et (ah bon ?) aux nombreuses propriétés étranges et fascinantes que possèdent ces derniers. La faculté qu'ont ces coefficients de surprendre même le mathématicien le plus aguerri est également une des marques de fabrique de la promenade aléatoire. Pour vous en convaincre, nous vous suggérons de découvrir le sommet de l'iceberg en vous attaquant aux exercices suivants.

### MOMENTS DE TOUT ORDRE

Non seulement  $\tau$  est finie presque sûrement, mais en plus elle possède des moments de tout ordre. Pour le voir, vous pouvez par exemple utiliser l'inégalité

$$\tau^d \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^d (A+B)^d \mathbf{1}_{[(A+B)(k-1) < \tau]}.$$

**UNE PREMIÈRE BIZARRERIE**

Reprenons le fil de l'histoire de notre héros – le joueur atavique et compulsif – et imaginons qu'il souhaite arrêter. Seulement, tel un fumeur à la recherche de sa dernière dose de nicotine, il veut pouvoir partir la tête haute, avec un bénéfice dans la poche. Il décide donc de jouer la dernière partie de sa vie, qu'il n'arrêtera qu'après avoir empoché un euro.

Le but de cet exercice est de montrer que notre héros a raison : ce sera la dernière partie de sa vie, car le temps moyen qu'il lui faudra pour gagner son euro *est infini* ! Pour le prouver, vous pouvez par exemple définir la variable aléatoire temps d'arrêt  $\tau'' = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \mid S_k = 1 \text{ ou } S_k = -B\}$ , observer son comportement pour différentes valeurs de  $B$  et en déduire que, si  $\tau' = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \mid S_k = 1\}$ , alors

$$E[\tau'] = \infty.$$

**UNE DEUXIÈME BIZARRERIE**

Vous allez prouver la *propriété de récurrence* de la promenade aléatoire, c'est-à-dire vous allez prouver qu'avec probabilité 1 elle revient à l'origine une infinité de fois.

- Montrez que  $P[S_{2k} = 0] = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$ .
- Déduisez-en  $P[S_{2k} = 0] \sim (\pi k)^{-1/2}$ .
- Déduisez-en  $P[S_n = 0 \text{ pour un nombre infini de } n] = 1$ .

Que pouvez-vous déduire de ce dernier résultat au sujet de la quantité

$$P[S_n = l \text{ pour un nombre infini de } n]?$$

**UNE TROISIÈME BIZARRERIE**

Définissons  $N_k$  comme étant le nombre de visites de  $S_n$  par le niveau  $k$  avant le premier retour en 0. Clairement  $N_0 = 1$ . On a également

$$P[N_k > 0] = \frac{1}{2} \frac{1}{k} \text{ et } P[N_k > j + 1 \mid N_k > j] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{k-1}{k}.$$

Nous vous demandons d'en déduire que, pour tout  $k \neq 0$ ,

$$E[N_k] = 1.$$

# Remerciements

N OUS NE POUVONS CONCLURE cet Oeuvre sans remercier celui qui en a rédigé la première mouture, à savoir Maxime Gheysens. Il a organisé, compilé et complété les notes préparatoires que nous avons rédigées pour le BSPO.<sup>1</sup> Nous sommes également redevables à Isabelle Charlier et Maude Gathy pour leurs talents d'illustration qui ont permis d'égayer ces quelques pages. Enfin, merci à Isabelle Charlier, Maxime Gheysens et Julien Meyer pour leur participation active.

---

<sup>1</sup>Brussels Summer of Probability and Optimization, pour les initiés

# Bibliographie

- [1] Engel A. (1993), *The computer solves the three tower problem*, American Mathematical Monthly, 100(1), pp. 62-64.
- [2] Hamza K., Jagers P., Sudbury A. and Tokarev D. (2008), *The mixing advantage is less than 2*, preprint.
- [3] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O., (1989), *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley.
- [4] Steele J. M. (2001), *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, New-York.
- [5] Stirzaker D. (1994), *Tower Problems and Martingales*, The Mathematical Scientist, Vol. 19, pp. 52-59.
- [6] Williams D. (1991), *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks.

## La photo de groupe



Christophe Ley, Julien Meyer, Isabelle Charlier, Maxime Gheysens & Yvik Swan