

Autour de l'inégalité isopérimétrique

Denis Bonheure*
denis.bonheure@ulb.ac.be

François Thilmany**
francois.thilmany@ulb.ac.be

Résumé

Disposant d'une certaine longueur de clôture fixée, quelle est la forme qu'un fermier doit donner à son enclos afin d'offrir à ses vaches l'habitat le plus spacieux ? Cette question, naïve au premier abord, souligne très bien l'intérêt pratique des problèmes isopérimétriques, qui consistent en l'optimisation de l'aire d'une région dont le périmètre est contraint. La réponse, peut-être intuitive, n'est pas évidente à établir rigoureusement. Dans cet article, nous regarderons pas à pas différents types de régions et chercherons à chaque fois la solution optimale. Après avoir traité quelques cas plus simples, nous énoncerons et démontrerons l'inégalité isopérimétrique, réponse à la question du fermier dans le cas général. Pour finir, nous inviterons le lecteur à explorer le sujet en dimension plus élevée.

Sommaire

1	Introduction	94
2	Inégalité isopérimétrique pour domaines réguliers	97
3	Les espaces de Sobolev $W^{1,p}$	100
4	Retour à l'inégalité isopérimétrique	103
5	L'inégalité isopérimétrique en dimension n	107
6	Bibliographie	108

*Denis Bonheure est Chargé de cours auprès du Département de Mathématique de l'Université libre de Bruxelles. Il est titulaire d'un Doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université Catholique de Louvain, et d'une Licence en Sciences Mathématiques de l'Université libre de Bruxelles. Il étudie des problèmes aux limites de type elliptique.

**François Thilmany est étudiant en troisième année de Bachelor en Sciences Mathématiques à l'Université libre de Bruxelles. Il a réalisé son travail de Bachelor (sur les inégalités isopérimétriques) sous la direction de Denis Bonheure.

1 Introduction

La légende veut que Didon, ayant débarqué sur les côtes de l'actuelle Tunisie, demanda au roi de Numbie l'octroi d'une terre pour s'installer. Ce dernier lui accorda l'espace que pourrait contenir la peau d'un boeuf. Didon découpa donc la peau en une fine lamelle, la plus longue possible, et forma avec celle-ci un demi-cercle s'appuyant sur la côte, rectiligne à cet endroit. Elle avait trouvé (consciemment ou non) la solution à ce problème isopérimétrique : maximiser l'aire d'une surface dont le périmètre est fixé. Si ce n'est pour l'intérêt mathématique, cette légende nous montre malgré tout l'importance des questions isopérimétriques. Ainsi, de nombreux mathématiciens, depuis l'Antiquité, ont tenté de donner une réponse à la question suivante :

Dans le plan, parmi tous les domaines délimités par une courbe fermée de longueur fixée, quel est celui qui a la plus grande surface ?

Si on se limite uniquement à des domaines polygonaux, la solution était connue des Grecs, mais il a fallu attendre Weierstrass et le XIX^e siècle pour une preuve rigoureuse que cette solution est la bonne.

Si on restreint l'ensemble des domaines considérés aux rectangles, le problème devient élémentaire. La question est alors : *quel est, parmi tous les rectangles de périmètre fixé, celui qui possède l'aire la plus grande ?* Sans faire aucun calcul, l'intuition nous dit qu'il ne s'agira pas d'un rectangle quelconque mais bien du carré de côté $\frac{1}{4}$, c'est à dire du rectangle le plus symétrique. Vérifions notre intuition. Nommons donc x la longueur d'un tel rectangle. Sa largeur vaut alors $\frac{1}{2}L - x$. L'aire du rectangle s'écrit $x(\frac{1}{2}L - x) = \frac{1}{2}Lx - x^2$ et on vérifie sans peine que ce polynôme du second degré atteint son unique maximum lorsque x vaut $\frac{1}{4}L$.

On peut en réalité démontrer, ce n'est pas simple, que parmi tous les quadrilatères de périmètre fixé, c'est encore le carré qui maximise l'aire. Une observation élémentaire est qu'un tel quadrilatère sera nécessairement convexe, c'est-à-dire que les angles intérieurs formés par les côtés seront tous d'amplitudes inférieures à 180 degrés. Voyez-vous pourquoi ?

Dans cette note, nous allons présenter la réponse à cette question isopérimétrique et une preuve que l'on pourrait qualifier de preuve analytique, plusieurs approches étant possibles. L'énoncé de l'inégalité isopérimétrique ne fait intervenir que des concepts géométriques : l'aire et le périmètre d'une forme géométrique dans le plan. L'intuition que l'on peut se faire autour de celle-ci est, au premier abord, aussi géométrique : nous sommes portés à penser que c'est la symétrie, ou la « rondeur » d'un domaine qui permet à celui-ci d'optimiser son aire, de la même manière que des irrégularités dans ce dernier ne feront qu'augmenter le périmètre inutilement. Nous venons de sous-entendre que maximiser l'aire d'un domaine en connaissant son périmètre reviendrait à minimiser le périmètre d'un domaine dont nous connaissons l'aire. Pouvez-vous démontrer ce fait rigoureusement ?

L'intuition nous conduit donc à répondre que c'est bien le disque, de diamètre $\frac{1}{\pi}$, qui maximise l'aire parmi tous les domaines de périmètre L . Par ailleurs, le disque n'est-il pas le domaine plan qui possède le plus de symétrie ? Nous n'entrerons pas dans cette discussion et nous limitons à l'idée intuitive que l'on peut se faire de la symétrie d'un domaine.

Comment aborder le problème, comment montrer que notre intuition est la bonne ? Cette intuition paraît si évidente... Comment comparer une infinité de possibilités ? Posons-nous une question plus simple. *Parmi tous les domaines dans*

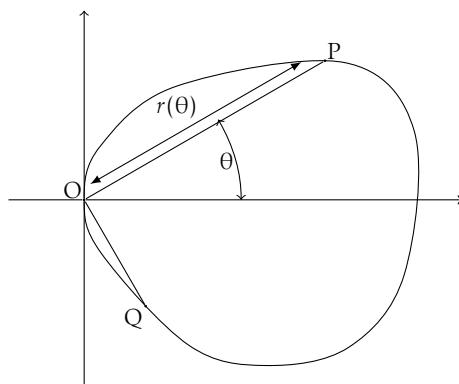


FIGURE 1 — Calcul de l'aire d'un domaine.

le plan de diamètre fixé d , quel est celui dont l'aire est maximale? Ici nous appelons *diamètre* la distance maximale entre deux points quelconques du domaine.

Appelons D un tel domaine, et munissons le plan d'un repère cartésien dont l'origine O se situe sur le bord de D , comme sur la figure 1. Supposons que l'on dispose d'une paramétrisation du bord de D en fonction de θ , l'angle polaire dans le repère choisi. Nous pouvons alors décrire le bord de D dans les coordonnées polaires r et θ : $x = r(\theta) \cos \theta$ et $y = r(\theta) \sin \theta$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance à l'origine. Nous allons utiliser un théorème d'analyse pour obtenir une formule donnant l'aire de D .

Théorème (Théorème de Green). *Soit C une courbe (orientée positivement) délimitant un domaine borné D du plan. Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions continûment différentiables sur un ouvert contenant D . Alors*

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

En particulier, l'aire A de D est donnée par

$$A = \iint_D 1 \, dx dy = \int_C x \, dy = \int_C -y \, dx = \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx.$$

Utilisons le théorème de Green pour écrire l'aire de D :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\theta) \, dy(\theta) - y(\theta) \, dx(\theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta (r' \sin \theta + r \cos \theta) - r \sin \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire cette expression en intégrant en même temps les valeurs de θ entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 et entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta) + r^2(\theta - \frac{\pi}{2}) d\theta.$$

Pour tout θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les points $(0, 0)$, $(x(\theta), y(\theta))$ et $(x(\theta - \frac{\pi}{2}), y(\theta - \frac{\pi}{2}))$ du bord de D forment un triangle rectangle en $(0, 0)$. La longueur de l'hypoténuse au carré vaut donc $r^2(\theta) + r^2(\theta - \frac{\pi}{2})$, mais est inférieure à d^2 , puisque D est de diamètre d . Ainsi, on a prouvé que

$$A \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2 d\theta = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Nous avons donc obtenu une relation qui lie l'aire d'un domaine à son diamètre : tout domaine de diamètre fixé d possède une aire inférieure à $\frac{\pi d^2}{4}$. Or, l'aire d'un disque de diamètre d vaut précisément $\frac{\pi d^2}{4}$. Le disque est donc le domaine que nous cherchions : il maximise l'aire à diamètre fixé. Remarquons que pour être tout à fait précis, à ce stade, nous n'avons pas démontré que c'est le seul domaine de diamètre d dont l'aire vaut $\frac{\pi d^2}{4}$.

Remarquons aussi que nous n'avons pas justifié le fait que nous pouvons paramétrer le bord du domaine de telle sorte que pour tout angle θ , la droite issue de O ne coupe le bord de D qu'en un seul point. Ceci n'est évidemment pas vrai pour tout domaine, par exemple pour un domaine en forme de cacahuète. Cependant, et nous laissons le soin au lecteur de s'en convaincre, un domaine qui possède des « creux » ne maximisera pas l'aire. Plus précisément, on vérifie en fait que seuls les domaines convexes sont des candidats pour maximiser l'aire. Pour de tels domaines, nous pouvons bel et bien argumenter comme nous l'avons fait.

Pour répondre à la question originelle, nous allons adopter la même stratégie : nous allons prouver qu'une inégalité lie l'aire et le périmètre d'un domaine ; l'égalité n'étant atteinte que par le disque.

Théorème (Inégalité isopérimétrique). *Si A est l'aire d'un domaine du plan euclidien et P son périmètre, alors*

$$P^2 \geq 4\pi A.$$

L'égalité n'a lieu que si le domaine est un disque.

L'inégalité isopérimétrique nous apprend donc que c'est le disque qui maximise l'aire à périmètre fixé et qu'il minimise aussi le périmètre si nous fixons l'aire.

Nous consacrons le reste de cette note à la preuve de l'inégalité isopérimétrique. Nous présentons d'abord une preuve qui requiert une hypothèse de régularité supplémentaire sur le bord du domaine. Grosso modo, nous supposons dans un premier temps que la courbe qui décrit le bord du domaine est localement le graphe d'une fonction dérivable au moins deux fois. La preuve dans ce cas peut se faire en démontrant une nouvelle inégalité, dite de Wirtinger, que nous déduirons de la théorie des séries de Fourier. Lorsque le bord n'est pas aussi régulier, il faut connaître des concepts d'analyse plus avancés pour ajuster les arguments. Nous le ferons dans la section 4 après avoir introduit la notion de dérivée faible et les espaces de Sobolev dans la section 3. La dernière section de notre contribution

est une invitation à s'intéresser à cette question isopérimétrique en dimension supérieure. La preuve que nous présentons est adéquate pour la dimension 2 mais ne permet pas de traiter les dimensions plus grandes ; nous esquissons une argumentation possible dans la section 5.

Pour plus de détails sur les concepts d'analyse réelle que nous utilisons dans cette note, y comprise la théorie des séries de Fourier, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [1, 2]. Pour la section concernant les espaces de Sobolev, nous recommandons la lecture de [3]. Pour une référence générale sur l'inégalité isopérimétrique, nous renvoyons le lecteur à l'article [4] et au chapitre consacré à cette inégalité dans l'ouvrage [5].

2 Inégalité isopérimétrique pour domaines réguliers

Nous présentons dans cette section une preuve de l'inégalité pour les domaines du plan dont le bord est une courbe deux fois continûment différentiable. Nous dirons qu'une telle courbe est de classe C^2 . Un domaine possédant des lignes brisées, comme un polygone, est donc exclu pour l'instant. Introduisons la notation $C^2_{\text{per}}[a, b]$ pour décrire l'ensemble des fonctions C^2 qui, étendues sur tout \mathbb{R} , sont périodiques de période $b - a$. Prenons $[a, b] = [-1, 1]$ pour fixer les idées. Rappelons que toute fonction u qui appartient à la classe $C^2_{\text{per}}[-1, 1]$ possède une expansion trigonométrique

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)),$$

où

$$a_n = \int_{-1}^1 u(x) \cos(n\pi x) \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \int_{-1}^1 u(x) \sin(n\pi x) \, dx. \tag{1}$$

Ce développement en série porte le nom de *série de Fourier* de la fonction u . L'inégalité isopérimétrique est un corollaire presque immédiat du théorème suivant.

Théorème 1 (Inégalité de Wirtinger). *Si $u \in C^2_{\text{per}}[-1, 1]$ et $\int_{-1}^1 u \, dx = 0$, alors*

$$\int_{-1}^1 u'^2 \, dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u^2 \, dx.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $u(x) = a \cos(\pi x) + b \sin(\pi x)$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous savons que u est égale à sa série de Fourier

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)).$$

Le terme a_0 n'apparaît pas puisque $\int_{-1}^1 u \, dx = 0$. Nous pouvons aussi écrire

$$u'(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(n\pi x) + nb_n \cos(n\pi x)).$$

En appliquant l'égalité de Parseval à ces deux expressions, voir par exemple [2], nous obtenons

$$\int_{-1}^1 u^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{et} \quad \pi^2 \int_{-1}^1 u'^2 dx = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) n^2$$

et l'inégalité apparaît en comparant les deux séries terme à terme. De plus, l'égalité est vérifiée si et seulement si $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. Dans ce cas, $u(x) = a \cos(\pi x) + b \sin(\pi x)$, pour $a, b \in \mathbb{R}$. \square

Remarquons que l'inégalité de Wirtinger nous donne une information que nous pouvons interpréter intuitivement. Si u est une fonction périodique, nous pouvons donner une estimation supérieure de l'écart entre u et sa moyenne sur une période à partir de la variation de sa dérivée sur cette période. Ainsi, si la fonction varie peu, elle s'écarte peu de sa moyenne.

Corollaire 2. *Pour tout $u, v \in C_{\text{per}}^2[-1, 1]$, nous avons*

$$\int_{-1}^1 [u'^2 + v'^2] dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 uv' dx.$$

Par ailleurs, l'égalité a lieu si et seulement si il existe trois réels r_1, r_2, r_3 tels que

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Démonstration. Posons

$$r_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u dx, \quad r_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v dx, \quad f = u - r_1, \quad g = v - r_2,$$

si bien que

$$f, g \in \left\{ u \in C_{\text{per}}^2[-1, 1] : \int_{-1}^1 u dx = 0 \right\}.$$

D'autre part, nous calculons aisément

$$\int_{-1}^1 [f'^2 + g'^2] dx = \int_{-1}^1 [u'^2 + v'^2] dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 f g' dx = \int_{-1}^1 uv' dx.$$

Réécrivons

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [u'^2 + v'^2 - 2\pi uv'] dx &= \int_{-1}^1 [f'^2 + g'^2 - 2\pi f g'] dx \\ &= \int_{-1}^1 (g' - \pi f)^2 dx + \int_{-1}^1 [f'^2 - \pi^2 f^2] dx, \end{aligned}$$

et observons que cette dernière expression est positive. Pour le premier terme, c'est clair, pour le deuxième, c'est une conséquence de l'inégalité de Wirtinger. Par ailleurs, l'égalité ne peut se produire que si

$$g' = \pi f \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 [f'^2 - \pi^2 f^2] dx = 0.$$

Par le théorème 1, nous en déduisons que

$$f(x) = a \cos(\pi x) + b \sin(\pi x)$$

et il s'ensuit que $g(x) = a \sin(\pi x) - b \cos(\pi x)$. Finalement, en prenant $r_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$, nous en concluons que

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = f(x)^2 + g(x)^2 = r_3^2,$$

pour tout $x \in [-1, 1]$. □

Munis de ce corollaire, nous sommes enfin en mesure de démontrer l'inégalité isopérimétrique. Introduisons quelques notations.

Définition 3. Soient $u, v \in C_{\text{per}}^2(a, b)$. Nous noterons

$$L(u, v) = \int_a^b \sqrt{u'^2 + v'^2} \, dx$$

et

$$M(u, v) = \frac{1}{2} \int_a^b [uv' - u'v] \, dx = \int_a^b uv' \, dx.$$

Remarque. Par le théorème de Green, si le bord C d'un domaine D est paramétré par $(u(t), v(t))$ nous avons

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_C x \, dy = \int_a^b uv' \, dt = M(u, v).$$

Théorème 4 (Inégalité isopérimétrique). *Pour tout $u, v \in C_{\text{per}}^2[a, b]$, nous avons*

$$L(u, v)^2 - 4\pi M(u, v) \geq 0.$$

Par ailleurs, l'égalité a lieu si et seulement si

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2 \quad \forall x \in [a, b],$$

pour certains réels r_1, r_2, r_3 .

Démonstration. Nous pouvons supposer, sans perdre en généralité, que $u'(x)^2 + v'(x)^2 > 0, \forall x \in [a, b]$. Nous commençons par reparamétriser la courbe par un multiple de sa longueur pour obtenir une paramétrisation du bord par des fonctions périodiques de période 2. Choisissons le paramètre $y \in [-1, 1]$ défini par

$$y = g(x) = -1 + \frac{2}{L(u, v)} \int_a^x \sqrt{u'^2 + v'^2} \, dx.$$

En posant

$$\varphi(y) = u(g^{-1}(y)) \quad \text{et} \quad \psi(y) = v(g^{-1}(y)), \tag{2}$$

nous obtenons la paramétrisation souhaitée. Nous pouvons alors calculer

$$\begin{aligned}\sqrt{\varphi'^2(y) + \psi'^2(y)} &= (g^{-1})'(y) \sqrt{u'^2(g^{-1}(y)) + v'^2(g^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{g'(x)} \sqrt{u'^2(x) + v'^2(x)} = \frac{L(u, v)}{2}\end{aligned}$$

et nous en déduisons que

$$L(u, v)^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L(u, v)^2 dy = 2 \int_{-1}^1 [\varphi'^2(y) + \psi'^2(y)] dy.$$

D'autre part, dans cette paramétrisation, nous obtenons

$$M(u, v) = \int_a^b \varphi(g(x)) \psi'(g(x)) g'(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(y) \psi'(y) dy.$$

Appliquons maintenant le corollaire 2. Puisque $\varphi, \psi \in C_{\text{per}}^2[-1, 1]$, nous avons

$$\int_{-1}^1 [\varphi'^2 + \psi'^2] dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 \varphi \psi' dx,$$

ce qui entraîne que

$$L(u, v)^2 \geq 4\pi M(u, v), \quad \forall u, v \in C_{\text{per}}^2[a, b].$$

Étudions encore brièvement le cas d'égalité : il y aura égalité si et seulement si l'égalité est aussi vérifiée dans le corollaire 2, ce qui se produit uniquement pour les fonctions annoncées. \square

Remarque. Il est peut-être nécessaire de souligner que le théorème que nous venons de démontrer est exactement l'inégalité isopérimétrique énoncée dans l'introduction : si le bord d'un domaine du plan est paramétré par u et $v \in C^2[a, b]$, nous avons vu que M correspond bien à l'aire ; L est la longueur de la courbe $\{(u(x), v(x)) : x \in [a, b]\}$, c'est-à-dire la longueur du bord du domaine. Les fonctions u et v vérifient très clairement la condition de périodicité puisque la courbe est fermée. Lorsqu'il y a égalité, la conclusion indique que u et v paramètrent le cercle de rayon r_3 centré en (r_1, r_2) , autrement dit que le domaine est un disque.

3 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}$

Nous allons maintenant introduire quelques notions plus avancées d'analyse qui nous permettront de démontrer l'inégalité isopérimétrique pour des domaines moins réguliers et notamment pour des domaines dont le bord est une courbe dérivable par morceaux. Cette nouvelle classe inclut donc cette fois les domaines polygonaux.

Nous commençons par affaiblir la notion de dérivée.

Définition 5. Soit $I =]a, b[$, un intervalle borné ou non. Soit $u \in L^1_{loc}(I)$. Nous dirons que u est *faiblement dérivable* si et seulement si il existe $g \in L^1_{loc}(I)$ telle que

$$\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Nous dirons alors que g est la *dérivée faible* de u et noterons $u' = g$.

Dans cette définition, $L^1_{loc}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions *localement intégrable*, c'est-à-dire telles que leur intégrale sur tout compact de I est finie, et $C^1_c(I)$ désigne l'ensemble des fonctions continûment dérivables à *support compact*, c'est-à-dire telles qu'il existe un compact $K \subset I$ pour lequel f s'annule sur $I \setminus K$.

Remarque. Si u est faiblement dérivable, alors sa dérivée faible est unique. De plus, si u est dérivable au sens usuel, les deux dérivées coïncident. Cette dernière affirmation découle du théorème d'intégration par partie.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si u est une fonction dérivable au sens classique excepté en un nombre fini de points, alors u est faiblement dérivable et sa dérivée faible est la fonction u' définie au sens classique par morceau.

Définition 6. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : u' \in L^p(I)\}.$$

Proposition. L'espace $W^{1,p}$ peut être muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

L'espace $W^{1,p}$ muni de sa norme est alors un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé et complet pour cette norme).

L'espace $W^{1,2}$ peut être muni du produit scalaire

$$(u, v)_{W^{1,2}} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

qui induit une norme équivalente à celle déjà définie ci-dessus. L'espace $W^{1,2}$ est un espace de Hilbert (c'est-à-dire un espace vectoriel normé, dont la norme découle du produit scalaire et complet pour cette norme).

Le théorème suivant affirme que nous pouvons approximer les fonctions de $W^{1,p}(I)$ par des fonctions régulières. C'est par approximation que nous étendrons l'inégalité isopérimétrique aux domaines moins réguliers.

Théorème 7 (Densité). Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors

1. il existe une suite $(u_k)_k$ dans $C^\infty(\bar{I})$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$.
2. il existe une suite $(v_k)_k$ dans $C^\infty_c(\mathbb{R})$ telle que $v_{n|I} \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$.

La notation $C^n_c(\mathbb{R})$ désigne les fonctions n fois continûment dérivables et à support compact.

Remarque. Évidemment, le résultat reste valable pour $(u_k)_k$ dans $C^n(\bar{I})$ et $(v_k)_k$ dans $C^n_c(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Par contre, il est nécessaire de souligner que $C^\infty_c(I)$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(I)$ en général.

Il serait naturel de penser que, puisque les fonctions de $W^{1,p}$ sont celles dont les dérivées (faibles) sont dans L^p , ces dernières sont les primitives de fonctions de L^p . Le théorème suivant précise cette intuition et affirme de plus qu'il existe toujours un représentant qui est continu. Rappelons que les éléments de L^p et $W^{1,p}$ sont des classes d'équivalence de fonctions.

Théorème 8. Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, il existe une fonction $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p. sur I et

$$\tilde{u}(d) - \tilde{u}(c) = \int_c^d u'(x) dx \quad \forall c, d \in \bar{I}$$

Terminons cette section par quelques éléments du calcul des variations. Considérons un *Lagrangien*

$$L : (t, x, y) \mapsto L(t, x, y). \quad (3)$$

Définition 9. Soit $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. L'action associée à L est définie sur $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ par

$$\mathcal{J}(u) = J_L(u) = \int_a^b L(t, u(t), u'(t)) dt. \quad (4)$$

La variation première de \mathcal{J} en u dans la direction $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ est définie par

$$\delta \mathcal{J}(u)(h) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{J}(u + \varepsilon h). \quad (5)$$

Lemme 10. Pour tout $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, nous avons

$$\delta \mathcal{J}(u)(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, u(t), u'(t)) \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), u'(t)) \cdot h'(t) \right) dt. \quad (6)$$

Démonstration. En dérivant sous le signe somme, nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J}(u)(h) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_a^b L(t, u(t) + \varepsilon h(t), u'(t) + \varepsilon h'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(t, u(t) + \varepsilon h(t), u'(t) + \varepsilon h'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, u(t), u'(t)) \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), u'(t)) \cdot h'(t) \right) dt. \end{aligned}$$

□

Nous interpréterons l'annulation de $\delta \mathcal{J}(u)$ en utilisant le *lemme fondamental du calcul des variations*. Nous posons

$$C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N) = \{u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \mid u(a) = u(b) = 0\}. \quad (7)$$

Lemme 11. Soient $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R}^N)$ telles que, pour tout $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$,

$$\int_a^b f(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t) dt = 0.$$

Alors $g \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ et $g' = f$.

Démonstration. Soit $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$. En intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(g(t) \cdot h'(t) - \int_a^t f(s) \, ds \cdot h'(t) \right) dt + \left[\int_a^t f(s) \, ds \cdot h(t) \right]_a^b \\ &= \int_a^b \left(g(t) - \int_a^t f(s) \, ds \right) \cdot h'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Posons

$$v(t) = g(t) - \int_a^t f(s) \, ds, \quad \bar{v} = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) \, dt \quad \text{et} \quad h(t) = \int_a^b (v(s) - \bar{v}) \, ds.$$

Comme $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, nous obtenons

$$0 = \int_a^b v(t) \cdot h'(t) \, dt = \int_a^b |v(t)|^2 \, dt.$$

Mais alors $v = 0$ sur $[a, b]$, ce qui implique $g' = f$. □

Le théorème suivant est une conséquence directe des deux lemmes précédents.

Théorème 12. Soit $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ telle que, pour tout $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, $\delta \mathcal{J}(u)(h) = 0$. Alors, pour tout $a \leq t \leq b$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), u'(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, u(t), u'(t)).$$

□

Remarque. A priori, la fonction

$$t \mapsto \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), u'(t))$$

est continue. La dérivabilité de cette fonction est une propriété remarquable de régularité.

4 Retour à l'inégalité isopérimétrique

Nous donnons dans cette section une preuve de l'inégalité isopérimétrique pour les domaines du plan dont le bord est une courbe paramétrée par des fonctions de $W^{1,p}$. Commençons par introduire la notation suivante (pour $p \geq 1$)

$$W_{\text{per}}^{1,p}(a, b) = \{u \in W^{1,p}(a, b) : u(a) = u(b)\}.$$

Nous pouvons à présent étendre l'inégalité de Wirtinger (théorème 1) aux fonctions de $W_{\text{per}}^{1,2}(-1, 1)$.

Théorème 13 (Inégalité de Wirtinger). Si $u \in W_{\text{per}}^{1,2}(-1,1)$ et $\int_{-1}^1 u \, dx = 0$, alors

$$\int_{-1}^1 u'^2 \, dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u^2 \, dx.$$

Par ailleurs, l'égalité a lieu si et seulement si $u(x) = a \cos(\pi x) + b \sin(\pi x)$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous noterons $E = \left\{ u \in W_{\text{per}}^{1,2}(-1,1) : \int_{-1}^1 u \, dx = 0 \right\}$.

Nous avons démontré le résultat pour $u \in C^2[-1,1] \cap E$. Comme $C^2[-1,1]$ est dense dans $W^{1,2}(-1,1)$ (théorème 7), on en déduit qu'il existe une suite $(u_k)_k \subset E \cap C^2[-1,1]$ telle que

$$\|u - u_k\|_{L^2}^2 + \|u' - u'_k\|_{L^2}^2 = \|u - u_k\|_{W^{1,2}}^2 \rightarrow 0,$$

ce qui implique que

$$\|u_k\|_{L^2} \rightarrow \|u\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|u'_k\|_{L^2} \rightarrow \|u'\|_{L^2}.$$

Dès lors, pour tout $\epsilon > 0$ et pour k suffisamment grand, nous avons

$$\int_{-1}^1 u'^2 \, dx + \epsilon \geq \int_{-1}^1 u'_k{}^2 \, dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 u_k^2 \, dx \geq \int_{-1}^1 u^2 \, dx - \epsilon.$$

En utilisant l'inégalité de Wirtinger pour les fonctions de $C^2[-1,1]$, nous obtenons

$$\int_{-1}^1 u'^2 \, dx + \epsilon \geq \pi^2 \int_{-1}^1 u^2 \, dx - \pi^2 \epsilon$$

et nous pouvons conclure puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire.

Il nous faut encore montrer que les seules fonctions vérifiant l'égalité sont celles énoncées. Supposons donc que $u \in E$ vérifie l'égalité; u minimise alors la quantité $Q(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 [u'^2 - \pi^2 u^2] \, dx$ dans E .

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}_0$ et quelle que soit $v \in E \cap C_0^1(-1,1)$, nous savons que $Q(u + tv) \geq Q(u)$. Pour v fixé, $q(t) = Q(u + tv)$ est une fonction d'une variable réelle qui atteint un minimum en $t = 0$. Il s'ensuit que $q'(0) = 0$. Un calcul direct similaire à celui que nous avons fait dans la preuve du lemme 10 montre que

$$q'(0) = \int_{-1}^1 [u'v' - \pi^2 uv] \, dx.$$

Comme on peut faire ce raisonnement quelle que soit $v \in E \cap C_0^1(-1,1)$, on en conclut que u est telle que

$$\int_{-1}^1 [u'v' - \pi^2 uv] \, dx = 0 \quad \forall v \in E \cap C_0^1(-1,1).$$

Montrons que cette dernière identité reste vraie pour tout $v \in C_0^1(-1, 1)$. Si v n'est pas de moyenne nulle, alors

$$w : x \mapsto \left[v(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(t) dt \right] \in E$$

et

$$\int_{-1}^1 [u'w' - \pi^2 uw] dx = \int_{-1}^1 \left[u'v' - \pi^2 u \left(v - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x) dx \right) \right] dx = 0.$$

Comme u est de moyenne nulle, on conclut que

$$\int_{-1}^1 [u'v' - \pi^2 uv] dx = 0 \quad \forall v \in C_0^1(-1, 1).$$

La lecture de cette identité nous apprend que $-\pi^2 u$ est la dérivée faible de u' . Donc u' a un représentant continu. Nous pouvons donc appliquer le lemme 11 et en déduire que $u \in C^2[-1, 1]$ et satisfait l'équation différentielle

$$u'' + \pi^2 u = 0.$$

À ce stade, nous pouvons conclure en invoquant le théorème 1 ou en résolvant l'équation différentielle. □

Nous poursuivons en généralisant à son tour le corollaire 2 à l'espace $W_{\text{per}}^{1,2}(-1, 1)$. Sur base du théorème 13, la preuve est identique.

Corollaire 14. *Pour tout $u, v \in W_{\text{per}}^{1,2}(-1, 1)$, nous avons*

$$\int_{-1}^1 [u'^2 + v'^2] dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 uv' dx.$$

Par ailleurs, l'égalité a lieu si et seulement si il existe trois réels r_1, r_2, r_3 tels que

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Enfin, nous démontrons l'inégalité isopérimétrique dans $W_{\text{per}}^{1,1}(a, b)$.

Définition 15. Soient $u, v \in W_{\text{per}}^{1,1}(a, b)$. Dans le souci d'étendre la définition 3, nous noterons à nouveau

$$L(u, v) = \int_a^b \sqrt{u'^2 + v'^2} dx$$

et

$$M(u, v) = \frac{1}{2} \int_a^b [uv' - u'v] dx = \int_a^b uv' dx.$$

Théorème 16 (Inégalité isopérimétrique). *Pour tout $u, v \in W_{\text{per}}^{1,1}(a, b)$, nous avons*

$$L(u, v)^2 - 4\pi M(u, v) \geq 0.$$

Par ailleurs, si $u, v \in C_{\text{per}}^1[a, b]$ par morceaux, l'égalité a lieu si et seulement si

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2 \quad \forall x \in [a, b]$$

pour certains réels r_1, r_2, r_3 .

Démonstration. Nous avons déjà démontré ce résultat pour $u, v \in C_{\text{per}}^2[a, b]$. Prenons $u, v \in W_{\text{per}}^{1,1}(a, b)$. Comme précédemment, nous pouvons trouver deux suites $(u_k)_k, (v_k)_k \subset C_{\text{per}}^2[a, b]$ telles que $u_k, v_k \rightarrow u, v$ dans $W^{1,1}(a, b)$. Dès lors, en utilisant l'inégalité de Hölder, pour tout $\epsilon > 0$ et pour k suffisamment grand, nous obtenons

$$\begin{aligned} |M(u, v) - M(u_k, v_k)| &= \left| \int_a^b [u_k v'_k - u v'] dx \right| = \left| \int_a^b [u_k (v'_k - v') + (u_k - u) v'] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |u_k (v'_k - v')| dx + \int_a^b |(u_k - u) v'| dx \\ &\leq \|u_k\|_{L^\infty} \|v'_k - v'\|_{L^1} + \|u_k - u\|_{L^\infty} \|v'\|_{L^1} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

De manière similaire, nous obtenons, pour k suffisamment grand,

$$\begin{aligned} |L(u, v) - L(u_k, v_k)| &= \left| \int_a^b \sqrt{u'^2 + v'^2} - \sqrt{u_k'^2 + v_k'^2} dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{u'^2 - u_k'^2 + v'^2 - v_k'^2}{\sqrt{u'^2 + v'^2} + \sqrt{u_k'^2 + v_k'^2}} dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{u'^2 - u_k'^2}{\sqrt{u'^2 + v'^2} + \sqrt{u_k'^2 + v_k'^2}} \right| dx \\ &\quad + \int_a^b \left| \frac{v'^2 - v_k'^2}{\sqrt{u'^2 + v'^2} + \sqrt{u_k'^2 + v_k'^2}} \right| dx \\ &\leq \int_a^b \frac{|u'^2 - u_k'^2|}{|u'| + |u'_k|} dx + \int_a^b \frac{|v'^2 - v_k'^2|}{|v'| + |v'_k|} dx \\ &\leq \int_a^b \frac{|u' - u'_k| (|u'| + |u'_k|)}{|u'| + |u'_k|} dx \\ &\quad + \int_a^b \frac{|v' - v'_k| (|v'| + |v'_k|)}{|v'| + |v'_k|} dx \\ &= \|u' - u'_k\|_{L^1} + \|v' - v'_k\|_{L^1} \leq \epsilon \end{aligned}$$

et donc, il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$|L(u, v)^2 - L(u_k, v_k)^2| = |L(u, v) + L(u_k, v_k)||L(u, v) - L(u_k, v_k)| \leq c\epsilon.$$

En combinant tout ceci, et en utilisant le résultat pour les fonctions $C^2_{\text{per}}[a, b]$, nous en concluons

$$\begin{aligned} L(u, v)^2 - 4\pi M(u, v) &\geq L(u_k, v_k)^2 - 4\pi M(u_k, v_k) - (c + 4\pi)\epsilon \\ &\geq -(c + 4\pi)\epsilon. \end{aligned}$$

Puisque ϵ est arbitraire, le théorème est démontré. □

5 L'inégalité isopérimétrique en dimension n

Avant toute chose, il nous faut définir l'aire et le périmètre des objets que nous manipulerons.

Définition 17. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un compact, avec $n \geq 2$. Nous définissons

1. $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \epsilon\}$
2. $M(A)$ la mesure de Lebesgue de A
3. $L(\partial A) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M(A + \bar{B}_\epsilon) - M(A)}{\epsilon}$

Remarque. Dans des cas suffisamment réguliers, cette définition de $L(\partial A)$ correspond à la notion de $(n - 1)$ -mesure de ∂A . C'est notamment le cas si A est convexe.

Nous ne démontrerons pas l'inégalité en dimension n , nous donnons juste une idée de la preuve, après l'avoir énoncée :

Théorème 18 (Théorème isopérimétrique). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un compact, avec $n \geq 2$. Notons $L = L(\partial A)$, $M = M(A)$ et ω_n le volume de la boule unité B_1 dans \mathbb{R}^n . Sous ces hypothèses, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$L^n - n^n \omega_n M^{n-1} \geq 0.$$

Dans la preuve du théorème isopérimétrique, nous aurons besoin du théorème de Brunn-Minkowski.

Théorème 19 (Inégalité de Brunn-Minkowski). Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ deux compacts, avec $n \geq 1$. Alors

$$M(A + B)^{1/n} \geq M(A)^{1/n} + M(B)^{1/n}$$

Démonstration. Nous ne donnerons que les grandes étapes de cette preuve.

L'idée est de prouver l'inégalité en premier lieu pour les rectangles de \mathbb{R}^n en utilisant éventuellement l'inégalité suivante : si $q_i > 0$, $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors

$$\prod_{i=1}^n q_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i.$$

Ensuite, on montre le résultat pour des unions finies de rectangles. Ceci peut se faire par récurrence sur le nombre de rectangles dans les unions.

Finalement, on clôture la preuve en recouvrant chaque compact A, B par une réunion de plus en plus fine de rectangles, de sorte que l'on puisse déduire le résultat par passage à la limite. □

Démonstration du théorème isopérimétrique. Nous avons, par le théorème de Brunn-Minkowski (théorème 19), que

$$L(\partial A) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M(A + \tilde{B}_\epsilon) - M(A)}{\epsilon} \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[M(A)^{1/n} + M(B_\epsilon)^{1/n}]^n - M(A)}{\epsilon}.$$

En remplaçant $M(B_\epsilon) = \epsilon^n \omega_n$, nous avons

$$L(\partial A) \geq M(A) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\left[1 + \epsilon \left(\frac{\omega_n}{M(A)}\right)^{1/n}\right]^n - 1}{\epsilon} = M(A) n \left(\frac{\omega_n}{M(A)}\right)^{1/n}.$$

Il ne reste plus qu'à mettre tous les termes du même côté, et nous obtenons l'inégalité voulue. \square

6 Bibliographie

- [1] J. MAWHIN, *Analyse*. Accès Sciences., Brussels : De Boeck Université, second éd., 1997. Fondements, techniques, évolution.
- [2] M. H. PROTTER et C. B. MORREY, Jr., *A first course in real analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics, New York : Springer-Verlag, second éd., 1991.
- [3] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise., Paris : Masson, 1983. Théorie et applications.
- [4] A. TREIBERGS, « Inequalities that imply the isoperimetric inequality ». <http://www.math.utah.edu/~treiberg/isoperim/isop.pdf>.
- [5] B. DACOROGNA, *Introduction to the calculus of variations*. London : Imperial College Press, second éd., 2009. Translated from the 1992 French original.